Sèries de Fourier

Problemes

1. (a) Trobeu la sèrie de Fourier de la funció $f(x) = x + \pi$ a l'interval $-\pi < x < \pi$.
(b) Useu *(a)* per demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

◁ **Solució.** *(a)* Calculem primer els coeficients del desenvolupament.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{d}x + \pi\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\right) = 2\pi,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cos nx\,\mathrm{d}x = 0,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{n}\mathrm{d}\left(-\cos nx\right) = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n}(-1)^n,
\end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$ on s'ha tingut en compte que x i $x\cos nx$ són funcions senars i per tant,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

El desenvolupament de Fourier de la funció $f(x)$ resulta doncs:

$$\mathcal{F}[f](x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,$$

i pel que fa a la convergència, aplicant el teorema de Dirichlet tenim d'una banda:

$$\mathcal{F}[f](x) = x + \pi, \tag{1}$$

per tot $-\pi < x < \pi$, mentre que de l'altra:

$$\mathcal{F}[f](\pi) = \mathcal{F}[f](-\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi^+) + f(\pi^-)\right) = \frac{1}{2}(0 + 2\pi) = \pi.$$

(b) $x = -\pi/2$ és un punt de continuïtat de la funció $f(x) = x + \pi$ a l'interval $-\pi < x < \pi$. Aleshores, segons (1) és $\mathcal{F}[f](-\pi/2) = -\pi/2 + \pi = \pi/2$. Per tant, substituint a (1):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](-\frac{\pi}{2}) &= \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = \pi + 2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2p+1}}{2p-1}\sin\frac{(2p-1)\pi}{2}\\
&= \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p-1} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

on a la segona igualtat hem fet servir que $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$, si n és parell i quan n és senar, posem: $n = 2p-1$ per $p = 1, 2, 3, \ldots$ d'on, clarament, $\sin\frac{(2p-1)\pi}{2} = (-1)^{p+1}$. A partir d'això, es dedueix d'immediat:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

que és el que es volia provar. $\triangleright$

2. (a) Trobeu la sèrie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{per} \quad -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{per} \quad 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

(b) Useu *(a)* per demostrar que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots, \qquad \text{i que} \qquad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$$

(c) Useu *(b)* per trobar una sèrie numèrica tal que la seva suma sigui $\dfrac{\pi^2}{8}$.

$\triangleleft$ **Solució.** *(a)* Com al problema anterior comencem calculant els coeficients de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0 \cdot \cos nx \,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx \,\mathrm{d}x \overset{\text{parts}}{=} \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{parts}}{=} \left[\frac{2x}{n^2\pi}\cos nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos nx \,\mathrm{d}x}_{=0} = \frac{2}{n^2}(-1)^n,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0 \sin nx \,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \sin nx \,\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{parts}}{=} \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx \,\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n} + \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi} x \,\mathrm{d}(\sin nx)$$

$$\overset{\text{parts}}{=} \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} + \underbrace{\left[\frac{2x}{n^2\pi}\sin nx\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n^3\pi}\int_0^{\pi}\sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{n}, & n = \dot{2} \ \text{(i. e., si } n \text{ parell)}, \\ \dfrac{\pi}{n} - \dfrac{4}{n^3\pi}, & n \ne \dot{2} \ \text{(i. e., si } n \text{ senar)}, \end{cases}$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots$

Remarca 1.1 (notació). A la literatura, sovint apareix: $p = \dot{m}$ per denotar "p és múltiple de m". Llavors per establir que $n \in \mathbb{N}$ és parell (és múltiple de 2) o senar (no és múltiple de 2) posarem $n = \dot{2}$ ó $n \ne \dot{2}$ respectivament.

Un cop calculat els coeficients, la sèrie de Fourier es pot escriure de la manera següent,

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}(-1)^n\cos nx - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}\sin 2nx + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2n+1} - \frac{4}{(2n+1)^3\pi}\right)\sin(2n+1)x$$

i pel teorema de Dirichlet es té:

$$\mathcal{F}[f](x) = f(x), \quad -\pi < x < \pi; \tag{2}$$

$$\mathcal{F}[f](\pi) = \mathcal{F}[f](-\pi) = \frac{1}{2}\Big(f(-\pi^+) + f(+\pi^-)\Big) = \frac{1}{2}(0+\pi^2) = \frac{\pi^2}{2}. \tag{3}$$

(b) $x = 0$ és un punt de continuïtat de la funció. Llavors, d'acord amb (2) és $\mathcal{F}[f](0) = 0$. Sabent això, substituïm $x = 0$ a la sèrie de Fourier trobada a l'apartat *(a)*, amb la qual cosa:

$$\mathcal{F}[f](0) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = 0 \Longrightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \tag{4}$$

De la mateixa manera, per $x = \pi$, substituïm com abans a la sèrie i ara tenim en compte (3). Amb això s'obté:

$$\mathcal{F}[f](\pi) = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{2} \Longrightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \tag{5}$$

(c) Sumant (4) i (5):

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

d'on finalment:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \ \triangleright$$

3. (a) Trobeu la sèrie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \le x < \pi \end{cases}$$

a l'interval $-\pi < x < \pi$.

(b) On convergeix la sèrie trobada en *(a)* quan $x = \dfrac{7\pi}{2}$? I quan $x = 401\pi$?

$\triangleleft$ **Solució.** *(a)* Calculem els coeficients de la sèrie,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} 0\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\cos nx}{n^2\pi}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, & n = \dot{2} \\ -\dfrac{2}{n^2\pi}, & n \ne \dot{2} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x}_{=0} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Amb aquests coeficients es té la sèrie de Fourier:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \tag{6}$$

mentre que pel teorema de Dirichlet,

$$\mathcal{F}[f](x) = f(x), \quad -\pi < x < \pi; \qquad \mathcal{F}[f](\pm\pi) = \frac{1}{2}\Big(f(-\pi^+) + f(\pi^-)\Big) = \frac{1}{2}(0+\pi) = \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

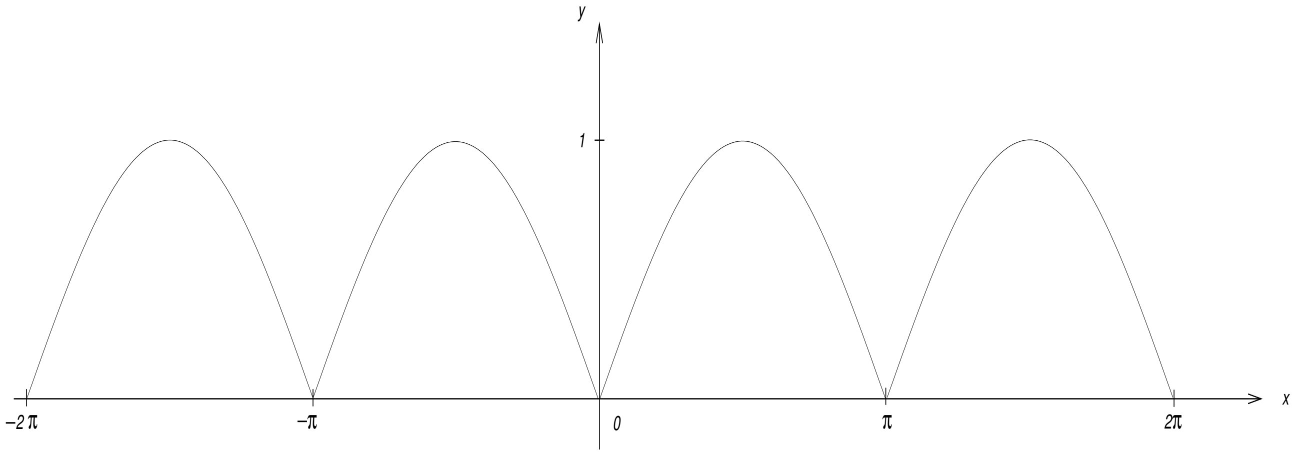

Figura 1. Representació gràfica de la funció $f(x) = |\sin x|$ (problema 4).

(c) La sèrie de Fourier, $\mathcal{F}[f](x)$ donada per (6) és 2π-periòdica i tenint en compte (7):

$$\mathcal{F}[f](401\pi) = \mathcal{F}[f](200 \times (2\pi) + \pi) = \mathcal{F}[f](\pi) = \frac{\pi}{2},$$
$$\mathcal{F}[f]\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \mathcal{F}[f]\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{F}[f]\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

ja que π és un punt de l'extrem de l'interval però en canvi $-\frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi)$ i la funció és contínua a l'interval. $\triangleright$

4. Trobeu, si es que existeix, una sèrie de Fourier que convergeix cap a $|\sin x|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

$\triangleleft$ **Solució.** La funció $f(x) = |\sin x|$ és parella (figura 1) i per tant els coeficients dels termes en sinus de la sèrie són tots zero, i. e.: $b_n = 0, n = 1, 2, 3, \ldots$

Aleshores tindrem una sèrie en cosinus amb:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}, \qquad a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin 2x \,\mathrm{d}x = 0;$$

i per $\mathbb{N} \ni n > 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos nx \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}(1+(-1)^n) - \frac{1}{n-1}(1+(-1)^n)\right] = \frac{-2}{(n^2-1)\pi}(1+(-1)^n) = \begin{cases} \dfrac{-4}{(n^2-1)\pi}, & n = \dot{2}, \\ 0, & n \neq \dot{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Remarca 1.2. A la segona igualtat hem aplicat la identitat trigonomètrica:

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

La corresponent sèrie de Fourier ve donada doncs per:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

i com que $f(x) = |\sin x| \in CT[-\pi, \pi]$ (de fet $f \in C^0(\mathbb{R})$) i $f' \in CT[-\pi, \pi]$, pel teorema de convergència (Dirichlet): $\mathcal{F}[f](x) = |\sin x|$ per $-\pi < x < \pi$ i $\mathcal{F}[f](\pi) = \mathcal{F}[f](-\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi^+) + f(+\pi^-)\right) =$

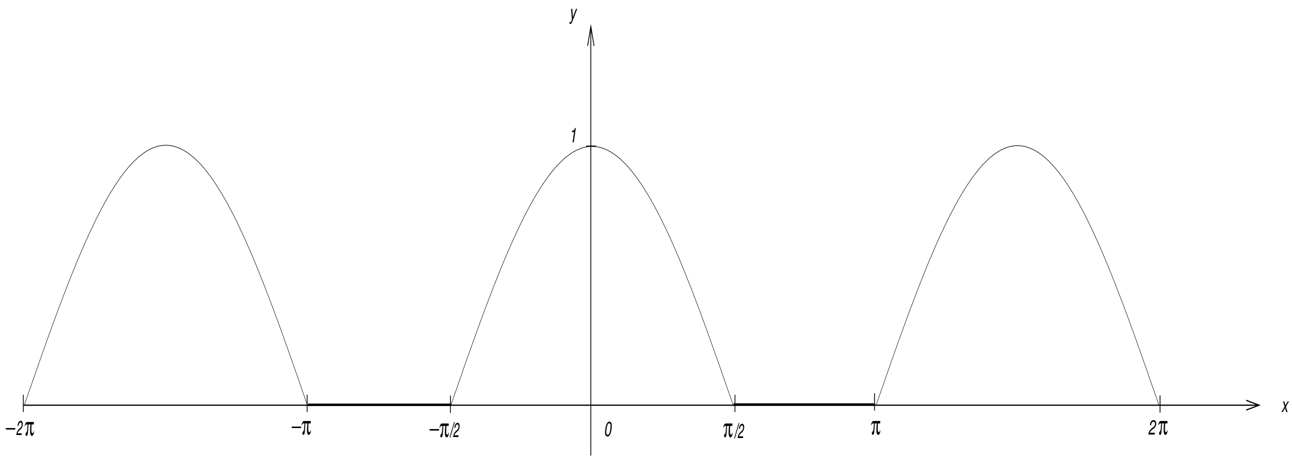

Figura 2. Representació gràfica de l'extensió 2π-periòdica de la funció $f(x)$ definida a l'interval $[-\pi,\pi]$ segons: $f(x)=\cos x$, per $|x|<\frac{\pi}{2}$ i $f(x)=0$, per $\dfrac{\pi}{2}<|x|<\pi$ (problema 5).

$\frac{1}{2}(0+0)=0$ als extrems (notem que $f(x)=|\sin x|$ és contínua en $\mathbb{R}$ i $|\sin(\pm\pi)|=0$). D'altra banda $f(x)=|\sin x|$ és π-periòdica (en particular també 2π-periòdica). Llavors es té:

$$\mathcal{F}[f](x)=|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1},$$

per tot $x\in\mathbb{R}$. ▹

5. Trobeu la sèrie de Fourier de la funció

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } \dfrac{\pi}{2}\le|x|\le\pi\\ \cos x, & \text{si } |x|<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

◃ **Solució.** Com al problema anterior, la funció $f(x)$ (veure figura 2) és parella, per tant els coeficients dels termes en sinus seran tots zero, i. e.: $b_n=0$ per $n=1,2,3,\ldots$ Així, només ens caldrà calcular el terme independent, a_0, i els coeficients dels termes en cosinus a_n, $n=1,2,3,\ldots$ Tanmateix recordem que, debut a la simetria parella, tan sols s'ha d'integrar sobre la meitat de l'interval (multiplicant després per 2, es clar!). Així, d'acord amb les fórmules deduïdes a la teoria:

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\pi},\\
a_1&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2};\\
a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos nx\,\mathrm{d}x\overset{(*)}{=}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\cos(n+1)x+\cos(n-1)x)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{2}\right)}{n+1}+\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{n-1}\right]\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n+1}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n-1}\right]=\begin{cases}0, & n\neq\dot{2},\\ \dfrac{2(-1)^{1+n/2}}{\pi(n^2-1)}, & n=\dot{2}.\end{cases}\qquad\text{per}\quad n=2,3,4,\ldots
\end{aligned}\tag{8}$$

[(*)]Hem utilitzat la identitat trigonomètrica: $\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$, prenent $a=nx$ i $b=x$.

Finalment,

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$$

és la sèrie de Fourier buscada. ▷

Remarca 1.3. En calcular els coeficients a (8) s'ha tingut en compte, a més de la simetria parella ja comentada de la funció, el fet que aquesta és idènticament zero a $[\pi/2, \pi]$, és per això que només s'integra a l'interval $[0, \pi/2]$.

6. Sigui $f(x)$ contínua a $(-L, L)$ i siguin a_n i b_n els seus coeficients de Fourier.

(a) Proveu que si $S_M(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{M}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$, aleshores

$$\int_{-L}^{L} f(x)S_M(x)\,\mathrm{d}x = L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n^2+b_n^2)\right).$$

(b) Proveu que $\displaystyle\int_{-L}^{L} S_M^2(x)\,\mathrm{d}x = L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M}(a_n^2+b_n^2)\right)$.

(c) Proveu que $2\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)S_M(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-L}^{L} S_M^2(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{-L}^{L}(f(x))^2\,\mathrm{d}x$.

(d) Fent servir els apartats anteriors proveu la anomenada "desigualtat de Bessel":

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \le \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

◁ **Solució.** Considerem el producte:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{amb} \quad f, g \in CT[-L, L]. \tag{9}$$

Aquest és un producte escalar (amb les propietats habituals: simetria, bilinealitat,...)[1]. Agafem:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_0(x) = \frac{1}{2}, && \psi_{2n-1}(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, && \psi_{2n}(x) = \cos\frac{n\pi x}{L},\\ &c_0 = a_0 = \frac{\langle\psi_0, f\rangle}{\langle\psi_0,\psi_0\rangle}, && c_{2n-1} = b_n = \frac{\langle\psi_{2n-1}, f\rangle}{\langle\psi_{2n-1},\psi_{2n-1}\rangle}, && c_{2n} = a_n = \frac{\langle\psi_{2n}, f\rangle}{\langle\psi_{2n},\psi_{2n}\rangle},\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots, M$. A més, sabem de la teoria que $\{\psi_i\}_{i=0,1,2,\ldots,2M}$ formen una família de $2M+1$ funcions ortogonals respecte del producte (9). En particular:

$$\langle\psi_n, \psi_m\rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } n \ne m,\\ L/2, & \text{si } n = m = 0,\\ L, & \text{si } m \ge 1.\end{cases} \tag{11}$$

Remarca 1.4. Sigui $\mathcal{S}(x)$ la sèrie de Fourier de f, i. e., $S(x) = \lim_{M\to\infty}\mathcal{S}_M(x)$. Llavors, amb la notació (10) pels coeficients i per les funcions, el polinomi trigonomètric, $S_M(x)$, i la sèrie, $S(x)$, es poden escriure de manera més "compacta" com:

$$S_M(x) = \sum_{n=0}^{M} c_n\psi_n(x), \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n(x).$$

Això i l'ortogonalitat de la família de funcions (segons (11)), permet —com es veurà d'immediat—, simplificar enormement els càlculs.

[1] En canvi però, no és definit positiu: si $f \in CT[-T, T]$, $\langle f, f\rangle = 0 \not\Rightarrow f \equiv 0$. De fet es diu que és "gairebé" definit positiu: si $\langle f, f\rangle = 0$ amb $f \in CT[-T, T]$, podem assegurar que f val zero en tots els punts de l'interval $[-T, T]$ llevat, com a màxim, en un nombre finit.

Aleshores:

(a) $\langle f, S_M\rangle = \int_{-L}^{L} f(x)S_M(x) = \left\langle f, \sum_{n=0}^{2M} c_n\psi_n \right\rangle = \sum_{n=0}^{2M} c_n \langle f, \psi_n\rangle = \sum_{n=0}^{2M} c_n^2 \langle \psi_n, \psi_n\rangle$

$= L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right).$

(b) $\langle S_M, S_M\rangle = \int_{-L}^{L} (S_M(x))^2\,\mathrm{d}x = \langle S_M, S_M\rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{2M} c_n\psi_n, \sum_{m=0}^{2M} c_m\psi_m \right\rangle =$

$= \sum_{m,n=0}^{2M} c_n c_m \langle\psi_n, \psi_m\rangle \overset{(11)}{=} \sum_{n=0}^{2M} c_n^2\langle\psi_n, \psi_n\rangle = L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right).$

(c) $0 \le \langle f - S_M, f - S_M\rangle = \langle f, f\rangle - \langle f, S_M\rangle + \langle S_M, S_M\rangle \Rightarrow 2\langle f, S_M\rangle - \langle S_M, S_M\rangle \le \langle f, f\rangle$, que és la desigualtat que es volia demostrar.

(d) $\int_{-L}^{L} (f(x))^2\,\mathrm{d}x = \langle f, f\rangle \overset{(c)}{\ge} \langle f, S_M\rangle - \langle S_M, S_M\rangle \overset{(a),(b)}{=} L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{M}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right)$; dividint per $L(> 0)$ i prenent límit quan $M \to \infty$ a totes dues bandes, s'obté:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \le \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

(desigualtat de Bessel). ▷

7. Desenvolupeu la funció

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{per} \quad -1 < x < 0 \\ x-1, & \text{per} \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$$

en sèrie de sinus o cosinus segons convingui.

◁ **Solució.** Com que f és una funció senar (vegeu figura 3), li correspondrà un desenvolupament en sèrie de sinus del tipus $\mathcal{F}[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, amb els coeficients

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x-1)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^1 (x-1)\,\mathrm{d}\left(\cos n\pi x\right) \overset{\text{(parts)}}{=} -2\left[(x-1)\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos n\pi x\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n\pi},$$

ja que, obviament:

$$\left[(x-1)\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{n\pi}, \qquad \int_0^1 \cos n\pi x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Per tant:

$$\mathcal{F}[f](x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}.$$

Quant a la convergència a l'interval $[-1, 1]$ tenim, pel teorema de Dicrichlet:

$\mathcal{F}[f](x) = x + 1,$ per $-1 < x < 0,$

$\mathcal{F}[f](x) = x - 1,$ per $0 < x < 1,$

$\mathcal{F}[f](0) = \frac{1}{2}\left(f(0^+) + f(0^-)\right) = \frac{1}{2}(-1+1) = 0,$ per $x = 0,$

$\mathcal{F}[f](1) = \mathcal{F}[f](-1) = \frac{1}{2}\left(f(-1^+) + f(+1^-)\right) = \frac{1}{2}(0+0) = 0,$ per $x = \pm 1.$ ▷

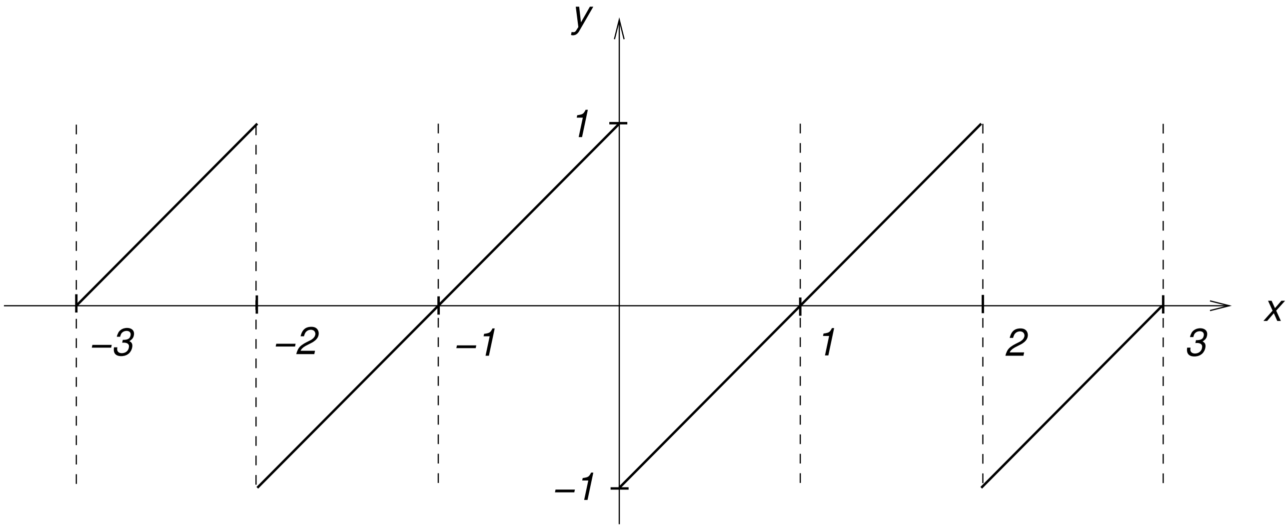

Figura 3. Extensió 2-periòdica de la funció $f(x) = x + 1$, per $-1 < x < 0$ i $f(x) = x - 1$, per $0 \le x < 1$, donada al problema 7.

8. Desenvolupeu la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad 0 < x < 1/2 \\ 1 & \text{per} \quad 1/2 \le x < 1 \end{cases}$$

en sèrie de cosinus en mig interval i en sèrie de sinus en mig interval.

◁ **Solució.** Primer trobarem la sèrie de cosinus. Llavors considerarem l'extensió parella, $f_p(x)$, de la funció:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x < 1, \\ f(-x), & -1 < x < 0. \end{cases}$$

i sabent (per la simetria parella) que els coeficients dels termes en sinus de $f_p(x)$ són zero (i. e., $b_n = 0$ per tot $n \in \mathbb{N}$), calcularem els coeficients del terme independent i dels termes en cosinus:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f_p(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/2} 0\cdot \mathrm{d}x + 2\int_{1/2}^{1} 1\cdot \mathrm{d}x = 1; \\ a_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f_p(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/2} 0\cdot\cos n\pi x\,\mathrm{d}x + 2\int_{1/2}^{1} 1\cdot\cos n\pi x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right]_{1/2}^{1} = -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}(-1)^{\frac{n+1}{2}}, & n \neq \dot{2}, \\ 0, & n = \dot{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots$ La sèrie en cosinus de la funció és doncs:

$$\mathcal{F}[f_p](x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n-1)\pi}\cos(2n-1)\pi x.$$

A continuació, per trobar la sèrie en sinus s'ha de construir l'extensió senar de la funció que, de manera genèrica, ve donada per

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x < 1, \\ -f(-x), & -1 < x < 0. \end{cases}$$

En aquest cas sabem —debut a la obvia simetria imparella de $f_s(x)$—, que són zero els coeficients del terme independent i dels termes en cosinus. Així nomes s'han de calcular els coeficients dels termes

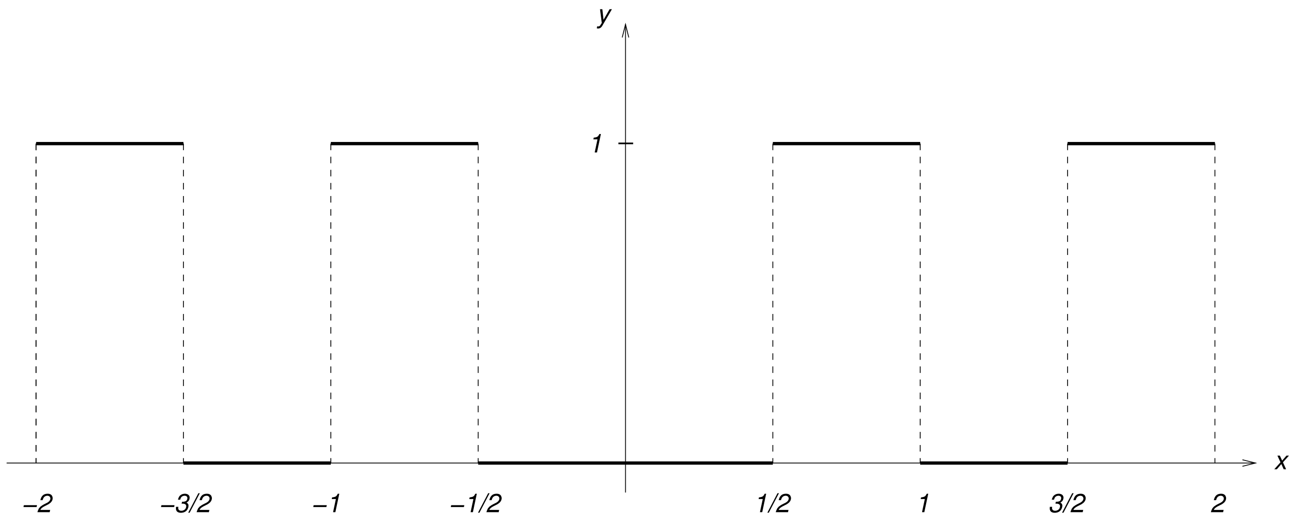

Figura 4. Extensió parella de la funció $f(x) = 0$, per $0 < x < 1/2$ i $f(x) = 1$, per $1/2 \leq x < 1$, donada al problema 8

en sinus. Explícitament:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f_s(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/2} 0\cdot\sin n\pi x\,\mathrm{d}x + 2\int_{1/2}^{1} 1\cdot\sin n\pi x\,\mathrm{d}x \\ &= -2\left[\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right]_{1/2}^{1} - \frac{2}{n\pi}\left((-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}, & n \neq \dot{2}, \\ \dfrac{2}{n\pi}\left((-1)^{n/2} - 1\right), & n = \dot{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots$

Aleshores la sèrie de Fourier en sinus es podrà escriure de la manera següent:

$$\mathcal{F}[f_s](x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2(2n-1)\pi x}{2n-1}.$$

A la figura 4 es representem l'extensió parella de la funció de l'eneunciat. Deixem al lector la representació gràfica de l'extensió senar. ▷

9. Desenvolupeu la funció $f(x) = x^2$, $0 < x < \ell$

(a) En sèrie de cosinus.
(b) En sèrie de sinus.
(c) En sèrie de Fourier.

◁ **Solució.** *(a)* Considerem l'extensió parella de la funció donada:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) = x^2, & 0 \leq x < \ell, \\ f(-x) = x^2, & -\ell \leq x < 0 \end{cases} \tag{12}$$

i trobem els coeficients del desenvolupament en sèrie de Fourier de $f_p(x)$ a l'interval $(-\ell, \ell)$. Com que –evidentment–, $f_p(x)$ és una funció parella, tindrem $b_n = 0$ per tot $n = 1, 2, 3, \ldots$ (i. e., els coficients dels termes en sinus seran tots zero). Fem doncs els càlculs pels coeficients del terme independent i

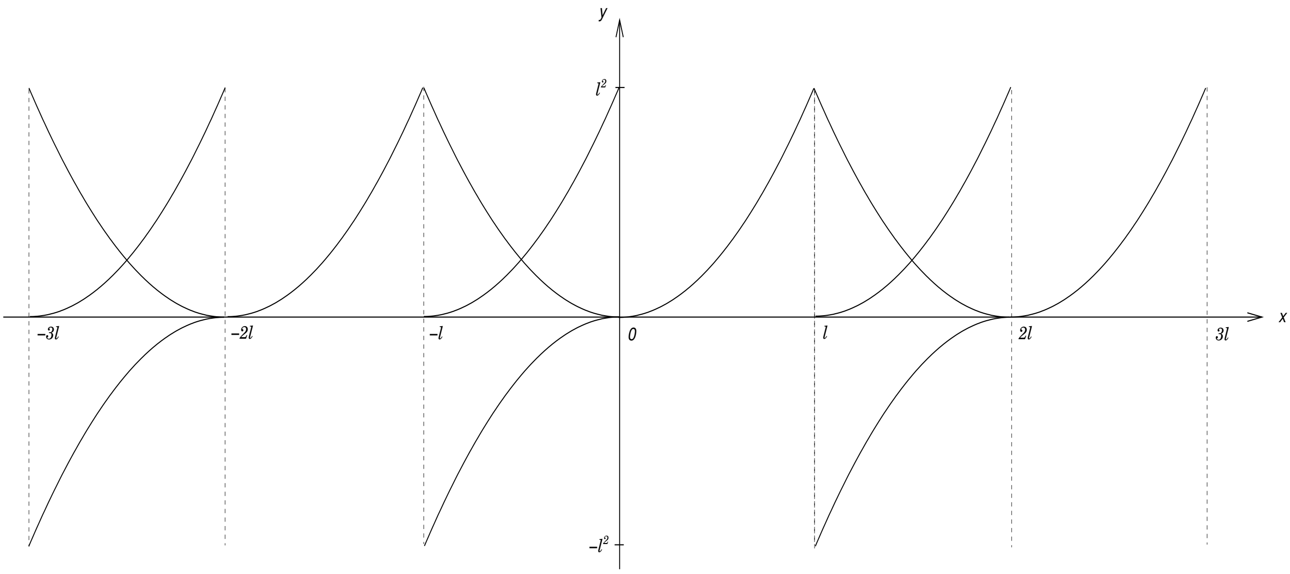

Figura 5. A partir de $f(x) = x^2$, definida a l'interval $0 < x < \ell$, es representen les seves extensions parella, senar i l-periòdica.

dels termes en cosinus:

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f_p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} = \frac{2}{3}\ell^2,$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f_p(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x^2\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\ell} x^2\mathrm{d}\left(\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) = \frac{2}{n\pi}\underbrace{\left[x^2\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]_0^{\ell}}_{=0}$$

$$+\frac{4\ell}{n^2\pi^2}\int_0^{\ell} x\,\mathrm{d}\left(\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right) = \frac{4\ell}{n^2\pi^2}\left[x\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right]_0^{\ell} - \frac{4\ell}{n^2\pi^2}\underbrace{\int_0^{\ell}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x}_{=0} = \frac{4\ell^2}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots$

En resum, tenim que la sèrie de Fourier en cosinus (és a dir, la corresponent a l'extensió parella) de la funció ve donada per

$$\mathcal{F}[f_p](x) = \frac{\ell^2}{3} + \frac{4\ell^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{\ell},$$

amb $\mathcal{F}[f_p](x) = x^2$ a $0 < x < \ell$. *Observació:* de fet també a $-\ell \le x \le \ell$ atès que —en aquest cas—, la funció $f(x) = x^2$ coincideix amb la seva extensió parella a l'interval $-\ell < x < \ell$ i a més pren els mateixos valors als extrems.

(b) Ara considerarem l'extensió senar:

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x) = x^2, & 0 < x < \ell, \\ -f(-x) = -x^2, & -\ell < x \le 0. \end{cases} \tag{13}$$

Com que obviament $f_s(x)$ és una funció senar, els coeficients del terme independent i dels termes en cosinus són tots nuls, i. e.: $a_0 = 0$ i $a_n = 0$ per tot $n = 1, 2, 3, \ldots$ Els coeficients dels termes en sinus es calculen per la fórmula:

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f_s(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell} = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x^2\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\ell} x^2\mathrm{d}\left(\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$
$$\overset{\text{parts}}{=} -\frac{2}{n\pi}\left[x^2\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right]_0^{\ell} + \frac{4}{n\pi}\times\frac{\ell}{n\pi}\int_0^{\ell} x\mathrm{d}\left(\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) \overset{\text{parts}}{=} -\frac{2\ell^2}{n\pi}(-1)^n + \frac{4\ell}{n^2\pi^2}\left[x\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]_0^{\ell}$$
$$+\frac{4\ell}{n^2\pi^2}\times\frac{\ell}{n\pi}\int_0^{\ell}\mathrm{d}\left(\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right) = -\frac{2\ell^2}{n\pi}(-1)^n + \frac{4\ell^2}{n^3\pi^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

on a la segona integració per parts de dalt tenim que

$$\frac{4\ell}{n^2\pi^2}\left[x\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]_0^{\ell} = \frac{4\ell^2}{n^2\pi^2}\sin n\pi = 0,$$

per tot $n = 1, 2, 3, \ldots$; i els coeficients b_n resulten

$$b_n = \begin{cases} -\dfrac{2\ell^2}{n\pi}, & n = \dot{2}, \\ \dfrac{2\ell^2}{n\pi} - \dfrac{8\ell^2}{n^3\pi^3}, & n \neq \dot{2}. \end{cases}$$

Aleshores, la sèrie de Fourier en sinus de la funció és:

$$\mathcal{F}[f_s](x) = -\frac{\ell^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi x}{\ell} + \frac{\ell^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2n-1} - \frac{8}{(2n-1)^3\pi^2}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{\ell} = x^2,$$

per $0 \le x < \ell$.

(c) Busquem el desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció en $0 < x < \ell$, per tant una sèrie del tipus:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{\ell}\right), \tag{14}$$

on els coeficients vénen donats ara per:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x^2\,\mathrm{d}x = a_0(f_p) = \frac{2}{3}\ell^2; \\ a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x^2\cos\frac{2n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = a_{2n}(f_p) = \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}, \\ b_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x^2\sin\frac{2n\pi x}{\ell}\,\mathrm{d}x = b_{2n}(f_s) = -\frac{\ell^2}{n\pi}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Substituint aquests coeficients en (14):

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{\ell^2}{3} + \frac{\ell^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi}\cos\frac{2n\pi x}{\ell} - \frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi x}{\ell}\right) = x^2, \qquad 0 < x < \ell.$$

A la figura 5 es representen l'extensió parella, senar i ℓ-periòdica a partir de la funció $f(x) = x^2$ definida a l'interval $0 < x < \ell$. ▷

9. (a) Trobeu la forma general de la sèrie de Fourier en cosinus i de la sèrie de Fourier en sinus a $[0, C]$ per funcions que compleixen la relació $f(C - x) = f(x)$.
(b) Mateixa pregunta per $f(C - x) = -f(x)$.

◁ **Solució.** *(a.1)* Sèrie de Fourier en cosinus:

$$\mathcal{F}[f_p](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{C}, \tag{15}$$

essent f_p l'extensió parella de la funció, i. e.:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq C, \\ f(-x), & -C \leq x \leq 0. \end{cases} \tag{16}$$

Aleshores, calculant explícitament els coeficients:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{C}\int_0^C f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{C}\int_{C/2}^C f(x)\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y; \\ x = C/2 \Rightarrow y = C/2; \\ x = C \Rightarrow y = 0. \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{C}\int_{C/2}^0 f(C-y)\,\mathrm{d}y \overset{f(C-y)=f(y)}{=} \frac{4}{C}\int_0^{C/2} f(x)\,\mathrm{d}x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{C}\int_0^C f(x)\cos\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{C}\int_{C/2}^C f(x)\cos\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y;\ x = C/2 \Rightarrow y = C/2;\ x = C \Rightarrow y = 0; \\ \cos\frac{n\pi}{C}(C-y) = \cos\left(n\pi - \frac{n\pi y}{C}\right) = (-1)^n \cos\frac{n\pi y}{C}. \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{C}(-1)^n\int_0^{C/2} f(C-y)\cos\frac{n\pi y}{C}\,\mathrm{d}y \\ &\overset{f(C-y)=f(y)}{=} \frac{2}{C}\left(1 + (-1)^n\right)\int_0^{C/2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n \neq \dot{2}, \\ \frac{4}{C}\int_0^{C/2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x, & n = \dot{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots$ Resumint:

$$a_0 = \frac{4}{C}\int_0^{C/2} f(x)\,\mathrm{d}x; \qquad b_n = a_{2n-1} = 0, \qquad a_{2n} = \frac{4}{C}\int_0^{C/2} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Finalment, substituint al desenvolupament (15):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_p](x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\cos\frac{2n\pi x}{C} \\ &= \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{4}{C}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{C/2} f(y)\cos\frac{2n\pi y}{C}\,\mathrm{d}y\right)\cos\frac{2n\pi x}{C}. \end{aligned}$$

(a.2) Ara, desenvoluparem l'extensió senar de la funció, i. e.:

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq C, \\ -f(-x), & -C \leq x < 0. \end{cases} \tag{17}$$

Sabem que la sèrie de Fourier serà de la forma:

$$\mathcal{F}[f_s](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{C}.$$

(sèrie en sinus). Calculem a continuació els coeficients b_n per $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{C}\int_0^C f(x)\sin\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{C}\int_{C/2}^{C} f(x)\sin\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x \\
&= \left\{\begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y;\ x = C/2 \Rightarrow y = C/2;\ x = C \Rightarrow y = 0; \\ \sin\frac{n\pi x}{C} = \sin\frac{n\pi}{C}(C-y) = \sin\left(n\pi - \frac{n\pi y}{C}\right) = (-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi y}{C} \end{array}\right\} \\
&= \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{C}(-1)^{n+1}\int_0^{C/2} f(C-y)\sin\frac{n\pi y}{C}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{f(C-y)=f(y)}{=} \frac{2}{C}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\int_0^{C/2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n = \dot{2}, \\ \dfrac{4}{C}\displaystyle\int_0^{C/2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x, & n \neq \dot{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Així doncs, els coeficients queden:

$$a_0 = 0; \qquad a_n = b_{2n} = 0, \qquad b_{2n-1} = \frac{4}{C}\int_0^{C/2} f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{C}\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

de manera que per substitució en (17):

$$\mathcal{F}[f_s](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{C} = \frac{4}{C}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{C/2} f(y)\sin\frac{(2n-1)\pi y}{C}\,\mathrm{d}y\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{C}.$$

(b.1) Com als dos apartats anteriors considerarem les extensions parella i senar —les quals vénen donades, de manera genèrica per (16) i (13) respectivament—. Els coeficients per la sèrie en cosinus es calcularan igual que a l'apartat *(a.1)* tenint en compte però la nova simetria (és a dir: $f(C-x) = -f(x)$). De nou, fent els càlculs:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{C}\int_0^C f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{C}\int_{C/2}^{C} f(x)\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y; \\ x = C/2 \Rightarrow y = C/2; \\ x = C \Rightarrow y = 0. \end{array}\right\} \\
&= \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{C}\int_{C/2}^{0} f(C-y)\,\mathrm{d}y = \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(C-x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{f(C-y)=-f(y)}{=} 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{C}\int_0^C f(x)\cos\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{C}\int_{C/2}^{C} f(x)\cos\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x \\
&= \left\{\begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y;\ x = C/2 \Rightarrow y = C/2;\ x = C \Rightarrow y = 0; \\ \cos\frac{n\pi}{C}(C-y) = \cos\left(n\pi - \frac{n\pi y}{C}\right) = (-1)^{n}\cos\frac{n\pi y}{C}. \end{array}\right\} \\
&= \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{C}(-1)^{n}\int_0^{C/2} f(C-y)\cos\frac{n\pi y}{C}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{f(C-y)=-f(y)}{=} \frac{2}{C}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\int_0^{C/2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n = \dot{2}, \\ \dfrac{4}{C}\displaystyle\int_0^{C/2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x, & n \neq \dot{2}, \end{cases}
\end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots$ O sigui:

$$a_0 = 0; \qquad b_n = a_{2n} = 0, \qquad a_{2n-1} = \frac{4}{C}\int_0^{C/2} f(x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{C}\,\mathrm{d}x, \quad \text{per} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

En conseqüència, la sèrie de Fourier en cosinus vindrà ara donada per:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_p](x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{C}\\ &= \frac{4}{C}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{C/2} f(y)\cos\frac{(2n-1)\pi y}{C}\,\mathrm{d}y\right)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{C}.\end{aligned}$$

(b.2) Procedirem exactament com a *(a.2)* aplicant però, al final del càlcul, que $f(C-x) = -f(x)$, i. e.:

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2}{C}\int_0^C f(x)\sin\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{C}\int_{C/2}^{C} f(x)\sin\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x\\ &= \left\{\begin{array}{l}\text{c. v.: } y = C-x,\\ \text{d'on: } \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y;\ x = C/2 \Rightarrow y = C/2;\ x = C \Rightarrow y = 0;\\ \sin\frac{n\pi x}{C} = \sin\frac{n\pi}{C}(C-y) = \sin\left(n\pi - \frac{n\pi y}{C}\right) = (-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi y}{C}\end{array}\right\}\\ &= \frac{2}{C}\int_0^{C/2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x + \frac{2}{C}(-1)^{n+1}\int_0^{C/2} f(C-y)\sin\frac{n\pi y}{C}\,\mathrm{d}y\\ &\overset{f(C-y)=-f(y)}{=} \frac{2}{C}\left(1+(-1)^n\right)\int_0^{C/2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}0, & n \neq \dot{2},\\ \dfrac{4}{C}\displaystyle\int_0^{C/2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x, & n = \dot{2}.\end{cases}\end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots$ Per tant, els coeficients vénen donats per:

$$a_0 = 0; \qquad a_n = b_{2n-1} = 0, \qquad b_{2n} = \frac{4}{C}\int_0^{C/2} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{C}\,\mathrm{d}x, \quad \text{per} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

i el desenvolupament:

$$\mathcal{F}[f_s](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\sin\frac{2n\pi x}{C} = \frac{4}{C}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{C/2} f(y)\sin\frac{2n\pi y}{C}\,\mathrm{d}y\right)\sin\frac{2n\pi x}{C}$$

és el desenvolupament de Fourier en sinus buscat. ▷

10. Desenvolupeu la funció $\cos xz$ en sèrie de Fourier a l'interval $[-\pi, \pi]$, on z és un paràmetre real. Proveu les igualtats:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin\pi z} &= \frac{2z}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2}\right)\\ \cot\pi z &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{k^2 - z^2}\right)\end{aligned}$$

i deduïu que

$$\begin{aligned}\pi &= 2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1}\\ \pi &= 4 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{16k^2 - 1}.\end{aligned}$$

◁ **Solució.** Sigui $f(x) = \cos xz$, $x \in [-\pi, \pi]$, $z \in \mathbb{R}$. Notem que és una funció parella i per tant, la seva sèrie de Fourier és una sèrie en cosinus (aleshores $b_n = 0$ per tot $n \in \mathbb{N}$). Si es calculen els seus coeficients s'obté:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos xz \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi z}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\,(\sin xz) = \frac{2}{\pi z}\sin \pi z; \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos xz \cos nx \,\mathrm{d}x \overset{(\dagger)}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(z+n)x + \cos(z-n)x]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(z+n)x}{z+n} + \frac{\sin(z-n)x}{z-n}\right]_0^{\pi} \overset{(\ddagger)}{=} (-1)^n\left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right)\sin \pi z = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2 - z^2} z \sin \pi z, \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots$

Remarca 1.5. Aquí suposem que $z \notin \mathbb{Z}$ (notem que si $z = k \in \mathbb{Z}$, el desenvolupament en sèrie de Fourier de $f(x) = \cos xz$ és trivial).

Amb els coeficients calculats a dalt, la sèrie de Fourier esdevé:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{2z\sin \pi z}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2}\cos kx\right).$$

Per determinar cap a on convergeix la sèrie a l'interval $[-\pi, \pi]$ tenim, per aplicació directa del teorema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](x) &= \cos xz, \quad \text{per} \quad -\pi < x < \pi, \\ \mathcal{F}[f](\pm\pi) &= \frac{1}{2}\left(f(-\pi^+) + f(\pi^-)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(-\pi z) + \cos \pi x\right) = \cos \pi z \end{aligned} \tag{18}$$

o sigui:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{2z\sin \pi z}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2}\cos kx\right) = \cos xz, \quad \text{per tot} \quad -\pi \le x \le \pi.$$

D'acord amb això, agafant $x = 0 \in (-\pi, \pi)$:

$$\mathcal{F}[f](0) = \frac{2z\sin \pi z}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2}\right) = \cos(z \cdot 0) = 1$$

i dividint a tots dos costats per $\sin \pi z$:

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \frac{2z}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2}\right), \tag{19}$$

on es suposa $z \notin \mathbb{Z}$. Tanmateix, prenent $x = \pi$ i d'acord amb (18),

$$\mathcal{F}[f](\pi) = \frac{2z\sin \pi z}{\pi}\left(\frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2}(-1)^k\right) = \frac{2z\sin \pi z}{\pi}\left(\frac{1}{z^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - z^2}\right) = \cos \pi z.$$

Com dalt, asumint que $z \notin \mathbb{Z}$, dividim a dreta i esquerra per $\sin \pi z$ per obtenir

$$\cot \pi z = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2}\right). \tag{20}$$

Per últim, prenent en (19) $z = 1/2$:

$$1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2 \times \frac{1}{4}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - \frac{1}{4}}\right) \Longrightarrow \pi = 2 + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1}$$

(†)Fem servir la mateixa identitat trigonomètrica del problema **5**: $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$, ara però identificant $a = xz$ i $b = nx$.

(‡)En aplicar la "regla" de Barrow per $x = 0$ tots dos termes es fan zero: $\sin(z+n)\cdot 0 = \sin(z-n)\cdot 0 = 0$, mentre que a $x = \pi$ és $\sin(z \pm n)\pi = sin\pi z \cos n\pi \pm \cos \pi z \sin n\pi = (-1)^n \sin \pi z$ (recordem que, per tot $n \in \mathbb{Z}$: $\cos n\pi = (-1)^n$ i $\sin n\pi = 0$).

i $z = 1/4$ en (20),

$$1 = \frac{1}{\pi}\left(4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \times \frac{1}{4}}{k^2 - \frac{1}{16}}\right) \Longrightarrow \pi = 4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{16k^2 - 1}$$

s'obtenen les dues últimes sumes proposades a l'enunciat. ▷