

# Integrals Pròpies.

## Integració Elemental sobre Intervalls Compactes

### Problemes

1. Calculeu

$$(a) \int_0^1 x^2 e^x dx, \quad (b) \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (c) \int_0^{2\pi} \sin^3 x dx.$$

◁ **Solució.**

a) Fem la primera integrant per parts dos cops:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^x dx &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x, \\ g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x. \end{array} \right\} = [2xe^x]_{x=0}^{x=1} - 2 \int_0^1 xe^x dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1, \\ g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x. \end{array} \right\} = [x^2 e^x]_{x=0}^{x=1} - 2 [xe^x]_{x=0}^{x=1} + 2 \int_0^1 e^x dx \\ &= e^1 - 0 - 2e^1 + 0 + 2e^1 - 2 = \boxed{e - 2} \end{aligned}$$

b)  $F(x) = \arcsin x$  és una primitiva de la funció subintegral  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  a l'interval  $(-1, 1)$  i  $[0, 1/2] \subset (-1, 1)$ . Per tant, podem directament aplicar Barrow:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{x=0}^{x=1/2} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

c) Posant:  $f(x) = \sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$ , podem fàcilment trobar una primitiva i de nou aplicar Barrow

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x dx = \int_0^{2\pi} \sin x(1 - \cos^2 x) dx = [-\cos x]_{x=0}^{x=2\pi} + \left[ \frac{\cos^3 x}{3} \right]_{x=0}^{x=2\pi} = -1 + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{0}$$

REMARCA 1. Aplicant els resultats del problemes 3 i 5, es pot veure directament que:

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x dx = 0.$$

2. Verifiqueu si  $F(x) = -x\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$  és una primitiva de  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)x^2}}$ . Calculeu la integral

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)x^2}}$$

◁ **Solució.**  $F$  està definida a l'interval  $(-1, 1)$  i, de fet, la podem expressar com:

$$F(x) = -\frac{x}{|x|} \sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{per } -1 < x < 0, \\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{per } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Veiem doncs que és contínua i derivable a  $(-1, 0) \cup (0, 1)$ , mentre que té una discontinuïtat de salt a l'origen, on:  $F(0^\pm) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} F(x) = \mp 1$ . La seva derivada val

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{per } -1 < x < 0, \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{per } 0 < x < 1. \end{cases}$$

o, equivalentment

$$F'(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)x^2}} = f(x) \quad \forall x \in (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

Per tant  $F$  no és una primitiva de la funció donada,  $f$ , a tot l'interval  $(-1, 1)$  sinó només a  $(-1, 0) \cup (0, 1)$ . Per calcular la seva integral a  $[-1/2, 1/2]$  caldrà doncs separar-la en dos "trossos" i aplicar la Regla de Barrow a cada subinterval, i. e.:

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)x^2}} &= \int_{-1/2}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)x^2}} + \int_0^{1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)x^2}} = F(0^-) - F(-1/2) + F(1/2) - F(0^+) \\ &= 1 - \sqrt{1 - (-1/2)^2} + \left( -\sqrt{1 - (1/2)^2} \right) - (-1) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{2 - \sqrt{3}}. \triangleright \end{aligned}$$

REMARCA 2. Fixem-nos que l'aplicació de la regla de Barrow "directament" sobre tot l'interval produïria:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)x^2}} = F(1/2) - F(-1/2) = -\sqrt{1 - (1/2)^2} - \sqrt{1 - (-1/2)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} (< 0),$$

resultat que, clarament, és incorrecte.

**3.** Sigui  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , contínua. Proveu que

a) Si  $f$  és parell  $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$ .

b)  $f$  és senar  $\int_{-a}^a f = 0$ .

◁ **Solució.** Només cal tenir en compte que

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

i, a la primera integral, fer el canvi de variable  $x = \varphi(t)$ ,  $\varphi : [0, a] \rightarrow [-a, 0]$  amb  $\varphi(t) = -t$ . Llavors:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(0)} f(x) dx = \int_a^0 f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt.$$

Aleshores:

a) Si  $f$  és parell,  $f(-t) = f(t)$ , i

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

b) En canvi, si  $f$  és senar,  $f(-t) = -f(t)$ , i

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt - \int_0^a f(x) dx = 0. \triangleright$$

REMARCA 3. Notem que, a la integral definida, la variable respecte de la qual integrem es pot canviar sense afectar el valor de la integral, i. e.:

$$\int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f,$$

clàssicament es diu que les variables d'integració són variables *mudes* (*dumb variables*).

4. Sigui  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua i periòdica de període  $T$ . Proveu que

a)  $\int_a^{a+T} f$  no depèn de  $a$ .

b) Si  $f$  és senar  $F(x) = \int_a^x f$  és periòdica de període  $T$ .

◁ **Solució.** (a) Definim la funció:

$$a \in \mathbb{R} \mapsto G(a) := \int_a^{a+T} f \in \mathbb{R}.$$

Com que  $f$  és contínua en  $\mathbb{R}$  i  $\Psi(a) := a + T$ ,  $\varphi(a) = a$  són derivables en  $\mathbb{R}$ , la regla de Leibnitz ens assegura que  $F$  és derivable en  $\mathbb{R}$  i  $G'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$  per tot  $a \in \mathbb{R}$ , ja que  $f$  és  $T$ -periòdica. Llavors, com que  $G' = 0$  en  $\mathbb{R}$ ,  $G$  és constant en  $\mathbb{R}$  i així la integral no depèn de  $a$ .

(b) Ara suposem que  $a$  més,  $f$  és senar. Definim,  $F(x) := \int_a^x f$ . Per veure que  $F$  és periòdica, calcularem

$$\begin{aligned} F(x+T) - F(x) &= \int_a^{x+T} f - \int_a^x f = \int_a^x f + \int_x^{x+T} f - \int_a^x f = \int_x^{x+T} f \\ &\stackrel{x=-T/2}{=} \int_{-T/2}^{-T/2+T} f = \int_{-T/2}^{T/2} f = 0, \end{aligned}$$

per tot  $x \in \mathbb{R}$ , d'on  $F(x+T) = F(x)$  per tot  $x \in \mathbb{R}$  i d'aquí resulta la periodicitat de  $F$ .  $\triangleright$

REMARCA 4. Notem que s'ha fet servir el resultat de l'apartat anterior. Així, com que la integral no depèn de  $x$ , podem prendre  $x = -T/2$  per calcular el seu valor i aleshores,

$$\int_x^{x+T} f = \int_{-T/2}^{T/2} f.$$

A continuació, es fa servir que  $f$  és senar i s'aplica el resultat del problema 3, apartat (b).

5. Proveu que si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  és contínua,

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$$

(Ajut: per a la primera igualtat feu el canvi de variable  $x = \pi - t$ ).

Apliqueu-ho a la integral

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

◁ **Solució.** Aplicarem el canvi de variable que ens suggereix l'enunciat:

$$I = \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v. :} \\ x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt, \\ x = \pi \Rightarrow t = 0, \\ x = 0 \Rightarrow t = \pi. \end{array} \right\} = - \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t) dt$$

$$= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t) dt = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi t f(\sin t) dt.$$

D'aquí  $2I = \pi \int_0^\pi f(\sin x) dx$  i llavors:

$$I = \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

Això prova la primera part de la igualtat. A continuació, descomposem:

$$\int_0^\pi f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx + \int_{\pi/2}^\pi f(\sin x) dx$$

i a la segona li apliquem el mateix canvi de variable:

$$\int_{\pi/2}^\pi f(\sin x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v. :} \\ x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt, \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \\ x = \pi \Rightarrow t = 0. \end{array} \right\} = - \int_{\pi/2}^0 f(\sin t) dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx.$$

I d'aquí s'arriba al resultat desitjat. Aplicació; observem primer que:

$$\frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} = \frac{x \sin x}{1 + 1 - \sin^2 x} = \frac{x \sin x}{2 - \sin^2 x} = x f(\sin x),$$

amb  $f(t) = \frac{t}{2 - t^2}$ . Resulta llavors:

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = [-\pi \arctan(\cos x)]_0^{\pi/2}$$

$$= \pi \arctan 1 = \frac{\pi^2}{4}. \triangleright$$

6. Calculeu  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3 \sin x}$ .

◁ **Solució.** Aplicant primer el resultat del problema 7.6, apartat (b) amb  $a = -\pi$  es té:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3 \sin x} = \int_{-\pi}^\pi \frac{dx}{5 - 3 \sin x}$$

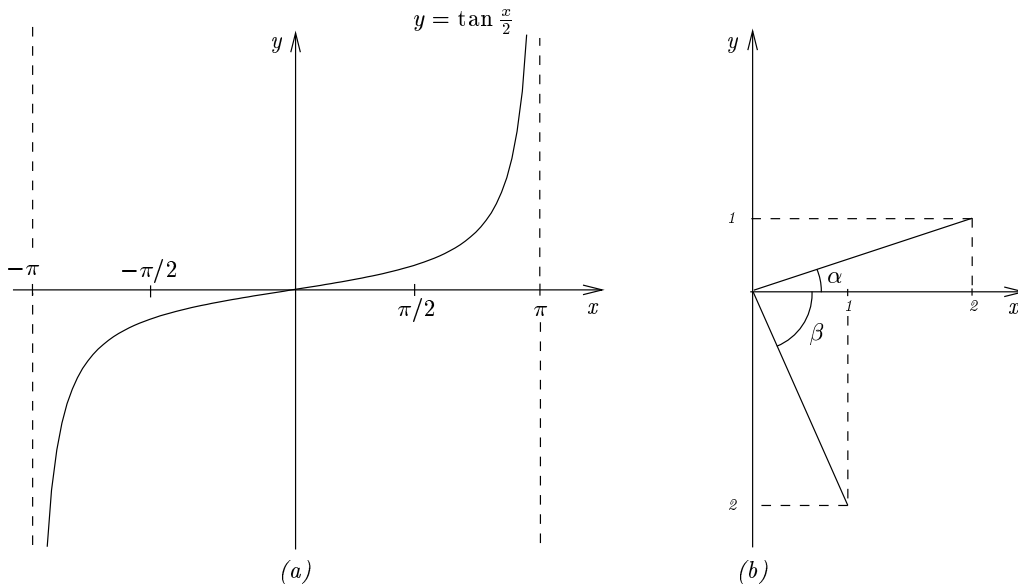
i a continuació, fer el canvi de variable:

$$x = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Però llavors quadaria:

$$\int_{-\pi}^\pi \frac{dx}{5 - 3 \sin x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5 - \frac{6t}{1+t^2}} dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{2dt}{5t^2 - 6t + 5},$$

ja que  $\tan \frac{x}{2} \rightarrow \pm\infty$  quan  $x \rightarrow \pm\pi^\mp$  (vegeu figura 1, esquerra). Arribem doncs a una integral sobre un interval no acotat. Aquestes integrals *impròpies* les estudiarem al tema 8. De moment, per evitar



**Figura 1.** (a) gràfica de la funció  $y = \tan \frac{x}{2}$  es té que  $\tan \frac{x}{2} \rightarrow \infty$  quan  $x \rightarrow \pi^-$  i  $\tan \frac{x}{2} \rightarrow -\infty$  quan  $x \rightarrow -\pi^-$ . (b)  $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \arctan(-2)$  i per tant  $\arctan \frac{1}{2} - \arctan(-2) = \arctan \alpha - \arctan \beta = \frac{\pi}{2}$ .

això, farem ús dels resultats del problema 7.7 (la segona part de la igualtat) de la manera següent. Posem:

$$I_1 + I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5 - 3 \sin x},$$

amb

$$I_1 = \int_{-\pi}^0 \frac{dx}{5 - 3 \sin x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ x = -t \Rightarrow dx = -dt \\ x = -\pi \Rightarrow t = \pi \\ x = 0 \Rightarrow t = 0. \end{array} \right\} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{5 + 3 \sin t}$$

$$\stackrel{\text{prob.5}}{=} 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{5 + 3 \sin t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = -x \Rightarrow dt = -dx \\ t = \pi/2 \Rightarrow x = -\pi/2 \\ t = 0 \Rightarrow x = 0. \end{array} \right\} = \int_{-\pi/2}^0 \frac{dx}{5 - 3 \sin x},$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{5 - 3 \sin x} \stackrel{\text{prob.5}}{=} 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 - 3 \sin x}.$$

Ara, finalment:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5 - 3 \sin x} = I_1 + I_2 = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{5 - 3 \sin x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = \tan \frac{x}{2}, \dots \\ x = \pi/2 \Rightarrow t = 1, \\ x = -\pi/2 \Rightarrow t = -1. \end{array} \right\}$$

$$= 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{5t^2 - 6t + 5} = \int_{-1}^1 \frac{\frac{5}{4} dt}{1 + \left(\frac{5t+3}{4}\right)^2}$$

$$= \left[ \arctan \left( \frac{5t+3}{4} \right) \right]_{-1}^1 = \arctan \frac{1}{2} - \arctan(-2) = \frac{\pi}{2}.$$

(veure figura 1, dreta).>

7. Sigui  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Proveu que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

◁ **Solució.** Només cal considerar el canvi de variable  $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$  amb  $x = \varphi(t) := a + b - t$ . Llavors:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x) dx = \int_b^a f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = - \int_b^a f(a+b-t) dt = \int_a^b f(a+b-t) dt. \triangleright$$

8. Proveu que  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}$ .

◁ **Solució.** Considerarem el canvi  $\varphi : [0, \pi/2] \rightarrow [0, \pi/2]$  donat per  $\varphi(t) = \pi/2 - t$ . Aleshores,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v. (a la 2ª integral):} \\ x = \pi/2 - t \Rightarrow dx = -dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = \pi/2, \\ x = \pi/2 \Rightarrow t = 0. \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \\ &\quad - \int_{\pi/2}^0 \frac{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}}{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2} - t)} + \sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\sin t} + \sqrt{\cos t}} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}. \triangleright \end{aligned}$$

9. Proveu la identitat  $\int_{1/e}^{\tan x} \frac{t}{1+t^2} dt + \int_{1/e}^{\cot x} \frac{1}{t(1+t^2)} dt, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

◁ **Solució.** Definim d'una banda:

$$H(x) := \int_{1/e}^{\tan x} \frac{t}{1+t^2} dt + \int_{1/e}^{\cot x} \frac{1}{t(1+t^2)} dt, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

i de l'altra:

$$F(x) := \int_{1/e}^x \frac{t}{1+t^2} dt, \quad G(x) := \int_{1/e}^x \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

Clarament  $H(x) = F(\tan x) + G(\cot x)$ . Pel teorema fonamental del càlcul  $F$  i  $G$  són  $C^1$  en qualsevol interval compacte contingut en  $(0, +\infty)$ , i per tant en  $(0, \pi/2)$ ; mentre que  $\tan x$  i  $\cot x$  prenen valors en  $(0, +\infty)$  quan  $x \in (0, \pi/2)$ , on a més són derivables.

En conclusió,  $F, G$  (i aleshores  $H$ ) són  $C^1$  en  $(0, \pi/2)$ . Així, aplicant primer la regla de la cadena i després el teorema fonamental del càlcul s'obté:

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(\tan x)D(\tan x) + G'(\cot x)D(\cot x) \\ &= \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}(1+\tan^2 x) - \frac{1}{\cot x(1+\cot^2 x)}(1+\cot^2 x) = \tan x - \frac{1}{\cot x} = 0, \end{aligned}$$

per tot  $0 < x < \pi/2$ , la qual cosa implica que  $H(x)$  és constant a l'interval  $(0, \pi/2)$ . Aleshores:

$$\begin{aligned} H(x) = H\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \int_{1/e}^1 \frac{t \, dt}{1+t^2} + \int_{1/e}^1 \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int_{1/e}^1 \frac{t^2+1}{t(1+t^2)} \, dt \\ &= [\ln|t|]_{t=1/e}^{t=1} = \ln 1 - \ln \frac{1}{e} = \ln e = 1, \end{aligned}$$

per tot  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . ▷

**10.** Sigui  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua. Proveu que si  $\int_a^b f \cdot g = 0$  per tota  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, llavors  $f = 0$ .

◁ **Solució.** Suposem que fos fals, llavors existiria  $\xi \in [a, b]$  amb  $f(\xi) \neq 0$ . D'altra banda, com que  $\int_a^b fg = 0$ , en particular també:  $\int_a^b f^2 = 0$ , però  $f$  és contínua a l'interval  $[a, b]$  i  $f(\xi) \neq 0$  amb  $\xi \in [a, b]$ . D'aquí, aplicant la definició de continuïtat a  $f^2$  al punt  $x = \xi$  es segueix que hi ha un  $\delta > 0$  t. q.:

$$f^2(x) \geq \frac{2}{\delta} f^2(\xi) > 0,$$

amb  $a \leq \xi \leq b$ . Ara:

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(x) \, dx &= \int_a^{\xi-\delta} f^2(x) \, dx + \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f^2(x) \, dx + \int_{\xi+\delta}^b f^2(x) \, dx \\ &\geq \frac{1}{2} f^2(\xi) \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} 1 \, dx = \delta f^2(\xi) > 0, \end{aligned}$$

(contradicció). ▷

**11.** Trobeu l'àrea limitada per la corba  $y^2 = x^2 - x^4$ .

◁ **Solució.** L'àrea vindrà donada per  $A = 4 \int_0^1 |x| \sqrt{1-x^2} \, dx$ , i calculant la integral s'obté:

$$I = \int_0^1 |x| \sqrt{1-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x(1-x^2)^{1/2} \, dx = -\frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \implies \boxed{A = 4I = \frac{4}{3}}$$

Veure figura 2 ▷

**12.** Sigui  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donada per  $F(x) = \int_{227}^x \frac{dt}{1+t^6}$ . Calculeu  $F'$ .

◁ **Solució.** Notem que la funció subintegral

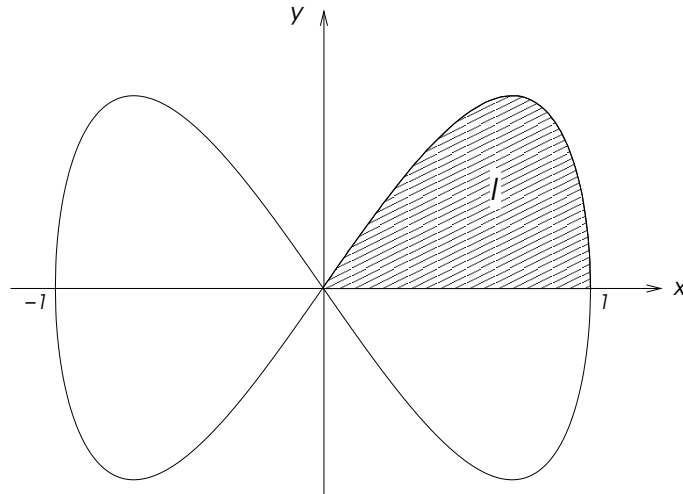
$$f(t) = \frac{1}{1+t^6},$$

és contínua en tot  $\mathbb{R}$ , ja que  $1+t^6 \neq 0$ , per tot  $t \in \mathbb{R}$  (en particular, és  $C^\infty$ ). Així, aplicant el teorema fonamental del càlcul tindrem que  $F'(x) = \frac{1}{1+x^6} = f(x)$ , per tot  $x \in \mathbb{R}$ . ▷

**13.** Proveu que  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donada per

$$F(x) = \int_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2} \, dt$$

és de classe  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$ .



**Figura 2.** corba  $y^2 = x^2 - x^4$ . L'àrea sombrejada és la integral  $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$ .

◁ **Solució.** Notem que  $f(t) = \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}$  és  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}$ , ja que és un quocient de polinomis on el denominador no s'anul·la per cap valor de  $t \in \mathbb{R}$  (és  $t^2 + t + 1 > 0$ , per tot  $t \in \mathbb{R}$ ). Com que, pel teorema fonamental del càlcul és  $F' = f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , es segueix d'immediat que  $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ . ▷

14. Siguin  $f, g \in C[a, b]$ . Proveu que  $\exists \xi \in (a, b)$  t. q.:  $f(\xi) \int_a^b g - g(\xi) \int_a^b f = 0$ .

◁ **Solució.** Sigui  $h(x) = f(x) \int_a^b g - g(x) \int_a^b f$ , obviament  $h \in C[a, b]$  i sigui:

$$H(x) = \int_a^x f(t) dt \int_a^b g(s) ds - \int_a^x g(t) dt \int_a^b f(s) ds,$$

la seva funció integral. A continuació, considerem el lema de Rolle:

LEMMA 1.1 (Lema de Rolle). *Sigui  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, derivable en  $(a, b)$  i tal que  $f(a) = f(b)$ . Aleshores existeix  $\xi \in (a, b)$  on la derivada s'anul·la, i. e., per al qual  $f'(\xi) = 0$ .*

D'una banda, pel teorema fonamental del càlcul és:  $H \in C^1[a, b]$  i  $H' = h$  i per l'altra, es comprova d'immediat que  $H(a) = H(b) (= 0)$ . Queda clar doncs que  $H$  satisfà les hipòtesis del lema 1.1 i per tant, hi haurà un punt,  $\xi \in (a, b)$ , pel qual  $H'(\xi) = 0$ . D'aquí, finalment es dedueix:

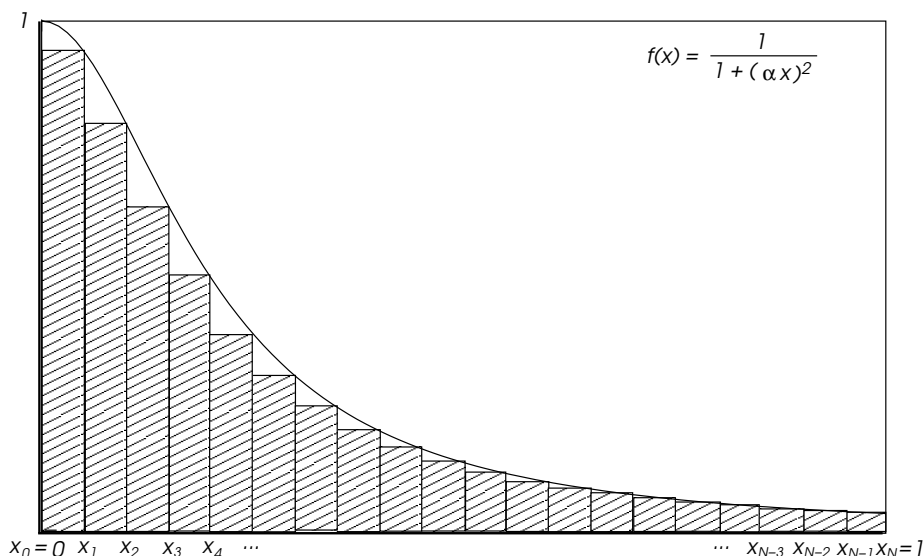
$$H'(\xi) = h(\xi) = f(\xi) \int_a^b g - g(\xi) \int_a^b f = 0 \implies f(\xi) \int_a^b g = g(\xi) \int_a^b f,$$

que és el resultat buscat. ▷

15. Essent  $f(x) = \int_{x^2}^{e^x} \frac{\ln t}{t} dt$ , calculeu la derivada  $f'(3)$ .

◁ **Solució.** Com que  $f(t) = \frac{\ln t}{t}$  és contínua per tot  $x^2 \leq t \leq e^x$ , amb  $x \geq \delta$  per  $\delta > 0$  qualsevol i  $\phi(x) = x^2$ ,  $\psi(x) = e^x$  són derivables en  $\mathbb{R}$ ; podem aplicar la regla de Leibnitz:

$$f'(x) = e^x \frac{\ln e^x}{e^x} - 2x \frac{\ln x^2}{x^2} = x - \frac{4 \ln |x|}{x}$$



**Figura 3.** Aproximació de la integral  $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+\alpha^2 x^2}$  per rectangles. La proposició 1.2 estableix que —quan la funció subintegral és contínua a l’interval—, l’aproximació convergeix cap a la integral en fer tendir el nombre de rectangles (i. e., de subintervalls),  $N \rightarrow \infty$ .

per  $x \geq \delta$  amb  $\delta > 0$  qualsevol. D’on, per  $x = 3$ , s’obté:

$$f'(3) = 3 - \frac{4 \ln 3}{3} \approx 1.535 \dots \triangleright$$

**16.** Calculeu el límit de la successió

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + \dots + \frac{1}{2p}.$$

◁ **Solució.** Recordem la proposició següent:

**PROPOSICIÓ 1.2.** *que si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  és contínua, donat  $\varepsilon > 0$  qualsevol, existeix  $\delta > 0$  tal que, per tota partició de l’interval:  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_p = b$ , tal que  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i < \delta$ , per tot  $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  i per  $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$  qualssevol, amb  $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ ; es satisfà:*

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) \, \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

La qual cosa implica que:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p-1} f(t_i) \, \Delta x_i. \tag{1}$$

Aplicant això a la successió de l’enunciat:

$$\lim_p \left( \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + \dots + \frac{1}{2p} \right) = \lim_p \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{i+1}{p}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)|_0^1 = \ln 2,$$

on s’ha agafat  $\Delta x_i = \frac{1}{p}$ , per tot  $i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$  i  $t_i = \frac{i+1}{p}$ , per a cada  $i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ .  $\triangleright$

17. Calculeu el límit de la successió

$$p \left( \frac{1}{p^2 + \alpha^2} + \frac{1}{p^2 + 4\alpha^2} + \frac{1}{p^2 + 9\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{p^2 + (p-1)^2\alpha^2} + \frac{1}{p^2 + p^2\alpha^2} \right).$$

◁ **Solució.** Aplicarem la fórmula (1) de la proposició 1.2 esmentada al problema 16:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} p \sum_{j=1}^p \frac{1}{p^2 + j^2\alpha^2} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\frac{1}{p}}{1 + \alpha^2 \left(\frac{i+1}{p}\right)^2} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Agafant:} \\ \Delta x_i = 1/p, \quad \text{per tot } i = 1, 2, \dots, p-1, \\ t_i = (i+1)/p, \quad \text{per a cada } i = 1, 2, \dots, p-1. \end{array} \right\} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1 + \alpha^2 x^2} = \left[ \frac{\arctan(\alpha x)}{\alpha} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \boxed{\frac{\arctan \alpha}{\alpha}} \end{aligned}$$

On es suposa  $\alpha \neq 0$  (sinò el problema és trivial: comproveu-ho!). La figura 3 il·lustra l'aplicació de la proposició 1.2. ▷