

# Integrals Impròpies

## 1 Comparació per quocient

PROPOSICIÓ 1.1 (Comparació per quocient). *Siguin  $f, g : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  de signe constant i elementalment integrable (això és, contínues a trossos a qualsevol subinterval compacte contingut a  $[a, K] \subset [a, +\infty)$  per tot  $K > a$ ). Aleshores, si existeix el límit,*

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

*i és  $L \neq 0, +\infty$ ; llavors  $\int_a^{+\infty} f$ ,  $\int_a^{+\infty} g$  són ambdues (absolutament) convergents o divergents. Escriurem:*

$$\int_a^{+\infty} f \sim \int_a^{+\infty} g.$$

*Quan  $L = 0$  ó  $L = +\infty$ , tenim encara el següent resultat. Per  $f, g$  de signe constant i elementalment integrables a  $[a, +\infty)$ :*

- *Si  $L = 0$  i la integral  $\int_a^{+\infty} g$  és (absolutament) convergent, la integral  $\int_a^{+\infty} f$  també convergeix (absolutament).*
- *Si  $L = +\infty$  i la integral  $\int_a^{+\infty} g$  és divergent, llavors la integral  $\int_a^{+\infty} f$  també és divergent.*

Aquesta proposició s'aplica idènticament al cas de funcions reals de signe constant definides a un interval compacte però que són no acotades a algun punt de l'interval. Així per exemple, si les funcions  $f, g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  són de signe constant, amb  $f$  i/o  $g$  no acotades prop d' $a$  i elementalment integrables a qualsevol interval compacte  $[a + \delta, b]$  per tot  $0 < \delta < b - a$ .

COROLLARI 1.2 (Criteri de Riemann-Pringsheim). *Sigui  $f$  definida i elementalment integrable a  $[a, +\infty)$  (i. e.,  $f$  contínua a trossos a qualsevol interval compacte  $[a, K] \subset [a, +\infty)$ , per tot  $K > a$ ) i amb signe constant al mateix interval; llavors: si existeix el límit  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x)$  amb  $L \neq 0, +\infty$  per algun  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la integral:*

$$\int_a^{+\infty} f \text{ és (absolutament) convergent} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

*Tanmateix:*

- *Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = 0$  per algun  $\alpha > 1$ , llavors  $\int_a^{+\infty} f$  és convergent.*
- *Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$  per algun  $\alpha < 1$ , llavors  $\int_a^{+\infty} f$  és divergent.*

## 2 Problemes

1. Estudieu la convergència de

$$(a) \int_0^{\pi/2} \tan x \, dx, \quad (b) \int_0^1 \ln x \, dx, \quad (c) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \, dx.$$

◁ **Solució.** a)  $\tan x$  és no acotada a  $x = \pi/2$ , ja que  $\tan x \rightarrow +\infty$  quan  $x \rightarrow \pi/2^-$ . En aquest cas podem primitivitzar i prendre límits, llavors:

$$\int_0^{\pi/2} \tan x \, dx = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \tan x \, dx = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [-\ln(\cos x)]_0^b = -\lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos b) = +\infty,$$

i la integral és divergent.

b) La funció  $\ln x$  és no acotada prop de  $x = 0$ , donat que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ . Com abans podem primitivitzar i prendre límits:

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \ln x \, dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} [x(\ln x - 1)]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (-1 - a(\ln a - 1)) = -1,$$

per tant convergent.

c) En aquest cas, l'interval és no acotat. Podem procedir com als casos anteriors, fent

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \, dx &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_0^K x^2 e^{-x} \, dx = \lim_{K \rightarrow +\infty} [-(x^2 + 2x + 2)e^{-x}]_0^K \\ &= \lim_{K \rightarrow +\infty} [2 - (K^2 + 2K + 2)e^{-K}] = 2. \end{aligned}$$

Aleshores la integral és convergent. Si només ens interessés determinar la convergència, notem que  $f(x) = x^2 e^{-x} \geq 0$  per tot  $x \in \mathbb{R}$ . Per tant la funció integral definida per

$$F(x) := \int_0^x t^2 e^{-t} \, dt,$$

és creixent, i així  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  existeix però pot ser  $+\infty$ . El límit serà finit si i només si  $F(x)$  està fitada sobre  $[0, +\infty)$ , i. e., si existeix  $K > 0$  tal que  $F(x) \leq K$ , per tot  $x \geq 0$ . En efecte, fent servir que  $g(t) = t^2 e^{-t/2} \leq 16/e^2$  per tot  $t \in \mathbb{R}$  —només cal veure que, per  $t \geq 0$ ,  $g(t)$  té un màxim absolut a  $t = 4$ , on val  $g(4) = 16/e^2$ . Així:

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} \, dt = \int_0^x t^2 e^{-t/2} e^{-t/2} \, dt \leq \frac{16}{e^2} \int_0^x e^{-t/2} \, dt \leq \frac{16}{e^2} \int_0^{+\infty} e^{-t/2} \, dt = \frac{32}{e^2} < +\infty$$

ja que,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t/2} \, dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-t/2} \, dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-2e^{-t/2}]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2(1 - e^{-b/2}) = 2$$

i per tant la integral és convergent. ▷

2. Estudieu la convergència de:

$$\begin{aligned} (a) \int_0^1 \frac{x \ln x}{1+x^2} \, dx, & \quad (b) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}, & \quad (c) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}, \\ (d) \int_0^\pi \frac{dx}{\sin x}, & \quad (e) \int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx, & \quad (f) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^3}} dx. \end{aligned}$$

◁ **Solució.** a) Notem que:

$$f(x) = \frac{x \ln x}{1+x^2} \leq 0, \quad \text{a } 0 < x \leq 1, \quad \text{i que: } f \in \mathcal{C}([0, 1]);$$

de fet,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ . Aleshores re-definint  $f(x) = 0$ , és  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ . Així  $f \in \mathcal{CT}([0, 1])$ , i. e.,  $f$  és contínua a trossos a l'interval  $[0, 1]$  i per tant, elementalment integrable i llavors la integral és convergent.

b) La funció subintegral,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$  és contínua a l'interval  $]1, 3]$  però no acotada prop de  $x = 1$  (notem que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ ). Com que té primitiva "fàcil" podem estudiar la seva convergència, tal com s'ha fet als apartats del problema 1,

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \lim_{a \rightarrow 1^+} \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{a \rightarrow 1^+} [\operatorname{argcosh} x]_a^3 \\ &= \lim_{a \rightarrow 1^+} (\operatorname{argcosh} 3 - \operatorname{argcosh} a) = \operatorname{argcosh} 3. \end{aligned}$$

c) La funció  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + x^2}} \geq 0$  a  $]0, 1]$ , i és no acotada a  $x = 0$ . Aplicant el criteri de majorització:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x + x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \geq 0 \implies \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x + x^2}} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ \lim_{a \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2(1 - \sqrt{a}) = 2, \end{aligned}$$

llavors la integral és convergent.

d) Sigui  $f(x) = \frac{1}{\sin x} \geq 0$ , a  $]0, \pi[$ . Podem fer:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dx}{\sin x} &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} + \int_{\pi/2}^\pi \frac{dx}{\sin x} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \\ &2 \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} \frac{dx}{x} \geq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x} = 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} [\ln x]_a^{\pi/2} = 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} \left( \ln \frac{\pi}{2} - \ln a \right) = +\infty, \end{aligned}$$

on hem fet servir que  $\frac{x}{\sin x} \geq 1$  a l'interval  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Per tant la integral és divergent.

e) Com que  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x \geq 0$  en  $[0, +\infty)$ , aplicarem el criteri de Riemann-Pringsheim, corollari 1.2. Tenim que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = 1.$$

En efecte, ja que el límit del quocient de derivades és

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)}{D\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

y per tant, per L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Llavors, com hem esmentat, del criteri de Riemann-Pringsheim amb  $\alpha = 1$  es segueix la divergència de la integral  $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx$ .

f) Aquí, la funció subintegral,  $f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ , per tot  $x \geq 0$  i per tant és de signe constant a tot l'interval d'integració. Aplicarem el criteri de Riemann-Pringsheim, corollari 1.2 amb  $\alpha = 3/2 > 1$ ,

donat que el límit:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{3/2}}{x^{3/2} \sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \arctan x = \frac{\pi}{2} \neq 0, +\infty,$$

i donat que l'exponent  $\alpha = 3/2 > 1$ , llavors la integral  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^3}} dx$  és (absolutament) convergent. Alternativament, podem fer servir el criteri de comparació per majorització:

$$0 \leq \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^3}} \leq \frac{\arctan x}{x^{3/2}} \leq \frac{\pi/2}{x^{3/2}},$$

per tot  $x \geq 1$ ; i com que:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\pi/2}{x^{3/2}} dx = \frac{\pi}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-2}{x^{1/2}} \right]_1^b = \pi \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) = \pi < +\infty$$

és absolutament convergent, aleshores la integral  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^3}} dx$  és (absolutament) convergent; i així la integral estudiada,  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^3}} dx$  també convergeix absolutament.  $\triangleright$

**3.** Estudieu la convergència de

$$(a) \int_0^1 \ln x \ln(1+x) dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^{1/2}} dx, \quad (c) \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx.$$

$\triangleleft$  **Solució.** a)  $f(x) = \ln x \ln(1+x)$  és contínua en  $(0, 1]$ . Prop de  $x = 0 \ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$ , per tant  $f(x) = x \ln x (1 + \mathcal{O}(x)) \rightarrow 0$ , quan  $x \rightarrow 0^+$ . Així  $f \in \mathcal{CT}([0, 1])$  si  $f(0) = 0$ , i la funció és doncs elementalment integrable i per tant convergent.

b)  $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^{1/2}}$  és contínua en  $[0, 1)$ . De fet, fent el canvi  $t = 1-x$ , queda

$$I := \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^{1/2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = 1-t \Rightarrow dx = -dt, \\ x \rightarrow 1^- \Rightarrow t \rightarrow 0^+, x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^{1/2}} dt. \quad (1)$$

Notem que  $\ln t \leq 0$  si  $0 < t \leq 1$  i per tant, si definim,

$$I_\delta := \int_\delta^1 \frac{\ln t}{t^{1/2}} dt \quad (2)$$

amb  $0 < \delta < 1$ ; el límit  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} I_\delta$  però podria ser  $-\infty$ . Per conveniència, introduïm a continuació:

$$J := - \int_0^1 - \frac{\ln t}{t^{1/2}} dt = -I, \quad J_\delta := \int_0^1 - \frac{\ln t}{t^{1/2}} dt = -I_\delta$$

(en particular, la convergència de la integral  $J$  implica la convergència de la integral estudiada,  $I$ ). Com que la funció subintegral que hi apareix a  $J$  i  $J_\delta$  per  $0 < \delta \leq t \leq 1$ :  $g(t) := -\ln t/t^{1/2} \geq 0$ ; és clar que  $J_\delta$  creix monotònicament quan  $\delta$  decreix cap a zero o, de manera més precisa:  $J_{\delta_1} \geq J_{\delta_2}$  per tot  $0 < \delta_1 \leq \delta_2 < 1$  i llavors, com dèiem pel límit de la integral  $I_\delta$  en (2) quan  $\delta \rightarrow 0^+$ , el límit  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} J_\delta$  existeix, però, podria ser  $+\infty$ . D'altra banda però

$$J_\delta := \int_\delta^1 - \frac{\ln t}{t^{1/2}} dt = \int_\delta^1 \frac{t^{1/4} \ln \frac{1}{t}}{t^{3/4}} dt \leq M \int_\delta^1 \frac{dt}{t^{3/4}} dt = 4M \left[ t^{1/4} \right]_\delta^1 = 4M(1 - \delta^{1/4}) \leq 4M \quad (3)$$

per tot  $0 < \delta < 1$ , amb  $M$  independent de  $\delta$ . Aleshores  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} J_\delta < +\infty$ , la qual cosa implica la convergència de la integral  $I$  a (1).

REMARCA 2.1. en (3),  $M := \sup_{0 < t \leq 1} h(t)$ , amb  $h(t) := t^{1/4} \ln(1/t)$ ,  $t > 0$ . Es comprovar  $M = 4/e$ . En efecte, la funció  $h(t)$  és derivable en tot el seu camp de definició i la seva derivada

$$h'(t) = -\frac{t^{-3/4}}{4} \ln t - t^{-3/4} = -\frac{t^{-3/4}}{4} (\ln t + 4),$$

només s'anul·la en  $\hat{t} = 1/e^4 < 1$ . Com que d'altra banda,  $h(t) > 0$  per  $0 < t < 1$ ,  $h(1) = 0$  i  $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = 0$ ; resulta  $M := \sup_{0 < t \leq 1} h(t) = h(1/e^4) = 4/e$ .

c) Descomposarem la integral del enunciat com a suma de dues integrals:

$$I := \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = I_1 + I_2$$

amb,

$$I_1 := \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx, \quad I_2 := \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx.$$

Veiem que  $I_1$  és no acotada prop del 0, donat que el límit de la funció subintegral és:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = +\infty,$$

mentre que l'interval d'integració  $[1, +\infty)$  a  $I_2$  és no acotat. Així tenim que  $I_1$ ,  $I_2$  són integrals impròpies de segona i primera espècie respectivament. D'una banda, tenim:

$$\begin{aligned} I_1(\delta) &:= \int_\delta^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = \\ &\int_\delta^1 \frac{(x^{1/4} \ln x)^2}{x^{1/2}(1+x^2)} dx \leq M^2 \int_\delta^1 \frac{dx}{x^{1/2}} = M^2 \left[ x^{1/2} \right]_\delta^1 = M^2 (1 - \sqrt{\delta}) \leq 2M^2, \end{aligned}$$

per tot  $0 < \delta < 1$  i on

$$M = \sup_{0 < t \leq 1} (-t^{1/4} \ln t) = 4/e \implies \sup_{0 < t \leq 1} (-t^{1/4} \ln t)^2 = M^2 = 16/e^2$$

(veure la remarca 2.1 al final de l'apartat b)), i d'aquí l'acotació de la integral  $I_1(\delta)$  de dalt. Com que  $I_1(\delta)$  creix monotònicament quan  $\delta$  decreix, i. e.:  $I_1(\delta_1) \geq I_1(\delta_2)$  per tot  $0 < \delta_1 \leq \delta_2 < 1$ . Això prova que el límit  $I_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} I_1(\delta)$  existeix i és finit. Aquí es conclou la convergència de la integral  $I_1$ .

D'altra banda, per estudiar la convergència de la integral  $I_2$ ,

$$\begin{aligned} I_2(b) &:= \int_1^b \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx \leq \int_1^b \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx \\ &= \int_1^b \left( \frac{\ln x}{x^{1/4}} \right)^2 \frac{dx}{x^{3/2}} \leq \frac{16}{e^2} \int_1^b \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{16}{e^2} \left[ \frac{-2}{\sqrt{x}} \right]_1^b = \frac{32}{e^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \leq \frac{32}{e^2}, \quad (4) \end{aligned}$$

per tot  $b > 1$ . Com que  $I_2(b)$  creix monotònicament amb  $b$ , i. e.:  $I_2(b_2) \geq I_2(b_1)$ , per  $b_2 \geq b_1 > 1$ , el límit  $\lim_{b \rightarrow +\infty} I_2(b)$ , existeix i de l'acotació (4) es dedueix que és finit. Així doncs es conclou que la integral  $I_2$  és convergent.

REMARCA 2.2. Veiem que a (4) s'ha fet servir la següent acotació de la funció subintegral:

$$0 \leq \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} \leq \frac{(\ln x)^2}{x^2} \leq \left( \frac{\ln x}{x^{1/4}} \right)^2 \frac{1}{x^{3/2}} \leq \frac{16/e^2}{x^{3/2}}, \quad \text{per tot } x \geq 1$$

on s'ha tingut en compte que  $\sup_{x \geq 1} (x^{-1/4} \ln x)^2 = 16/e^2$ . En efecte, sigui  $h(x) := x^{-1/4} \ln x$ ,  $x > 0$ ; llavors la seva derivada,  $h'(x) = x^{-3/4}(4 - \ln x)/4$  és  $h'(x) > 0$  per  $0 < x < e^4$  mentre que  $h'(x) < 0$  per  $x > e^4 > 1$ . Com que, d'altra banda és  $h(1) = 1 \ln 1 = 0$  i  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1/4} \ln x = 0$ , tenim que  $h(x)$  assoleix el seu màxim absolut a l'interval  $[1, +\infty)$  al punt  $x = e^4$ , on val  $h(e^4) = e^{-1} \ln e^4 = 4/e$ , i. e.:

$$\sup_{x \geq 1} (x^{-1/4} \ln x) = \frac{4}{e} \implies \sup_{x \geq 1} (x^{-1/4} \ln x)^2 = \frac{16}{e^2}.$$

Això completa l'apartat c).▷

4. Siguin  $f_n(x) = \frac{1}{\cosh^n x}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

a) Proveu que la integral  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n$  és convergent, b)  $I_n = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$ , c) Calculeu  $I_n$  per tot  $n = 1, 2, 3, \dots$

◁ **Solució.** a) Podem re-escriure la integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$  com,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^n x} = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^n x} = 2 \int_0^{+\infty} \left( \frac{2}{e^x + e^{-x}} \right)^n dx = 2^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{(1 + e^{-2x})^n} dx, \end{aligned}$$

on hem fet servir que  $\cosh x$  és una funció parella definida en tot  $\mathbb{R}$ . Tenim que la funció subintegral,

$$g_n(x) := \frac{e^{-nx}}{(1 + e^{-2x})^n} \in CT([0, b])$$

per tot  $b > 0$  i amb  $n \in \mathbb{N}$ . Per tant, si definim  $J_n(b) := \int_0^b g_n(x) dx$  amb  $b > 0$ , les integrals impròpies vénen donades pel límits:

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = 2^{n+1} \lim_{b \rightarrow +\infty} J_n(b). \quad (5)$$

Com que d'altra banda:  $g_n(x) \geq 0$  per tot  $x \geq 0$  i tota  $n \in \mathbb{N}$ , les  $J_n(b)$  creixen monotònicament amb  $b$  i els límits en (5) existeixen (per totes les  $n \in \mathbb{N}$ ) però podrien ser  $+\infty$ . Ara bé:

$$J_n(b) = \int_0^b \frac{e^{-nx}}{(1 + e^{-2x})^n} dx \leq \int_0^b e^{-nx} dx = -\frac{1}{n} [e^{-nx}]_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{n} (1 - e^{-nb}) \leq 1,$$

per tot  $b > 0$  i tota  $n = 1, 2, 3, \dots$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Aleshores  $\lim_{b \rightarrow +\infty} J_n(b) < +\infty$  i de (5) es deriva la convergència de les integrals  $I_n$ , per  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Es comprova integrant per parts:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^n x} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^n x} = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{\cosh^{n-2} x} \Rightarrow du = -(n-2) \frac{\sinh x}{\cosh^{n-1} x} dx, \\ dv = \frac{1}{\cosh^2 x} \Rightarrow v = \tanh x \end{array} \right\} \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\tanh x}{\cosh^{n-1} x} \right]_0^b + 2(n-2) \int_0^{+\infty} \frac{\sinh^2 x}{\cosh^n x} dx = 2(n-2) \int_0^{+\infty} \frac{\cosh^2 x - 1}{\cosh^n x} dx \\ &= 2(n-2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^{n-2} x} - 2(n-2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^n x} = (n-2) I_{n-2} - (n-2) I_n \end{aligned}$$

d'on, aïllant  $I_n$  s'obté:  $I_n = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$ , per  $n = 3, 4, \dots$

REMARCA 2.3. En el càlcul de dalt s'ha fet servir que la funció subintegral,  $\cosh^{-n} x$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  és parella, mentre que d'altra banda és immediat que el límit que apareix en fer la integració per parts, i. e.:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\tanh x}{\cosh^{n-1} x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\tanh b}{\cosh^{n-2} b} = 0.$$

c) Càlcul de  $I_n$ . Com que  $\cosh^{-n} x$  és una funció parella i  $CT([0, b])$  per tot  $b > 0$  i per tot  $n \in \mathbb{N}$ , tenim:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh x} = 4 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 4 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx =$$

$$4 \lim_{b \rightarrow +\infty} [\arctan e^x]_0^b = 4 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \arctan e^b - \frac{\pi}{4} \right) = 4 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi,$$

per  $n = 1$ ,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^2 x} =$$

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^2 x} = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{\cosh^2 x} = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} [\tanh x]_0^b = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \tanh b = 2,$$

per  $n = 2$ . A partir d'aquí, amb la fórmula de recurrència probada a l'apartat anterior hom obté,

$$I_1 = \pi, \quad I_2 = 2, \quad I_3 = \frac{\pi}{2}, \quad I_4 = \frac{2}{3} \times 2, \quad I_5 = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 1} \pi = \frac{3!!}{4!!} \pi, \quad I_6 = \frac{4 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 3 \cdot 1} \times 2 = \frac{4!!}{5!!} \times 2,$$

$$I_7 = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} \pi = \frac{5!!}{6!!} \pi, \quad I_8 = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} \times 2 = \frac{6!!}{7!!} \times 2, \quad I_9 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} \pi = \frac{7!!}{8!!} \pi, \dots$$

d'on, per inducció, es comprova d'immediat que:

$$I_{2p} = \frac{(2p-2)!!}{(2p-1)!!} \times 2, \quad I_{2p+1} = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \pi,$$

per  $p = 1, 2, 3, \dots$ , mentre que  $I_1 = \pi$ , tal com ja s'ha obtingut dalt pel càlcul directe.  $\triangleright$

5. Proveu que les integrals

$$A = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx, \quad B = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx, \quad C = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx$$

són convergents i que  $B + C = 2A$ ,  $A - C = B/4$ .

$\triangleleft$  **Solució.** Denotem les funcions subintegrals:

$$f_A(x) := \frac{\ln x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{1}{1+x} f_B(x), \quad f_B(x) := \frac{\ln x}{1-x}, \quad f_C(x) := \frac{\ln x}{1+x},$$

a més veiem que:  $f_A(x) \leq 0$ ,  $f_B(x) \leq 0$ ,  $f_C(x) \leq 0$  per  $0 < x < 1$ ; és a dir, les tres funcions subintegrals són contínues i de signe constant a l'interval  $(0, 1)$ .

Comencem amb la integral  $B$ . Veiem que  $f_B \in CT([b, 1])$  per tot  $0 < b < 1$ , ja que és contínua sobre aquests intervals i el límit,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_B(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f_B(x)}{1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-(1-x))}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(1-x) + R_2(1-x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( -1 + \frac{R_2(1-x)}{1-x} \right) = -1.$$

Per tant  $B_2 := \int_b^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$  és convergent. Per estudiar la convergència prop de  $x = 0$ , i. e., la de la integral

$$B_1 := \int_0^b \frac{\ln x}{1-x} dx, \quad 0 < b < 1,$$

apliquem el criteri de comparació per quocient amb  $g(x) = \ln x$  que és negativa (per tant, de signe constant) a l'interval  $(0, b)$ ,  $0 < b < 1$ . Llavors,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x / (1-x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-x} = 1 \implies \int_0^b \frac{\ln x}{1-x} dx \sim \int_0^b \ln x dx$$

per  $0 < b < 1$ , i com que  $\int_0^b \ln x \, dx$ , és convergent per tot  $b > 0$  (veure exercici 1, apartat (b)), la integral  $B = B_1 + B_2$  es també convergent. Per la integral A tenim:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f_A(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f_B(x)}{1+x} = -\frac{1}{2}.$$

Amb la qual cosa  $A_2 = \int_b^1 f_A(x) \, dx$  amb  $0 < b < 1$  és convergent. D'altra banda, aplicant comparació per quocient:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_A(x)}{f_B(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} = 1 \implies A_1 := \int_0^b f_A(x) \, dx \sim B_1 := \int_0^b f_B(x) \, dx,$$

per tot  $0 < b < 1$ . I com que  $B_1$  és convergent segons ja s'ha vist, també ho és  $A_1$  i en conseqüència la integral  $A = A_1 + A_2$  és convergent.

Per últim la integral  $C$  és també convergent. En efecte, aplicant el criteri del quocient,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_C(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} = 1 \implies \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} \, dx \sim \int_0^1 \ln x \, dx$$

i com ja es va assenyalar dalt,  $\int_0^1 \ln x \, dx$  és convergent:  $\ln x$  és contínua a l'interval  $[\delta, 1]$ , per tot  $0 < \delta < 1$ ; i el límit

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 \ln x \, dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [x \ln x - x]_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (-1 - \delta \ln \delta + \delta) = -1,$$

existeix i és finit; per tant  $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$ .

Així hem provat que les integrals  $A$ ,  $B$  i  $C$  són convergents. A més:

$$B + C = 2 \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} \, dx = 2A,$$

$$A - C = \int_0^1 \frac{x \ln x}{1-x^2} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v. :} \\ t = x^2 \Rightarrow 2x \, dx, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = 1 \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln \sqrt{t}}{1-t} \, dt = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} \, dt = \frac{B}{4} \triangleright$$

**6.** Siguin  $p(x)$ ,  $q(x)$  polinomis de grau  $n$  i  $n+1$  respectivament, amb  $n$  senar i  $q(x) \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Proveu que existeix  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} \, dx$ .

**< Solució.**  $q(x)$  és de grau  $n+1$  parell (ja que  $n$  és senar, segons l'enunciat). El "truquet" en aquest problema consisteix en dividir  $p(x)$  entre  $q'(x)$ :  $p(x) = Aq'(x) + r(x)$ , on  $A = \frac{p_n}{(n+1)q_{n+1}} \neq 0$  i  $r(x)$

és un polinomi de grau  $\leq n+1$ . Així:

$$\int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} \, dx = A \int_{-R}^R \frac{q'(x)}{q(x)} \, dx + \int_{-R}^R \frac{r(x)}{q(x)} \, dx = A \left| \frac{q(x)}{q(x)} \right|_{-R}^R + J_R, \quad \text{on} \quad J_R := \int_{-R}^R \frac{r(x)}{q(x)} \, dx.$$

Ara, com que  $q(x)$  és un polinomi de grau parell:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{q(R)}{q(-R)} = 1 \implies \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)} \, dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} J_R. \quad (6)$$

Si aquest últim límit existeix, com veurem que és el cas. En efecte: sabem que grau  $r(x) \leq n-1$  i grau  $q(x) = n+1$ , tenim que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 r(x)/q(x) \in \mathbb{R}$  (en particular serà 0 quan grau  $r(x) < n-1$ ); així:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{quan grau } r(x) < n-1, \\ \frac{r_{n-1}}{q_{n+1}}, & \text{quan grau } r(x) = n-1. \end{cases}$$

Tenint ara en compte que  $p(x)/q(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  (ja que  $p(x), q(x)$  són polinomis amb  $q(x) \neq 0$  per tot  $x \in \mathbb{R}$ ) i que les integrals

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

són convergents; tenim —pel criteri de Pringsheim-Riemann—, que ho són també les integrals impròpies

$$\int_{-\infty}^0 \frac{r(x)}{q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^0 \frac{r(x)}{q(x)} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{r(x)}{q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{r(x)}{q(x)} dx.$$

Queda clar doncs que el límit

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} J_R &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{r(x)}{q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^0 \frac{r(x)}{q(x)} dx + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{r(x)}{q(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{r(x)}{q(x)} dx + \int_0^{+\infty} \frac{r(x)}{q(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(x)}{q(x)} dx \end{aligned}$$

existeix i en conseqüència (segons (6)), existeix el límit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(x)}{p(x)} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{q(x)}{p(x)} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} J_R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{r(x)}{q(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(x)}{q(x)} dx,$$

com es volia provar.  $\triangleright$

7. (a) Demostreu que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  és convergent.

(b) Estudieu la convergència de  $\int_0^1 x \sin \frac{1}{x} dx$ ,  $\int_1^{+\infty} x \sin \frac{1}{x} dx$ .

(c) Ídem, segons  $\alpha$ , de  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ ,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ .

(d) Ídem, segons  $\alpha, \beta$  de  $\int_0^1 \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha} dx$ ,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha} dx$ .

$\triangleleft$  **Solució.** (a) la funció  $f(x) := \frac{\sin x}{x}$  és contínua per  $x > 0$  i  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ , per tant la funció és

elementalment integrable i la integral  $I_1 := \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  és “pròpia” i llavors, convergent. Per estudiar la seva integral a l'interval  $[1, +\infty)$ , integrem per parts:

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{x}, \quad \text{and then: } u' = -\frac{1}{x^2}, \\ v' = \sin x, \quad \text{and then: } v = -\cos x. \end{array} \right\} = \left[ -\frac{\cos x}{x} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx. \quad (7) \end{aligned}$$

Aquí:

$$\left[ -\frac{\cos x}{x} \right]_1^{+\infty} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{\cos x}{x} \right]_1^K = \cos 1 - \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\cos K}{K} = \cos 1,$$

mentre que la integral:

$$I_3 := \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

és absolutament convergent. En efecte, com que

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \text{ per tot } x \geq 1, \text{ llavors:}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ CONV.} \implies \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \text{ CONV.}$$

(comparació per majorització), d'on resulta que la integral  $I_3$  és (absolutament) convergent. En consqüència  $I_2$  en (7) també ho és i; per últim, com que la integral de l'apartat (a) de l'enunciat és:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, & I_2 &:= \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \\ I &:= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx, & \text{i.e.: } I &:= I_1 + I_2; \end{aligned}$$

queda provada doncs la convergència d'aquesta.

(b) La funció  $g(x) := x \sin \frac{1}{x}$  és elementalment integrable a l'interval  $[0, 1]$ , ja que és contínua a l'interval  $(0, 1)$  i els límits als extrems són

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} x \sin \frac{1}{x} = \sin 1,$$

per tant la integral  $\int_0^1 x \sin \frac{1}{x} dx$  és "pròpia" i així, convergent.

D'altra banda, la funció  $g(x)$  és contínua per  $x \geq 1$  però com que existeix el límit:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1 (\neq 0), \text{ la integral: } \int_1^{+\infty} x \sin \frac{1}{x} dx \text{ és DIV.,}$$

ja que no satisfà la *condició necessària de convergència* de Cauchy.

(c) Per estudiar la primera integral, veiem que per a qualsevol  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la funció  $h(x) := \frac{\sin x}{x^\alpha}$  és contínua per  $x \neq 0$  i positiva per  $0 < x \leq 1$ . Aplicant el criteri de comparació per quocient:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \frac{\sin x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \implies \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}} \text{ CONV.} \Leftrightarrow \alpha < 2,$$

d'on resulta que la integral  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$  també és convergent si, i només si  $\alpha < 2$ .

Per la segona de les integrals de l'apartat (c), procedirem de manera diferent, segons  $\alpha > 0$  ó  $\alpha \leq 0$ . En el primer cas, integrem per parts:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \\ = \left\{ \begin{array}{l} u = x^{-\alpha}, \quad \text{and then: } u' = -\alpha x^{-\alpha-1} \\ v' = \sin x, \quad \text{and then: } v = -\cos x. \end{array} \right\} = \left[ -\frac{\cos x}{x^\alpha} \right]_1^{+\infty} - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{1+\alpha}} dx. \end{aligned}$$

En aquest cas, per  $\alpha > 0$  tenim, d'una banda:

$$\left[ -\frac{\cos x}{x^\alpha} \right]_1^{+\infty} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{\cos x}{x^\alpha} \right]_1^K = \cos 1 - \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\cos K}{K^\alpha} = \cos 1,$$

mentre que per altra part,

$$0 < \frac{|\cos x|}{x^{1+\alpha}} \leq \frac{1}{x^{1+\alpha}}, \text{ per tot } x \geq 1, \text{ llavors; com que la integral } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \text{ és CONV.}$$

( $1 + \alpha > 1$ , donat que  $\alpha > 0$ ); la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^{1+\alpha}} dx \text{ és CONV.; i per tant la integral: } \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{1+\alpha}} dx \text{ és (ABS.) CONV.}$$

Per estudiar la convergència de  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$  quan  $\alpha \leq 0$  considerarem, per  $p \in \mathbb{N}$  ( $p = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$\begin{aligned} \left| \int_{2p\pi}^{(2p+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| &= \frac{1}{\xi_p^\alpha} \left| \int_{2p\pi}^{(2p+1)\pi} \sin x dx \right| \\ &= \frac{1}{\xi_p^\alpha} \int_{2p\pi}^{(2p+1)\pi} \sin x dx = \frac{1}{\xi_p^\alpha} \int_0^\pi \sin x dx \geq 2(2p\pi)^{-\alpha} \geq 2, \end{aligned} \quad (8)$$

on en el segon pas, hem aplicat el teorema del valor mitjà del càlcul integral, per tant:

$$2\pi p \leq \xi_p \leq (2p+1)\pi \implies \xi_p^{-\alpha} \geq (2\pi p)^{-\alpha},$$

per a qualsevol  $\alpha \leq 0$  i per tot  $p = 1, 2, 3, \dots$ . Tenint en compte (8) el Criteri de Cauchy ens assegura que la integral divergeix quan  $\alpha \leq 0$ .

REMARCA 2.4. Aquí apliquem el Criteri de Cauchy amb els quantificadors “canviats”, i. e.: si existeix un nombre positiu  $\varepsilon$  tal que per tot nombre  $M > 0$  és  $\left| \int_{x_1}^{x_2} f \right| \geq \varepsilon$ , per algun perell de valors  $x_1, x_2$ .

Aquí només cal agafar  $\varepsilon = 2$  i aleshores, per un  $M > 0$  donat es pot agafar  $x_1 = 2\pi p$ ,  $x_2 = (2p+1)\pi$ , amb<sup>(1)</sup>  $p = \left\lfloor \frac{M}{2\pi} \right\rfloor + 1$ . Resumint:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ CONV.} \iff \alpha < 2, \quad (9)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ CONV.} \iff \alpha > 0. \quad (10)$$

REMARCA 2.5. De fet, és immediat comprovar (criteri de comparació per majorització) que aquesta última és absolutament convergent per  $\alpha > 1$ . En efecte:

$$0 < \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}, \text{ per tot } x \geq 1; \text{ i com que la integral } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ és CONV. per } \alpha > 1,$$

llavors  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$  és CONV. per  $\alpha > 1$  i, en conseqüència  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$  és (ABS.) CONV. per  $\alpha > 1$ .

(d) Estudiem primer la integral  $I_{\alpha,\beta} := \int_0^1 \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha} dx$ ; analitzant per separat els casos en què  $\beta = 0$ ,  $\beta > 0$  i  $\beta < 0$ .

I) Per  $\beta = 0$ , tenim:

$$I_{\alpha,0} := \int_0^1 \frac{\sin x^0}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\sin 1}{x^\alpha} dx,$$

que és convergent si, i només si  $\alpha < 1$ .

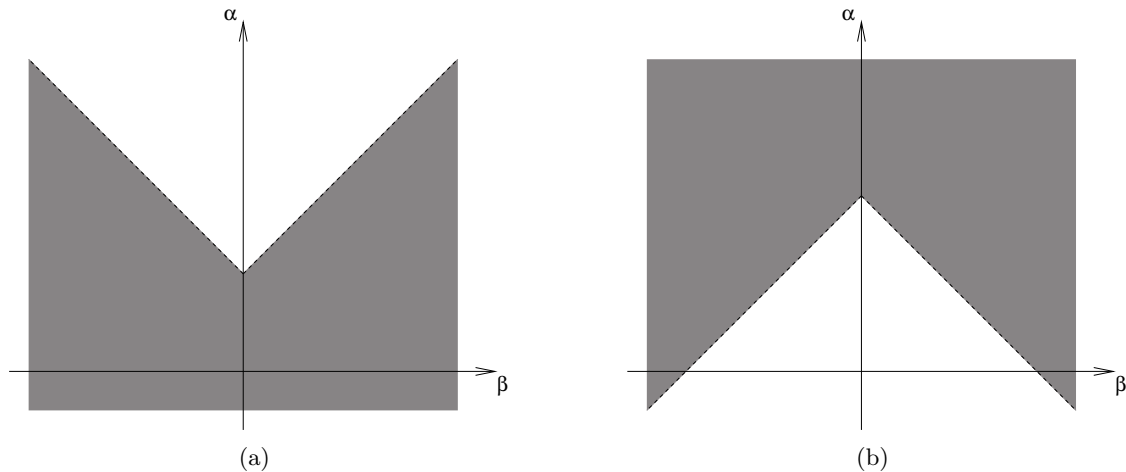
II) Per  $\beta > 0$ :

$$I_{\alpha,\beta} := \int_0^1 \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = x^\beta \implies dx = \frac{1}{\beta} x^{\frac{1-\beta}{\beta}} dt, \\ x = 0 \implies t = 0, \\ x = 1 \implies t = 1. \end{array} \right\} = \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{\sin t}{t^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}} dt, \quad (11)$$

i aplicant les conclusions de l'apartat (c) —veure (9)—, la integral (11) és convergent si, i només si:

$$\frac{\alpha + \beta - 1}{\beta} < 2 \stackrel{(\beta > 0)}{\iff} \alpha + \beta - 1 < 2\beta \iff \alpha < 1 + \beta.$$

<sup>(1)</sup>Aquí  $\lfloor \cdot \rfloor$  representa la funció “part entera”, i. e., per  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lfloor x \rfloor = \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ .



**Figura 1.** (a): Regió de convergència al pla  $(\beta, \alpha)$  de la integral  $I_{\alpha, \beta}$ , donada per  $\mathfrak{C}_{\alpha, \beta}$  definit per (13). (b): Regió de convergència de la integral  $J_{\alpha, \beta}$  al pla  $(\beta, \alpha)$  donada per  $\mathfrak{D}_{\alpha, \beta}$  definit per (14).

III) Per  $\beta < 0$ :

$$I_{\alpha, \beta} := \int_0^1 \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = x^\beta \implies dx = \frac{1}{\beta} x^{\frac{1-\beta}{\beta}} dt, \\ x \rightarrow 0^+ \implies t \rightarrow +\infty, \\ x = 1 \implies t = 1. \end{array} \right\} = -\frac{1}{\beta} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}} dt, \quad (12)$$

Com al cas anterior, aplicant els criteris de l'apartat (c) —veure (10)—, tenim que la integral (12) és convergent si i només si:

$$\frac{\alpha + \beta - 1}{\beta} > 0 \stackrel{(\beta < 0)}{\iff} \alpha + \beta - 1 < 0 \iff \alpha < 1 - \beta.$$

Així doncs, la integral  $I_{\alpha, \beta}$  és convergent a la regió del pla  $(\alpha, \beta)$  definida per

$$\mathfrak{C}_{\alpha, \beta} := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < 1 + |\beta|\}, \quad (13)$$

(veure figura 1(a)).

De manera semblant, per discutir la convergència de la integral  $J_{\alpha, \beta} := \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha} dx$ , també analitzarem per separat els casos  $\beta = 0$ ,  $\beta > 0$  i  $\beta < 0$

I) Per  $\beta = 0$ :

$$J_{\alpha, 0} := \int_0^1 \frac{\sin x^0}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\sin 1}{x^\alpha} dx,$$

que és convergent si, i només si  $\alpha > 1$ .

II) Per  $\beta > 0$ :

$$J_{\alpha, \beta} := \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = x^\beta \implies dx = \frac{1}{\beta} x^{\frac{1-\beta}{\beta}} dt, \\ x = 1 \implies t = 1, \\ x \rightarrow +\infty \implies t \rightarrow +\infty. \end{array} \right\} = \frac{1}{\beta} \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}} dt$$

que és convergent (apartat (c), veure (10)) si, i només si:

$$\frac{\alpha + \beta - 1}{\beta} > 0 \stackrel{(\beta > 0)}{\iff} \alpha + \beta - 1 > 0 \iff \alpha > 1 - \beta.$$

III) Per  $\beta < 0$ :

$$J_{\alpha,\beta} := \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = x^\beta \implies dx = \frac{1}{\beta} x^{\frac{1-\beta}{\beta}} dt, \\ x = 1 \implies t = 1, \\ x \rightarrow +\infty \implies t \rightarrow 0^+. \end{array} \right\} = -\frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{\sin t}{t^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}} dt$$

que és convergent (apartat (c), veure (9)) si, i només si:

$$\frac{\alpha + \beta - 1}{\beta} < 2 \stackrel{(\beta < 0)}{\iff} \alpha + \beta - 1 > 2\beta \iff \alpha > 1 + \beta.$$

Així doncs, la integral  $J_{\alpha,\beta}$  és convergent a la regió del pla  $(\alpha, \beta)$  definida per

$$\mathfrak{D}_{\alpha,\beta} := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > 1 + |\beta|\}, \quad (14)$$

(veure figura 1(b)).  $\triangleright$

8. Estudieu, segons el valor de  $\alpha$ , la convergència de  $\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx$ .

$\triangleleft$  **Solució.** La integral pot ser impròpia en 0 i en 1 (a l'interior de l'interval, és contínua). Mirem cap a on tendeix la funció subintegral quan  $x \rightarrow 1^-$ . De fet:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^\alpha - 1)/\ln x = 0/0$  (indeterminació), però si es calcula el límit del quocient de les derivades del numerador i del denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{D(x^\alpha - 1)}{D \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \alpha x^\alpha = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} = \alpha$$

(regla de L'Hôpital). Veiem doncs que la integral no és impròpia en  $x = 1$  per cap valor de  $\alpha$ . En canvi, el comportament de la funció subintegral prop de  $x = 0$ , depèn del valor de  $\alpha$ . En efecte:

- Per  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha - 1)/\ln x = 0$ .
- Per  $\alpha = 0$  la funció subintegral pren el valor constant 0 a l'interval  $(0, 1)$ , i per tant el seu límit quan  $x \rightarrow 0^+$  és també 0.
- Per  $\alpha < 0$  resulta la indeterminació  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha - 1)/\ln x = -\infty/\infty$ . En canvi, el quocient de derivades:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{D(x^\alpha - 1)}{D(\ln x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha x^\alpha = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} = -\infty$$

(per la regla de L'Hôpital). Llavors, la integral només és impròpia en  $x = 0$  i quan  $\alpha < 0$ . D'altra banda observem que:

$$\frac{x^\alpha - 1}{\ln x} = \frac{x^\alpha}{\ln x} (1 - x^{-\alpha}),$$

i com que  $(1 - x^{-\alpha}) \rightarrow 1$  quan  $x \rightarrow 0^+$  per  $\alpha < 0$ , veiem que hi haurà prou amb estudiar, per exemple, la convergència de la integral

$$\int_0^{1/e} \frac{x^\alpha}{\ln x} dx, \quad (15)$$

en el sentit de què, per  $\alpha < 0$ , la integral de l'enunciat serà convergent si i només si la integral de dalt ho és.<sup>(2)</sup>

<sup>(2)</sup>En efecte, posant:

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx = \int_0^{1/e} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx + \int_{1/e}^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx;$$

la segona és convergent (de fet, la funció subintegral és elementalment integrable), mentre que per la segona, es pot aplicar comparació per quocient amb  $x^\alpha/\ln x$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^\alpha - 1)/\ln x}{x^\alpha/\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x^{-\alpha}) = 1$$

quan  $\alpha < 0$ ; i remarquem que  $(x^\alpha - 1)/\ln x$  i  $x^\alpha/\ln x$  són de signe constant [negatiu], a l'interval  $(0, 1)$ , i obviant també a l'interval  $(0, 1/e) \subset (0, 1)$ .

Per estudiar la convergència de la integral (15) farem el canvi de variable  $x = e^{-t}$ :

$$\int_0^{1/e} \frac{x^\alpha}{\ln x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v. :} \\ t = -\ln x \Rightarrow dx = -e^{-t} dt, \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow +\infty, \\ x = 1/e \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} = - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(\alpha+1)t}}{t} dt. \quad (16)$$

Estudiarem la convergència d'aquesta última integral per  $\alpha < 0$ . Es distingeixen els casos següents:

- Per  $\alpha < -1$  és  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\alpha+1)t}/t = +\infty$  i no es satisfà la condició necessària de Cauchy, amb la qual cosa la integral (16) és divergent i en conseqüència la (15) també divergeix.
- Per  $\alpha = -1$  la integral (16) es redueix a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = +\infty,$$

que és igualment divergent, la qual cosa implica que la (16) també divergeix.

- En canvi, per  $-1 < \alpha < 0$  es té:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \frac{e^{-(\alpha+1)t}}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-(\alpha+1)t} = 0.$$

I com que  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1$  és convergent, el criteri de comparació per quocient ens permet establir la convergència de la integral (16), i d'aquí la de la integral (15).

Finalment, es conclou que la integral  $\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx$  és convergent si i només si  $\alpha > -1$ .  $\triangleright$

9. Estudieu, segons el valor de  $\alpha$  i  $\beta$ , la convergència de

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } I_1 = \int_1^e x^\alpha (\ln x)^\beta dx, & \text{(b) } I_2 = \int_e^{+\infty} x^\alpha (\ln x)^\beta dx, \\ \text{(c) } I_3 = \int_0^1 x^\alpha |\ln x|^\beta dx, & \text{(d) } I_4 = \int_0^{+\infty} x^\alpha |\ln x|^\beta dx. \end{array}$$

$\triangleleft$  **Solució.** a) Per  $\beta > 0$  no és impròpia mentre que per  $\beta < 0$  és no acotada prop de  $x = 1$ . Com que  $x^\alpha (\ln x)^\beta > 0$  per  $1 < x < e$ , podem aplicar el criteri de Riemann:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{-\beta} x^\alpha (\ln x)^\beta = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^\alpha \left( \frac{\ln x}{x-1} \right)^\beta = 1,$$

per  $\alpha, \beta$  qualssevol. Per tant,

$$\int_1^e \frac{dx}{(x-1)^{-\beta}} \sim \int_1^e x^\alpha (\ln x)^\beta dx$$

i com que la de l'esquerra és convergent si i només si  $\beta > -1$  tindrem que

$$I_1 = \int_1^e x^\alpha (\ln x)^\beta dx \text{ conv.} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in \mathfrak{C}_1 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta > -1\}. \quad (17)$$

A l'apartat b), per estudiar la convergència de la integral  $I_2$ , introduïrem el canvi de variable  $t = \ln x$ :

$$\int_e^{+\infty} x^\alpha (\ln x)^\beta dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v. :} \\ t = \ln x \Rightarrow dx = e^t dt, \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty, \\ x = e \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} = \int_1^{+\infty} t^\beta e^{(\alpha+1)t} dt. \quad (18)$$

Aleshores:

- Si  $\alpha > -1$  és  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\beta e^{(\alpha+1)t} = +\infty$  per tot  $\beta \in \mathbb{R}$ : no es satisfà la condició necessària de Cauchy i la integral (18) divergeix per qualsevol valor de  $\beta$ , i per tant, també la integral  $I_2$  divergeix per qualsevol  $\beta$  quan  $\alpha > -1$ .

- Si  $\alpha = -1$ , la integral (18) es redueix a

$$\int_1^{+\infty} t^\beta dt;$$

que és convergent si i només si  $\beta < -1$ ; la qual cosa implica que, quan  $\alpha = -1$ ,  $I_2$  convergeix si i només si  $\beta < -1$ .

- Si  $\alpha < -1$ , com que  $t^\beta e^{(\alpha+1)t} > 0$  per  $t > 0$ , podem aplicar comparació per quocient, per exemple amb  $1/t^2$ , donat que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 t^\beta e^{(\alpha+1)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{2+\beta} e^{(\alpha+1)t} = 0$$

per tot  $\beta$ . Llavors, per  $\alpha < -1$ :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ conv.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} t^\beta e^{(\alpha+1)t} dt \text{ conv.} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow I_2 \text{ CONV.} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

D'aquesta manera:

$$I_2 \text{ CONV.} \iff (\alpha, \beta) \in \mathfrak{C}_2 := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < -1\} \cup \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = -1, \beta < -1\}. \quad (19)$$

D'altra banda, per l'apartat c) és convenient el canvi:  $t = -\ln x$ . En efecte,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 x^\alpha |\ln x|^\beta dx = \int_0^1 x^\alpha (-\ln x)^\beta dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v. :} \\ t = -\ln x \Rightarrow dx = -e^{-t} dt, \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow +\infty, \\ x = 1 \Rightarrow t = 0. \end{array} \right\} = \\ &= \int_0^\infty t^\beta e^{-(\alpha+1)t} dt = \int_0^1 t^\beta e^{-(\alpha+1)t} dt + \int_1^\infty t^\beta e^{-(\alpha+1)t} dt = I_{3,1} + I_{3,2}. \end{aligned}$$

Primer de tot, és clar que:

$$I_{3,1} := \int_0^1 t^\beta e^{-(\alpha+1)t} dt \sim \int_0^1 \frac{dt}{t^{-\beta}}$$

d'on es dedueix que  $I_{3,1}$  és convergent si i només si  $\beta > -1$  (per qualsevol  $\alpha$ ). D'altra banda, per la integral

$$I_{3,2} := \int_1^{+\infty} t^\beta e^{-(\alpha+1)t} dt$$

es té:

- Per  $\alpha = -1$ :  $I_{3,2} = \int_1^{+\infty} t^\beta$ , que és convergent si i només si  $\beta < -1$ .
- Per  $\alpha > -1$ , com que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 t^\beta e^{-(\alpha+1)t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{2+\beta} e^{-(\alpha+1)t} = 0$ ; de l'aplicació del criteri de comparació per quocient resulta que, si  $\alpha > -1$ :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ conv.} \Rightarrow \int_1^{+\infty} t^\beta e^{-(\alpha+1)t} dt \text{ conv.} \quad (\text{per qualsevol } \beta).$$

- Per  $\alpha < -1$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\beta e^{-(\alpha+1)t} = +\infty$  per qualsevol  $\beta \in \mathbb{R}$ . Llavors la integral  $I_{3,2}$  divergeix per qualsevol  $\beta$  quan  $\alpha < -1$ .

De tot això, es conclou:

$$I_3 \text{ CONV.} \iff (\alpha, \beta) \in \mathfrak{C}_3, \quad (20)$$

essent:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_3 &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta > -1\} \cap (\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = -1, \beta < -1\} \cup \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > -1\}) \\ &= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > -1, \beta > -1\}. \end{aligned}$$

Finalment, la integral  $I_4$  del l'apartat d) es pot posar com:

$$I_4 = \int_0^1 x^\alpha |\ln x|^\beta dx + \int_1^e x^\alpha (\ln x)^\beta dx + \int_e^{+\infty} x^\alpha (\ln x)^\beta dx = I_1 + I_2 + I_3$$

d'on es segueix —tenint en compte (17), (19) i (20)— que:

$$I_4 \text{ CONV.} \iff (\alpha, \beta) \in \mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2 \cap \mathfrak{C}_3$$

però es comprova d'immediat que  $\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2 \cap \mathfrak{C}_3 = \emptyset$  (per exemple, en  $\mathfrak{C}_2$ ,  $\alpha \leq -1$ , mentre que en  $\mathfrak{C}_3$ ,  $\alpha > -1$  i per tant els tres conjunts no poden tenir cap element comú).  $\triangleright$

10. Estudieu, segons els valors de  $\alpha$  i  $\beta$ , la convergència de

$$\int_a^b (b-x)^\alpha |\ln(b-x)|^\beta dx, \quad a < b.$$

$\triangleleft$  **Solució.** Considerem el canvi de variable  $t = b - x$ . Tenim

$$\int_a^b (b-x)^\alpha |\ln(b-x)|^\beta dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = b - x \implies dx = -dt, \\ x = a \implies t = b - a, \\ x = b \implies t = 0. \end{array} \right\} = \int_0^{b-a} t^\alpha |\ln t|^\beta dt. \quad (21)$$

A partir d'aquesta última integral, estudiarem per separat els casos en què  $0 < b-a < 1$ ,  $0 < b-a = 1$  i  $b-a > 1$ . Així:

I) Suposarem que  $0 < b-a < 1$ . Llavors:

$$\begin{aligned} \int_0^{b-a} t^\alpha |\ln t|^\beta dt &= \int_0^{b-a} t^\alpha (-\ln t)^\beta dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ u = -\ln t (\iff t = e^{-u}) \implies dt = -du, \\ 0 < t = b-a < 1 \implies u = -\ln(b-a) > 0, \\ t \rightarrow 0^+ \implies u \rightarrow +\infty. \end{array} \right\} = \int_{-\ln(b-a)}^{+\infty} u^\beta e^{-(1+\alpha)u} du \end{aligned}$$

i és immediat comprovar que:

$$\int_{-\ln(b-a)}^{+\infty} u^\beta e^{-(1+\alpha)u} du \text{ CONV.} \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha > -1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \\ \text{or} \\ \alpha = -1, \beta < -1 \end{array} \right\}.$$

En efecte, definim  $\sigma = -\ln(b-a)$  ( $> 0$ , quan  $0 < b-a < 1$ ). Per  $\alpha > -1$  és  $1 + \alpha > 0$ . D'altra banda, la funció subintegral,  $u^\beta e^{-(1+\alpha)u} > 0$ , per  $u > 0$  i a més

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 u^\beta e^{-(1+\alpha)u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{2+\beta} e^{-(1+\alpha)u} = 0,$$

per tot  $\beta \in \mathbb{R}^2$ .

II) Quan  $0 < b-a = 1$  la integral (21) queda:

$$\int_0^{b-a} t^\alpha |\ln t|^\beta dt = \int_0^1 t^\alpha |\ln t|^\beta dt \text{ CONV.} \iff \alpha > -1 \text{ i } \beta > -1$$

(vegeu el problema 9, apartat (c)).