16. TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$

1. Calculeu la $\mathcal{Z}$-transformada de les successions

a) $(1,0,1,0,1,0,1,\ldots)$
$(0,1,0,1,0,1,0,\ldots)$

b) $(1,0,0,1,0,0,1,\ldots)$
$(0,1,0,0,1,0,0,\ldots)$
$(0,0,1,0,0,1,0,\ldots)$

S. (a) $\mathcal{Z}[(1,0,1,0,1,\ldots)](z) = 1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\cdots = \frac{1}{1-1/z^2} = \frac{z^2}{z^2-1}$

$\mathcal{Z}[(0,1,0,1,0,\ldots)](z) = \frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^5}+\cdots = \frac{z}{z^2-1}$ (1 retard).

(b) $\mathcal{Z}[(1,0,0,1,0,0,1,\ldots)](z) = 1+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^6}+\cdots = \frac{1}{1-1/z^3} = \frac{z^3}{z^3-1}$

$\mathcal{Z}[(0,1,0,0,1,0,0,1,\ldots)](z) = \frac{1}{z}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^7}+\cdots = \frac{z^2}{z^3-1}$ (1 retard).

$\mathcal{Z}[(0,0,1,0,0,1,\ldots)](z) = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^8}+\cdots = \frac{z}{z^3-1}$ (2 retards) $\square$

2. Demostreu, per inducció, que:

$$\mathcal{Z}\left[\binom{k}{N}\right] = \frac{z}{(z-1)^{N+1}}, \quad N\in\mathbb{N}.$$

S. Nota. Es defineix: $(y(k)) = \left(\binom{k}{N}\right) = \left(0,\overset{N}{\ldots},0,\binom{N}{N},\binom{N+1}{N},\ldots\right)$, i.e. $y(0) = \binom{0}{N} = 0$, $y(1) = \binom{1}{N} = 0, \ldots, y(N-1) = \binom{N-1}{N} = 0$. En particular $\left(\binom{k}{1}\right) = (0,1,2,3,\ldots)$ i llavors: $\mathcal{Z}\left[\binom{k}{1}\right](z) = \mathcal{Z}[k](z) = \mathcal{Z}[k\cdot 1](z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}$ (1), on hem fet servir la transformada del producte per polinòmiques. Veiem doncs que la fórmula és certa per $N=1$.

A continuació suposarem que també és satisfà per $N=m\geq 1$ (hipòtesi d'inducció) i —sota aquesta hipòtesi—, comprovarem si també es verifica per $N=m+1$.

A partir de: $\binom{k}{m+1} = \frac{k-m}{m+1}\binom{k}{m}$, aplicant la $\mathcal{Z}$-transformada a totes dues bandes:

$$\mathcal{Z}\left[\binom{k}{m+1}\right](z) = \frac{1}{m+1}\mathcal{Z}\left[k\binom{k}{m}\right](z) - \frac{m}{m+1}\mathcal{Z}\left[\binom{k}{m}\right](z) =$$

$$= -\frac{z}{m+1}\frac{d}{dz}\left(\mathcal{Z}\left[\binom{k}{m}\right](z)\right) - \frac{m}{m+1}\cdot\frac{z}{(z-1)^{m+1}} =$$

$$= -\frac{z}{m+1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^{m+1}}\right) - \frac{m}{m+1}\cdot\frac{z}{(z-1)^{m+1}}$$

$$= -\frac{z}{m+1}\cdot\frac{(z-1)^{m+1}-(m+1)z(z-1)^m}{(z-1)^{2m+2}} - \frac{m}{m+1}\cdot\frac{z}{(z-1)^{m+1}}$$

$$= -\frac{z}{m+1}\cdot\frac{(z-1-zm-z)(z-1)^m + m(z-1)^{m+1}}{(z-1)^{2m+2}} =$$

$$= -\frac{z}{m+1}\cdot\frac{z-1-zm-z+m(z-1)}{(z-1)^{m+2}} = \frac{1}{m+1}\cdot\frac{(m+1)z}{(z-1)^{m+2}} = \frac{z}{(z-1)^{m+2}}.$$

que és la fórmula de l'enunciat per $N=m+1$. Llavors el principi d'inducció assegura que la fórmula és certa per tot $N\in\mathbb{N}$. $\square$

• Remarca I. Al pas inductiu també es pot fer servir, alternativament:

$$\binom{k}{m+1} = \frac{k}{m+1}\binom{k-1}{m},$$

d'on, aplicant la $\mathcal{Z}$-transformada a totes dues bandes:

$$\mathcal{Z}\left[\binom{k}{m+1}\right](z) = \frac{1}{m+1}\mathcal{Z}\left[k\binom{k-1}{m}\right](z) \overset{(*)}{=} -\frac{z}{m+1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\mathcal{Z}\left[\binom{k}{m}\right](z)\right) =$$

$$\overset{(**)}{=} -\frac{z}{m+1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\cancel{z}}\cdot\frac{\cancel{z}}{(z-1)^{m+1}}\right) = -\frac{z}{m+1}(-m-1)\frac{1}{(z-1)^{m+2}} = \frac{z}{(z-1)^{m+2}}.$$

(i es veu que surt més fàcil que fent tot lo d'abans!).

(*) Aplicant la fórmula de la $\mathcal{Z}$-transformada del producte per polinòmiques i la de la $\mathcal{Z}$-transformada de la retardada.

(**) Es fa servir la hipòtesi d'inducció.

• Remarca II. A partir d'aquí es pot provar que $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^M}{(z-\lambda)^N}\right](k) = \lambda^{k+M-N}\binom{k+M-1}{N-1}$ per M, N enters $0\leq M\leq N$, $N\geq 1$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda\neq 0$. En efecte: $\mathcal{Z}\left[\lambda^{k+M-N}\binom{k+M-1}{N-1}\right](z) =$

$$\lambda^{M-N}\mathcal{Z}\left[\binom{k+M-1}{N-1}\right](z/\lambda) = \lambda^{M-N}\left[\left(\tfrac{z}{\lambda}\right)^{M-1}\mathcal{Z}\left[\binom{k}{N-1}\right](z/\lambda) - \left(\tfrac{z}{\lambda}\right)^{M-1}\binom{0}{N-1} - \left(\tfrac{z}{\lambda}\right)^{M-2}\binom{0}{N-1} - \cdots\right.$$

$$\left.\cdots - \left(\tfrac{z}{\lambda}\right)\cdot\binom{M-2}{N-1}\right] = \lambda^{M-N}\cdot\frac{z^{M-1}}{\lambda^{M-1}}\cdot\frac{z/\lambda}{(z/\lambda-1)^N} = \frac{z^M}{(z-\lambda)^N}.$$

On hem tingut en compte que $y(k) = \binom{k}{N-1}$ és $y(0) = y(1) = \ldots = y(M-2) = \ldots = y(N-2) = 0$, $(M\leq N)$.

3. Calculeu:

a) $\mathcal{Z}[k^2]$. b) $\mathcal{Z}[k^3]$. c) $\mathcal{Z}[k^4]$.

S. Cal aplicar la fórmula de la $\mathcal{Z}$-transformada del producte per polinòmiques, i.e.:

$$\mathcal{Z}[k^p y(k)](z) = \underbrace{(-zD)\overset{p}{\cdots}(-zD)}\,\mathcal{Z}[y(k)](z) \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

a) $$\mathcal{Z}[k^2]_{(z)} = (-zD)(-zD)\mathcal{Z}[1](z) = (-zD)(-zD)\frac{z}{z-1} = -zD\left(z\frac{1}{(z-1)^2}\right) =$$
$$= -z\frac{(z-1)^2-2z(z-1)}{(z-1)^4} = -z\frac{(z-1)(z-1-2z)}{(z-1)^3} = \boxed{\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}}$$

b) $$\mathcal{Z}[k^3]_{(z)} = -zD\,\mathcal{Z}[k^2](z) - zD\left(\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right) = -z\frac{(z-1)^3(1+2z)-3(z^2+z)(z-1)^2}{(z-1)^6}$$
$$= -z\frac{(z-1)^2(z+2z^2-1-2z-3z^2-3z)}{(z-1)^6} = \boxed{z\frac{z^2+4z+1}{(z-1)^4}}.$$

c) $$\mathcal{Z}[k^4]_{(z)} = -zD\,\mathcal{Z}[k^3](z) = -zD\left(\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}\right) = -z\frac{(z-1)^4(3z^2+8z+1)-4(z^3+4z^2+z)(z-1)^3}{(z-1)^8}$$
$$= -z\frac{(z-1)^3(3z^3+8z^2+z-3z^2-8z-1-4z^3-16z^2-4z)}{(z-1)^8} = \boxed{\frac{z(z^3+11z^2+11z+1)}{(z-1)^5}}. \square$$

4. Calculeu:

a) $\mathcal{Z}[\cos\beta k]$, $\mathcal{Z}[\sin\beta k]$.

b) $\mathcal{Z}[e^{-\alpha k}\cos\beta k]$, $\mathcal{Z}[e^{-\alpha k}\sin\beta k]$.

S. a) $$\mathcal{Z}[\cos\beta k]_{(z)} = \mathcal{Z}\left[\frac{e^{i\beta k}+e^{-i\beta k}}{2}\right]_{(z)} = \frac{1}{2}\mathcal{Z}[(e^{i\beta})^k]_{(z)} + \frac{1}{2}\mathcal{Z}[(e^{-i\beta})^k]_{(z)} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{ze^{-i\beta}}{ze^{-i\beta}-1} + \frac{1}{2}\frac{ze^{i\beta}}{ze^{i\beta}-1} = \frac{1}{2}\frac{2z^2-2z\cos\beta}{z^2-2z\cos\beta+1} = \boxed{\frac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1}}$$

$$\mathcal{Z}[\sin\beta k]_{(z)} = \mathcal{Z}\left[\frac{e^{i\beta k}-e^{-i\beta k}}{2i}\right]_{(z)} = \frac{1}{2i}\mathcal{Z}[(e^{i\beta})^k]_{(z)} - \frac{1}{2i}\mathcal{Z}[(e^{i\beta})^k]_{(z)} =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{ze^{-i\beta}}{ze^{-i\beta}-1} - \frac{ze^{i\beta}}{ze^{i\beta}-1}\right) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{z^2-ze^{-i\beta}-z^2+ze^{i\beta}}{z^2-2z\cos\beta+1} = \boxed{\frac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}}$$

b) $$\mathcal{Z}[e^{-\alpha k}\cos\beta k](z) = \mathcal{Z}[\cos\beta k](e^{\alpha}z) = \boxed{\frac{e^{\alpha}z(e^{\alpha}z-\cos\beta)}{e^{2\alpha}z^2-2e^{\alpha}z\cos\beta+1}}$$

$$\mathcal{Z}[e^{-\alpha k}\sin\beta k](z) = \mathcal{Z}[\sin\beta k](e^{\alpha}z) = \boxed{\frac{ze^{\alpha}\sin\beta}{e^{2\alpha}z^2-2e^{\alpha}z\cos\beta+1}}$$

On hem aplicat la fórmula de la $\mathcal{Z}$-transformada del producte per geomètriques. $\square$

5. * Calculeu, en funció de $\mathcal{Z}[y(k)]$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{y(k)}{k+\alpha}\right].$$

S. $$\mathcal{Z}\left[\frac{y(k)}{k+\alpha}\right](z) = \sum_{k\geq 0}\frac{y(k)}{k+\alpha}z^{-k} = -z^{\alpha}\sum_{k\geq 0}y(k)\frac{-z^{-k-\alpha}}{k+\alpha} =$$
$$= -z^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}y(k)\int z^{-k-\alpha-1}dz = -z^{\alpha}\int\frac{\sum_{k=0}^{\infty}y(k)z^{-k}}{z^{\alpha+1}}dz = -z^{\alpha}\int\frac{\mathcal{Z}[y(k)](z)}{z^{\alpha+1}}dz \ \square$$

6. Demostreu les següents $\mathcal{Z}$-antitransformades

a) $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-\lambda)^3}\right] = \lambda^{k-3}\frac{(k-2)(k-1)}{2}$.

b) $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-\lambda)^3}\right] = \lambda^{k-2}\frac{(k-1)k}{2}$.

c) $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-\lambda)^3}\right] = \lambda^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$.

S. (a) $$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-\lambda)^3}\right]_{(k)} = \mathcal{Z}^{-1}\left[\lambda^{-3}\frac{1}{(z/\lambda-1)^3}\right](k) = \lambda^{-3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z/\lambda}\frac{z/\lambda}{(z/\lambda-1)^3}\right](k)$$
$$\overset{16\cdot 2}{=} \lambda^{-3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z/\lambda}\mathcal{Z}\left[\binom{k}{2}\right](z/\lambda)\right](k) = \lambda^{-3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\mathcal{Z}\left[\binom{k-1}{2}\right]\left(\tfrac{z}{\lambda}\right)\right](k)$$
$$= \lambda^{-3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\mathcal{Z}\left[\lambda^k\binom{k-1}{2}\right](z)\right](k) = \lambda^{k-3}\binom{k-1}{2}$$
$$= \boxed{\lambda^{k-3}\frac{(k-1)(k-2)}{2}}$$

(b) $$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-\lambda)^3}\right](k) =: y(k) \Longrightarrow y(k-1) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-\lambda)^3}\right]_{(k)} \overset{a)}{=} \lambda^{k-3}\frac{(k-1)(k-2)}{2}$$
$$\Longrightarrow y(k) := \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-\lambda)^3}\right](k) = \boxed{\lambda^{k-2}\frac{k(k-1)}{2}}$$

(c) $$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-\lambda)^3}\right](k) =: y(k) \Longrightarrow y(k-1) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-\lambda)^3}\right]_{(k)} \overset{b)}{=} \lambda^{k-2}\frac{k(k-1)}{2}$$
$$\Longrightarrow y(k) := \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-\lambda)^3}\right](k) = \boxed{\lambda^{k-1}\frac{(k+1)k}{2}} \ \square$$

Remarca. Aquest problema surt de manera immediata si s'aplica la fórmula:
$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^M}{(z-\lambda)^N}\right](k) = \lambda^{k+M-N}\binom{k+M-1}{N-1}, \tag{6.1}$$
per M, N enters $0 \leq M \leq N$, $N \geq 1$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ (veure problema 16.2, Remarca II). Així:

a) $M=0, N=3$: $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-\lambda)^3}\right](k) = \lambda^{k-3}\binom{k-1}{2} = \lambda^{k-3}\frac{(k-1)(k-2)}{2}$.

b) $M=1, N=3$: $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-\lambda)^3}\right](k) = \lambda^{k-2}\binom{k}{2} = \lambda^{k-2}\frac{k(k-1)}{2}$.

c) $M=2, N=3$: $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-\lambda)^3}\right](k) = \lambda^{k-1}\binom{k+1}{2} = \lambda^{k-1}\frac{(k+1)k}{2}$.

7. Calculeu les $\mathcal{Z}$-antitransformades de les següents fraccions racionals:

a) $\frac{z+2}{z-1}$. b) $\frac{z-3}{z^2-3z+2}$.

c) $\frac{2z^2-3z}{z^2-3z+2}$. d) $\frac{z}{z^2-6z+8}$.

S. (a) $\frac{z+2}{z-1} = 1 + \frac{3}{z-1} \Longrightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z+2}{z-1}\right](k) = \mathcal{Z}^{-1}[1](k) + \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{3}{z-1}\right](k) =$

$$= (1,0,0,\dots) + 3(0,1,1,\dots) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 3, & k\geq 1 \end{cases} = \boxed{(1,3,3,\dots,3,\dots)}$$

(b) $\frac{z-3}{z^2-3z+2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$: $(z-2)A + (z-1)B = z-3$

$z=2$: $B=-1$

$z=1$: $-A=-2 \Longrightarrow A=2$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z-3}{z^3-3z+2}\right](k) = 2\,\mathcal{Z}\left[\frac{1}{z-1}\right](k) - \mathcal{Z}\left[\frac{1}{z-2}\right](k)$$

$$= 2(0,1,1,\dots,1,\dots) - (0,2,2^2,2^3,\dots,2^k,\dots) = (0,0,2-2^2,\dots)$$

$$= \boxed{(y(k))_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \text{ amb: } y(k) = \begin{cases} 0, & k=0 \\ 2-2^k, & k\geq 1 \end{cases}}$$

(c) $\frac{2z^2-3z}{z^2-3z+2} = z\left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}\right)$: $(z-2)A + (z-1)B = 2z-3$

$z=2$: $B = 4-3 = 1$

$z=1$: $-A=-1 \Longrightarrow A=1$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{2z^2-3z}{z^2-3z+2}\right](k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right](k) + \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right]$$

$$= (1,1,\dots,1,\dots) + (1,2,2^2,\dots,2^k,\dots)$$

$$= (2,3,5,\dots,1+2^k,\dots)$$

$$= \boxed{(1+2^k)_{k=0,1,2,\dots}}$$

(d) $\frac{z}{z^2-6z+8} = z\left(\frac{A}{z-4} + \frac{B}{z-2}\right)$: $(z-2)A + (z-4)B = 1$

$z=2$: $-2B=1 \Longrightarrow B=-\frac{1}{2}$.

$z=4$: $2A=1 \Longrightarrow A=\frac{1}{2}$.

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z^2-6z+8}\right](k) = \frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-4}\right](k) - \frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right](k)$$

$$= \boxed{\left(\tfrac{1}{2}(4^k-2^k)\right)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}} \quad \square$$

8. Resoleu, mitjançant la $\mathcal{Z}$-transformació, les equacions en diferències següents:

a) $y(k+1) + 2y(k) = 4^k$, $y(0) = 0$.

b) $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 1$, $y(0) = y(1) = 2$.

c) $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = k$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1/2$.

d) $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 0$, $y(0) = y(1) = 1$.

e) $y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

S. (a) $zY(z) - zy(0) + 2Y(z) = (z+2)Y(z) = \frac{z}{z-4}$

d'on:

$$Y(z) = \frac{z}{(z+2)(z-4)} = \frac{1}{6}\left(\frac{z}{z-4} - \frac{z}{z+2}\right)$$

$$\boxed{(y(k)) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)](k) = \left(\tfrac{1}{6}(4^k-(-2)^k)\right)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}}$$

(b) $z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - 3zY(z) + 3zy(0) + 2Y(z) =$

$$= (z^2-3z+2)Y(z) - 2z^2 + 4z = \frac{z}{z-1}$$

d'on:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)^2} + 2z\frac{\cancel{z-2}}{(z-1)\cancel{(z-2)}} \quad (\text{suposem } |z|>2)$$

$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2}$: $(z-2)A + (z-2)(z-1)B + (z-1)^2C = 1$

$z=2$: $C=1$.

$z=1$: $-A=1 \Longrightarrow A=-1$

$z=0$: $-2A+2B+C=1 \Longrightarrow B=-1$.

$$Y(z) = -\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2} + \frac{2z}{z-1} = \frac{-z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$

$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right](k) = \binom{k}{1} = k$ (problema 2 amb $N=1$ ó fórmula (6.1) amb $M=1, N=2, \lambda=1$).

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right](k) = 1$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right](k) = 2^k$$

$$\boxed{(y(k)) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)](k) = (-k+1+2^k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}}$$

c) $z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - 5zY(z) + 5zy(0) + 6Y(z) =$

$$= (z^2-5z+6)Y(z) - \frac{z}{2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

d'on:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)(z-3)} + \frac{z/2}{(z-2)(z-3)}$$

$$= \frac12\left(\frac{-3z}{z-2} + \frac{3z/2}{z-3} + \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{3z/2}{z-1}\right)$$

$$\boxed{(y(k)) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)](k) = \left(\frac12\left(-3\cdot 2^k + \frac12 3^{k+1} + k + \frac32\right)\right)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}}$$

d) $z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - 5zY(z) + 5zy(0) + 6Y(z) =$

$$= (z^2-5z+6)Y(z) - z^2 + 4z = 0$$

d'on:

$$Y(z) = z\frac{z-4}{(z-3)(z-2)} = \frac{2z}{z-2} - \frac{z}{z-3}$$

$$\frac{z-4}{(z-3)(z-2)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-3}$$

$(z-3)A + (z-2)B = z-4$

$z=3: B=-1$

$z=2: A=2$

$$(y(k)) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)](k) = (2^{k+1} - 3^k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$$

e) $z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) + 3zY(z) - 3zy(0) + 2Y(z) =$

$$= (z^2+3z+2)Y(z) - z = \frac{2z}{z-1}$$

d'on:

$$Y(z) = \frac{2z}{(z+2)(z+1)(z-1)} + \frac{z}{(z+2)(z+1)},$$

$$= \frac{z/3}{z-1} - \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2} + \frac{2z/3}{z+2} + \frac{z}{z+1} = \frac{z/3}{z-1} - \frac{z/3}{z+2}$$

$$\boxed{(y(k)) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)](k) = \left(\frac13 - \frac13(-2)^k\right)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}} \quad \square$$

9. (INTERESSOS I AMORTITZACIONS)

A) Suposeu que al començament de cada any s'ingressa en un compte bancari una quantitat constant b, més el rèdit produït durant l'any anterior a un interés anual i. Per a l'any k, designeu per $y(k)$ la quantitat acumulada al començament d'any, després de les operacions anteriors: $y(1) = b$, ...

Plantegeu l'equació en diferències que verifica $y(k)$, i resoleu-la per a trobar la seva expressió en funció de k, i i b.

B) De manera anàloga, considereu un procés d'amortització d'un deute D, a un interès anual i, mitjançant l'abonament anual d'una quota constant B. Designeu per $d(k)$ el deute pendent al cap de k anys: $d(0) = D$, ...

Plantegeu l'equació en diferències que verifica $d(k)$, i resoleu-la per a trobar la seva expressió en funció de k, i, B, D.

Deduïu quin ha de ser el valor de B per tal que el deute sigui liquidat en un termini de n anys.

S. A) Sigui $y(k)$ la quantitat acumulada al començament de l'any:

$y(0) = 0,\ y(1) = b,\ y(2) = b + y(1) + iy(1) = b + (1+i)y(1), \ldots$

$\ldots,\ y(k+1) = b + (1+i)y(k), \ldots$

Aplicant la transformada $\mathcal{Z}$: $zY(z) - zy(0) - (i+1)Y(z) = (z-(i+1))Y(z)$

$= b\frac{z}{z-1}$, d'on: $Y(z) = \frac{bz}{(z-1)(z-(i+1))} = \frac{-bz/i}{z-1} + \frac{bz/i}{z-(i+1)}$, i

llavors:

$$\boxed{y(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)](k) = \frac{b}{i}\left((i+1)^k - 1\right),\ k = 0,1,2,\ldots}$$

B) Sigui $d(k)$ el deute pendent al cap de k anys:

$d(0) = D,\ d(1) = (1+i)d(0) - B, \ldots,\ d(k+1) = (1+i)d(k) - B, \ldots$

Aplicant la transformada $\mathcal{Z}$: $zY(z) - zd(0) = (1+i)Y(z) - B\frac{z}{z-1}$,

d'on: $Y(z) = \frac{Dz}{z-(i+1)} - \frac{Bz}{(z-(i+1))(z-1)} = \frac{Dz}{z-(i+1)} + \frac{Bz/i}{z-1} - \frac{Bz/i}{z-(i+1)}$,

i llavors:

$$\boxed{d(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)](k) = \left(D - \frac{B}{i}\right)(i+1)^k + \frac{B}{i},\ k = 0,1,2,\ldots}$$

Aleshores si volem de el deute D sigui liquidat en un termini de n anys, cal $d(n) = 0$ i:

$$\boxed{d(n) = 0 \iff B = \frac{Di(i+1)^n}{(i+1)^n - 1}} \quad \square$$

10. * (MODEL DE LA TERANYINA)

A) Suposeu que la demanda d i la producció s d'un determinat producte depenen linealment del seu preu p segons

$$d(p) = d_0 - a\,p$$
$$s(p) = s_0 + b\,p$$

on a, b, d_0 són constants positives, i s_0 és una constant negativa.

Calculeu el preu d'equilibri p_e.

B) Considerarem en endavant el cas d'una producció periòdica.

Per a fixar idees, suposarem que es tracta d'un producte agrícola anual.

Si designem per $s(k)$ la collita de l'any k, i per $p(k)$ el preu de venda que resulta d'equilibrar l'oferta amb la demanda, justifiqueu les relacions

$$\begin{aligned} s(k) &= d_0 - a\,p(k) \\ s(k+1) &= s_0 + b\,\underline{p}(k+1) \end{aligned}$$

on $\underline{p}(k+1)$ és la previsió de preu que els productors fan a un any vista, en el moment de sembrar.

C) Suposem ara que la previsió de preu és simplement

$$\underline{p}(k+1) = p(k)$$

C.1) Deduïu l'equació en diferències que verifica $p(k)$, i resoleu-la per a trobar la seva expressió en funció de k, p_0, p_e i de la constant $c = \frac{b}{a}$.

C.2) Discutiu l'evolució de $p(k)$ segons els valors de c.

En particular, determineu en quins casos tendeix cap al preu d'equilibri.

C.3) Representeu gràficament l'evolució anterior, sobre els gràfics de les funcions $d(p)$ i $s(p)$.

D) Suposeu ara una estratègia de previsió més complexa, segons la qual $\underline{p}(k+1)$ és el que resulta d'extrapolar linealment l'evolució dels dos últims anys. Es a dir:

$$\underline{p}(k+1) = 2p(k) - p(k-1)$$

D.1) Determineu la nova equació en diferències que verifica $p(k)$.

D.2) Comproveu que el punt d'equilibri p_e n'és també una solució particular (constant).

D.3) Trobeu la solució general d'aquesta equació.

D.4) Discutiu per a quins valors de c el preu evoluciona cap al d'equilibri en aquestes noves circumstàncies.

S. A) Demanda : $d(p) = d_0 - ap$,

Oferta : $s(p) = s_0 + bp$

En l'equilibri l'oferta i la demanda s'han d'igualar en un preu estable que

no provoqui variacions en cap d'ells

$$\boxed{d_0 - ap = s_0 + bp \iff p_e = \frac{d_0 - s_0}{a+b}}$$

B) Una vegada produïda la collita de l'any k, la demanda l'absorbirà tota i fixarà el preu de venda d'aquell any:

$$s(k) = d_0 - a\,p(k).$$

D'altra banda, si es preveu que el preu l'any següent serà $\underline{p}(k+1)$, llavors es produirà segons la llei de l'oferta. Aleshores:

$$s(k+1) = s_0 + b\,\underline{p}(k+1),$$

que farà màxim els beneficis.

C) Si $\underline{p}(k+1) = p(k)$:

C.1) $d_0 - a\,p(k+1) = s_0 + b\,p(k) \iff \boxed{a\,p(k+1) + b\,p(k) + s_0 - d_0 = 0}$

Sigui $P(z) = \mathcal{Z}[p(k)](z)$. Aplicant la $\mathcal{Z}$-transformada a totes dues bandes de l'equació s'obté,

$$a z P(z) - a z p(0) + b P(z) = (az + b) P(z) - a z p_0 = (d_0 - s_0) \frac{z}{z-1}$$

d'on:

$$P(z) = \frac{d_0 - s_0}{a} z \frac{1}{(z-1)(z+c)} + \frac{a p_0}{a} z \frac{1}{z+c}, \text{ essent } c := b/a$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{d_0 - s_0}{a(a+b)} (a+b) \left(\frac{\frac{z}{1+c}}{z-1} - \frac{\frac{z}{1+c}}{z+c} \right) + p_0 \frac{z}{z+c}$$

$$\overset{A)}{=} p_e (1+c) \frac{1}{1+c} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+c} \right) + p_0 \frac{z}{z+c}$$

$$\boxed{p(k) = \mathcal{Z}^{-1}[P(z)](k) = p_e\left(1 - (-c)^k\right) + p_0 (-c)^k = p_e + (-1)^k (p_0 - p_e) \cdot c^k, \ k \in \mathbb{N};\ c = b/a}$$

(*) descomposició en fraccions simples

$$\frac{1}{(z-1)(z+c)} = \frac{A}{z+c} + \frac{B}{z-1} = -\frac{1}{1+c} \cdot \frac{z}{z+c} + \frac{1}{1+c} \cdot \frac{z}{z-1}$$

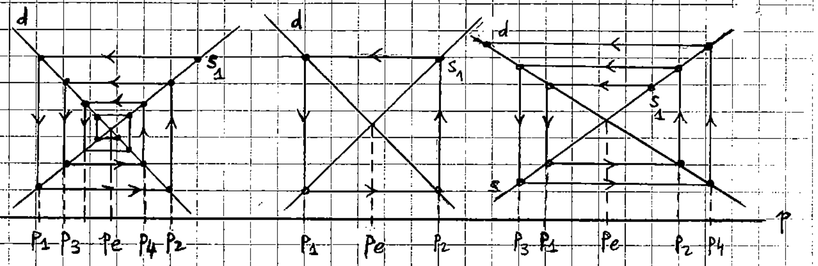
$(z-1)A + (z+c)B = 1$; $z = 1$: $(1+c)B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{1+c}$; $z = -c$: $-(1+c)A = 1 \Rightarrow A = \frac{-1}{1+c}$.

C.2) $b/a = c < 1 \Longrightarrow p(k) \longrightarrow p_e$

$b/a = c = 1 \Longrightarrow \nexists \lim_k p(k)$ però com que $p(2k) = p_0$ i $p(2k+1) =$
$= 2p_e - p_0$, llavors existeixen els límits d'oscil·lació:
$\{p_0, 2p_e - p_0\} \Longrightarrow \lim_k \begin{smallmatrix}\sup\\ \inf\end{smallmatrix} p(k) = \begin{smallmatrix}\text{màx}\\ \text{mín}\end{smallmatrix}\{p_0, 2p_e - p_0\}$.

$b/a = c > 1 \Longrightarrow \nexists \lim_k p(k)$ ni tampoc existeixen límits d'oscil·lació.

C.3)



$c = b/a < 1$ $\quad$ $c = b/a = 1$ $\quad$ $c = b/a > 1$

D) Ara $p(k+1) = 2p(k) - p(k-1)$

D.1)
$$\left.\begin{aligned} s(k+1) &= d_0 - a\,p(k+1) \\ s(k+1) &= s_0 + 2b\,p(k) - b\,p(k-1) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{a\,p(k+1) + 2b\,p(k) - b\,p(k-1) = d_0 - s_0}$$
$k = 1, 2, 3, \ldots$

D.2) $p(k) = p_e \;\; \forall k = 1,2,3,\ldots$:
$$a p_e + 2b p_e - b p_e = (a+b) p_e = (a+b)\cdot\frac{d_0 - s_0}{a+b} = d_0 - s_0$$

D.3)
$$a z P(z) - a z p(0) + 2b P(z) - b\frac{P(z)}{z} = (d_0 - s_0)\frac{z}{z-1}$$
$$a\left(z + 2c - \frac{c}{z}\right)P(z) - a p_0 z = \frac{a}{z}(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)P(z) - a p_0 z = (d_0 - s_0)\frac{z}{z-1}$$

on: $\lambda_\pm = -c \pm \sqrt{c^2 + c}$, $c = b/a$

$$\boxed{P(z) = \frac{d_0 - s_0}{a+b}(1+c)\,z\,\frac{z}{(z-1)(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)} + p_0\, z\,\frac{z}{(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)}}$$

$$\frac{z}{(z-1)(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-\lambda_+} + \frac{C}{z-\lambda_-}$$
$$(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)A + (z-1)(z-\lambda_-)B + (z-1)(z-\lambda_+)C = z$$
$$z = \lambda_+ : \; (\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)B = \lambda_+ \Longrightarrow B = \frac{\lambda_+}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)},$$
$$z = \lambda_- : \; (\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)C = \lambda_- \Longrightarrow C = \frac{\lambda_-}{(\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)},$$
$$z = 1 : \; (1-\lambda_+)(1-\lambda_-)A = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_- - 1)},$$

$$\frac{z}{(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)} = \frac{\tilde{A}}{z-\lambda_+} + \frac{\tilde{B}}{z-\lambda_-} ; \; (z-\lambda_-)\tilde{A} + (z-\lambda_+)\tilde{B} = z$$
$$z = \lambda_+ : \; (\lambda_+ - \lambda_-)\tilde{A} = \lambda_+ \Longrightarrow \tilde{A} = \frac{\lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_-}$$
$$z = \lambda_- : \; (\lambda_- - \lambda_+)\tilde{B} = \lambda_- \Longrightarrow \tilde{B} = \frac{\lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+}$$

$$(\lambda_+ - 1)(\lambda_- - 1) = \left(-c + \sqrt{c^2+c} - 1\right)\left(-c - \sqrt{c^2+c} - 1\right) = \left(c - \sqrt{c^2+c} + 1\right)\left(c + \sqrt{c^2+c} + 1\right)$$
$$= c + 1.$$
$$\lambda_+ - \lambda_- = -c + \sqrt{c^2+c} + c + \sqrt{c^2+c} = 2\sqrt{c^2+c}$$
$$\lambda_- - \lambda_+ = -2\sqrt{c^2+c}.$$

$$P(z) = p_e(1+c)\left\{\frac{1}{1+c}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{\lambda_+}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)}\cdot\frac{z}{z-\lambda_+} + \frac{\lambda_-}{(\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)}\cdot\frac{z}{z-\lambda_-}\right\} +$$
$$+ p_0\left\{\frac{\lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_-}\cdot\frac{z}{z-\lambda_+} + \frac{\lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+}\cdot\frac{z}{z-\lambda_-}\right\}$$

Per últim, calculem l'antitransformada:

$$p(k) = \mathcal{Z}^{-1}[P(z)](k) = p_e + \frac{(1+c)p_e}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)}\lambda_+^{k+1} + \frac{(1+c)p_e}{(\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)}\lambda_-^{k+1} +$$
$$+ \frac{p_0}{\lambda_+ - \lambda_-}\lambda_+^{k+1} + \frac{p_0}{\lambda_- - \lambda_+}\lambda_-^{k+1}$$
$$= p_e + \left[\frac{(1+c)p_e}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)} + \frac{p_0}{\lambda_+ - \lambda_-}\right]\lambda_+^{k+1} + \left[\frac{(1+c)p_e}{(\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)} + \frac{p_0}{\lambda_- - \lambda_+}\right]\lambda_-^{k+1} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} p(k) = p_e &+ (-1)^k\left[\frac{(1+c)p_e}{2\left(c+1-\sqrt{c^2+1}\right)\sqrt{c^2+c}} - \frac{p_0}{2\sqrt{c^2+c}}\right]\left(c-\sqrt{c^2+c}\right)^{k+1} \\ &+ (-1)^{k+1}\left[\frac{(1+c)p_e}{2\left(c+1+\sqrt{c^2+1}\right)\sqrt{c^2+c}} - \frac{p_0}{2\sqrt{c^2+c}}\right]\left(c+\sqrt{c^2+c}\right)^{k+1}, \quad k=1,2,3,\ldots \end{aligned}}$$

b.4) Tenim que: $|\lambda_+|<|\lambda_-|$ i perquè la solució tendeixi cap a l'equilibri cal que siguin <1, i.e.:

$$0<|\lambda_+|<|\lambda_-| = c+\sqrt{c^2+c} < 1,$$

o equivalentment:

$$0<\sqrt{c^2+c} < 1-c \iff c^2+c<1-2c+c^2 \iff 3c<1,$$

i recordem que $c = b/a > 0$. O sigui, el preu tendirà cap l'equilibri si i només si:

$$\boxed{0<c<\tfrac{1}{3}}$$

□

11. * Trobeu la llei de fomació i el límit de la successió

$$2/1, 5/2, 12/5, 29/12, 70/29, 169/70, \ldots$$

S.
$$\frac{a(k+2)}{b(k+2)} = \frac{a(k)+2a(k+1)}{a(k+1)} = 2+\frac{a(k)}{a(k+1)},$$

amb: $a(0)=2$; $a(1)=5$; $b(0)=1$; $b(1)=2$

$$a(k+2) = a(k)+2a(k+1) \qquad (*)$$

Sigui $A(z) = \mathcal{Z}[a(k)](z)$. Aplicant la $\mathcal{Z}$-transformada a totes dues bandes de $(*)$ s'obté:

$$z^2A(z)-z^2a(0)-za(1) = A(z)+2zA(z)-2za(0)$$

$$\iff \left(z^2-2z-1\right)A(z) = z(2z+1)$$

d'on:

$$A(z) = z\frac{2z+1}{\left(z-(1+\sqrt{2})\right)\left(z-(1-\sqrt{2})\right)} = \frac{4+3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{z}{z-(1+\sqrt{2})} + \frac{4-3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{z}{z-(1-\sqrt{2})}$$

NOTE BOOK

i a continuació, calculem la transformada inversa:

$$\boxed{a(k) = \mathcal{Z}^{-1}[A(z)](k) = \frac{4+3\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^k + \frac{4-3\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^k, \quad k=0,1,2,\ldots}$$

Aleshores els termes de la successió $c(k) = 2+a(k-2)/a(k-1)$; $k\geq 2$:

$$c(0) = \frac{a(0)}{b(0)} = \frac{2}{1},\ c(1) = \frac{a(1)}{b(1)} = \frac{5}{2}, \ldots, c(k) = 2+\frac{a(k-2)}{a(k-1)}, k\geq 2$$

vindran donats explícitament per:

$$c(k) = 2+\frac{a(k-2)}{a(k-1)} = 2+\frac{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{k-2}\left\{1+\left(12\sqrt{2}-17\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)^{k-2}\right\}}{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{k-1}\left\{1+\left(12\sqrt{2}-17\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)^{k-1}\right\}}$$

$$\boxed{c(k) = 2+\frac{1+\left(12\sqrt{2}-17\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)^{k-2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left\{1+\left(12\sqrt{2}-17\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)^{k-1}\right\}}, \quad k\geq 2}$$

i com que $0<|2\sqrt{2}-3| = 0'17157\ldots < 1$ resulta:

$$c(k) \longrightarrow 2+\frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2},$$

quan $k\longrightarrow\infty$. □

12. * (NÚMEROS DE FIBONACCI)

Considereu el números de Fibonacci F_k definits per

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 1 \\ F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} \qquad k\geq 2 \end{aligned}$$

a) Trobeu una fòrmula explícita de F_k, en funció de k.

b) Calculeu: $\lim_k \frac{F_{k+1}}{F_k}$ ("relació aúria")

c) Demostreu que
$$F_1^2+\ldots+F_k^2 = F_kF_{k+1}$$

(Nota: per a (b) i (c), no cal utilitzar (a)).

S. a) Equivalentment s'escriurà:

$$F(0)=0,\ F(1)=1;\ F(k+2) = F(k+1)+F(k),\ k\geq 0.$$

Sigui $f(z) = \mathcal{Z}[F(k)](z)$. Llavors: $z^2f(z)-z^2F(0)-zF(1)-zf(z)+zF(0)-$

$$-f(z) = \left(z^2-z-1\right)f(z) = z \Longrightarrow f(z) = z\frac{z}{\left(z-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

NOTE BOOK

Descomposant en fraccions simples:

$$\frac{z}{\left(z-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)} = \frac{1/\sqrt5}{z-\frac{1+\sqrt5}{2}} - \frac{1/\sqrt5}{z-\frac{1-\sqrt5}{2}},$$

$$f(z) = \frac{z/\sqrt5}{z-\frac{1+\sqrt5}{2}} - \frac{z/\sqrt5}{z-\frac{1-\sqrt5}{2}}.$$

$$\Longrightarrow \boxed{F(k) = \mathcal{Z}^{-1}[f(z)](k) = \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^k}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

b) $$\lim_k \frac{F(k+1)}{F(k)} = \lim_k \frac{\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k+1}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt5}{1+\sqrt5}\right)^{k+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{k}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt5}{1+\sqrt5}\right)^{k}\right]} = \boxed{\frac{1+\sqrt5}{2}}.$$

c) Per inducció: veiem que és cert per $k=1$. En efecte $F_1^2 = 1 = F_1 F_2$.

Suposem que és cert per $k = m \geq 1$ (hipòtesi d'inducció) i comprovem que també es satisfà per $k = m+1$:

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_m^2 + F_{m+1}^2 = F_m F_{m+1} + F_{m+1}^2 = (F_m + F_{m+1}) F_{m+1}$$

$$= F_{m+1} F_{m+2}.$$

I per tant és cert $\forall k \in \mathbb{N}$. $\square$