

Transformada \mathcal{Z}

Problemes

1. Calcula la \mathcal{Z} -transformada de les successions

$$\begin{aligned} &(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \\ &(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) \\ &(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots) \\ &(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) \\ &(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots) \end{aligned}$$

◁ **Solució.**

$$\mathcal{Z}[(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)](z) = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \dots = \frac{1}{1 - 1/z^2} = \frac{z^2}{z^2 - 1}.$$

$$\mathcal{Z}[(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)](z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \dots = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots \right) = \frac{1/z}{1 - 1/z^2} = \frac{z}{z^2 - 1}$$

(1-retardada).

$$\mathcal{Z}[(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)](z) = 1 + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} + \dots = \frac{1}{1 - 1/z^3} = \frac{z^2}{z^3 - 1}.$$

$$\mathcal{Z}[(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)](z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^7} + \dots = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} + \dots \right) = \frac{1/z}{1 - 1/z^3} = \frac{z^2}{z^3 - 1}$$

(1-retardada).

$$\mathcal{Z}[(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \dots)](z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^8} + \dots = \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} + \dots \right) = \frac{1/z^2}{1 - 1/z^3} = \frac{z}{z^3 - 1}$$

(2-retardada). ▷

2. Demostreu, per inducció que

$$\mathcal{Z} \left[\binom{k}{N} \right] (z) = \frac{z}{(z-1)^{N+1}}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

◁ **Solució.** Amb la definició dels coeficients binomials, notem que la successió:

$$(y(k))_{k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}} = \left(\binom{k}{N} \right)_{k \in \mathbb{N}_0} = \left(0, \dots, 0, \binom{N}{N}, \binom{N+1}{N}, \binom{N+2}{N}, \dots, \binom{k}{N}, \dots \right), \quad (1)$$

i. e.:

$$y(0) = \binom{0}{N} = 0, \quad y(1) = \binom{1}{N} = 0, \dots, y(N-1) = \binom{N-1}{N} = 0. \quad (2)$$

En particular, $\left(\binom{k}{1}\right)_{k \in \mathbb{N}_0} = (0, 1, 2, 3, \dots)$ i llavors:

$$\mathcal{Z} \left[\binom{k}{1} \right] (z) = \mathcal{Z}[k](z) = \mathcal{Z}[k \cdot 1](z) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad (3)$$

on hem fet servir la transformada del producte per polinòmiques. Així doncs, veiem que la fórmula és certa per $N = 1$.

Suposarem a continuació que es satisfà per $N = m > 1$ (hipòtesi d'inducció) i —sota aquesta hipòtesi—, comprovarem si també és cert per $N = m + 1$. A partir de:

$$\binom{k}{m+1} = \frac{k-m}{m+1} \binom{k}{m},$$

aplicant la \mathcal{Z} -transformada a totes dues bandes:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[\binom{k}{m+1} \right] (z) &= \frac{1}{m+1} \mathcal{Z} \left[k \cdot \binom{k}{m} \right] (z) - \frac{m}{m+1} \mathcal{Z} \left[\binom{k}{m} \right] (z) \\ &= -\frac{z}{m+1} \times \frac{d}{dz} \left(\mathcal{Z} \left[\binom{k}{m} \right] (z) \right) - \frac{m}{m+1} \times \frac{z}{(z-1)^{m+1}} \\ &= -\frac{z}{m+1} \times \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z-1)^{m+1}} \right) - \frac{m}{m+1} \times \frac{z}{(z-1)^{m+1}} \\ &= -\frac{z}{m+1} \times \frac{(z-1)^{m+1} - (m+1)z(z-1)^m}{(z-1)^{2m+2}} - \frac{m}{m+1} \times \frac{z}{(z-1)^{m+1}} \\ &= -\frac{z}{m+1} \times \frac{(z-1-mz-z)(z-1)^m + m(z-1)^{m+1}}{(z-1)^{2m+2}} \\ &= -\frac{z}{m+1} \times \frac{z-1-mz-z+m(z-1)}{(z-1)^{m+2}} \\ &= \frac{1}{m+1} \times \frac{(m+1)z}{(z-1)^{m+1}} = \frac{z}{(z-1)^{m+2}}, \end{aligned}$$

que és la fórmula de l'enunciat per $N = m + 1$. Llavors el principi d'inducció assegura que la fórmula és certa per tot $N \in \mathbb{N}$.

REMARCA 1.1. Al pas inductiu es pot fer servir també, alternativament:

$$\binom{k}{m+1} = \frac{k}{m+1} \binom{k-1}{m},$$

d'on, aplicant la \mathcal{Z} -transformada a totes dues bandes:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[\binom{k}{m+1} \right] (z) &= \frac{1}{m+1} \mathcal{Z} \left[k \binom{k-1}{m} \right] (z) \stackrel{(*)}{=} -\frac{z}{m+1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} \mathcal{Z} \left[\binom{k}{m} \right] (z) \right) = \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} -\frac{z}{m+1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} \times \frac{z}{(z-1)^{m+1}} \right) = -\frac{z}{m+1} (-m-1) \frac{1}{(z-1)^{m+1}} = \frac{z}{(z-1)^{m+2}} \end{aligned}$$

i així s'aconsegueix una certa simplificació respecte del procés de dalt.

REMARCA 1.2. A partir d'aquí es pot provar que:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z^M}{(z-\lambda)^N} \right] (k) = \lambda^{k+M-N} \binom{k+M-1}{N-1}, \quad (4)$$

(*)Aplicant la fórmula de la \mathcal{Z} -transformada del producte per polinòmiques i de la \mathcal{Z} -transformada de la retardada.

(†)Es fa servir ara la hipòtesi d'inducció.

per M, N enters amb: $0 \leq M \leq N$, $N \geq 1$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. En efecte:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[\lambda^{k+M-N} \binom{k+M-N}{N-1} \right] (z) &= \lambda^{M-N} \mathcal{Z} \left[\binom{k+M-1}{N-1} \right] \left(\frac{z}{\lambda} \right) = \\ &= \lambda^{M-N} \left\{ \left(\frac{z}{\lambda} \right)^{M-1} \mathcal{Z} \left[\binom{k}{N-1} \right] \left(\frac{z}{\lambda} \right) - \left(\frac{z}{\lambda} \right)^{M-1} \binom{0}{M-1} - \left(\frac{z}{\lambda} \right)^{M-2} \binom{1}{N-1} - \dots \right. \\ &\quad \left. \dots - \frac{z}{\lambda} \binom{M-2}{N-1} \right\} = \lambda^{M-N} \left(\frac{z}{\lambda} \right)^{M-1} \frac{\frac{z}{\lambda}}{\left(\frac{z}{\lambda} - 1 \right)^N} = \frac{z^M}{(z-\lambda)^N} \end{aligned}$$

on hem aplicat la transformada del producte per geomètriques i les fórmules d'avançament (transformada de l'avançada) a la successió $(y(k))_{k \in \mathbb{N}_0} = \left(\binom{k}{N} \right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ definida per (1), (2) i que llavors $y(0) = \binom{0}{N} = 0, y(1) = \binom{1}{N}, \dots, y(M-2) = \binom{M-2}{N}, \dots, y(N-2) = \binom{N-2}{N-1} = 0$. Notem, a més que és necessari que $M \leq N$. Així, per exemple és clar que no existeix $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z^2}{z-1} \right] (k)$, puix d'altra banda si existís $(y(k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ tal que $\mathcal{Z} [y(k)] (z) = \frac{z^2}{z-1}$ aleshores: $\mathcal{Z} [y(k-1)] (z) = \frac{z}{z-1}$, d'on $y(k-1) = 1$ per $k = 1, 2, \dots$ però llavors $y(k) = 1$ per $k = 0, 1, 2, \dots$ la qual cosa és una contradicció perquè $\mathcal{Z} [(1, 1, 1, \dots)] (z) = \frac{z}{z-1}$. ▽

2. Calculeu:

- (a) $\mathcal{Z} [k^z]$. (b) $\mathcal{Z} [k^3]$. (c) $\mathcal{Z} [k^4]$.

◁ **Solució.** Cal aplicar la fórmula de la \mathcal{Z} -transformada del producte per polinòmiques. Recordem:

$$\mathcal{Z} [k^p y(k)] (z) = (-z D)^{.p}. (-z D) \mathcal{Z} [y(k)] (z), \quad p \in \mathbb{N} \quad (5)$$

on D denota derivació respecte de z , i. e.: $D = \frac{d}{dz}$. Llavors:

$$\begin{aligned} \text{(a) } \mathcal{Z} [k^2] (z) &= (-z D)(-z D) \mathcal{Z} [1] (z) = (-z D)(-z D) \frac{z}{z-1} = -z D \left[\frac{z}{(z-1)^2} \right] \\ &= -z \frac{(z-1)^2 - 2z(z-1)}{(z-1)^4} = -z \frac{(z-1)(z-1-2z)}{(z-1)^4} \\ &= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } \mathcal{Z} [k^3] (z) &= -z D \mathcal{Z} [k^2] (z) = -z D \left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \right] \\ &= -z \frac{(z-1)^3(1+2z) - 3(z^2+z)(z-1)^2}{(z-1)^6} \\ &= -z \frac{(z-1)^2(z+2z^2-1-2z-3z^2-3z)}{(z-1)^6} \\ &= z \frac{z^2+4z+1}{(z-1)^4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) } \mathcal{Z} [k^4] (z) &= -z D \mathcal{Z} [k^3] (z) = -z D \left[\frac{z^2+4z+1}{(z-1)^4} \right] \\ &= -z \frac{(z-1)^4(3z^2+8z+1) - 4(z^3+4z^2+z)(z-1)^3}{(z-1)^8} \\ &= -z \frac{(z-1)^3(3z^3+8z^2+z-3z^2-8z-1-4z^3-16z^2-4z)}{(z-1)^8} \\ &= z \frac{z^3+11z^2+11z+1}{(z-1)^5}. \triangleright \end{aligned}$$

3. Calculeu:

(a) $\mathcal{Z} [\cos \beta k]$, $\mathcal{Z} [\sin \beta k]$.

(b) $\mathcal{Z} [e^{-\alpha k} \cos \beta k]$, $\mathcal{Z} [e^{-\alpha k} \sin \beta k]$.

◁ **Solució.** (a) Tenint en compte que $\cos \beta k = \frac{1}{2} (e^{i\beta k} + e^{-i\beta k})$, essent $i = \sqrt{-1}$, i la linealitat de la \mathcal{Z} -transformada resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} [\cos \beta k] (z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{e^{i\beta k} + e^{-i\beta k}}{2} \right] (z) = \frac{1}{2} \mathcal{Z} [(e^{i\beta})^k] (z) + \frac{1}{2} \mathcal{Z} [(e^{-i\beta})^k] (z) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{ze^{-i\beta}/2}{ze^{-i\beta} - 1} + \frac{ze^{i\beta}/2}{ze^{i\beta} - 1} \right) = \frac{z^2 - z \cos \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1} = \frac{z(z - \cos \beta)}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}. \end{aligned}$$

Per l'altra, faren ús de $\sin \beta k = \frac{1}{2} (e^{i\beta k} - e^{-i\beta k})$. Llavors:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} [\sin \beta k] (z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{e^{i\beta k} - e^{-i\beta k}}{2} \right] (z) = \frac{1}{2i} \mathcal{Z} [(e^{i\beta})^k] (z) - \frac{1}{2i} \mathcal{Z} [(e^{-i\beta})^k] (z) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{ze^{-i\beta}}{ze^{-i\beta} - 1} - \frac{ze^{i\beta}}{ze^{i\beta} - 1} \right) = \frac{1}{2i} \times \frac{z^2 - ze^{-i\beta} - z^2 + ze^{i\beta}}{z^2 - 2z \cos \beta + 1} = \frac{z \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1} \end{aligned}$$

(b) aplicarem la fórmula per la transformada del “producte per geomètriques”, i. e.:

$$\mathcal{Z} [\lambda^k y(k)] (z) = \mathcal{Z} y(k)(z/\lambda), \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{C} \quad (6)$$

Amb això i els resultats de l'apartat anterior tenim, per la primera transformada:

$$\mathcal{Z} [e^{-\alpha k} \cos \beta k] (z) = \mathcal{Z} [\cos \beta k] (e^\alpha z) = \frac{e^\alpha z (e^\alpha z - \cos \beta)}{e^{2\alpha} z^2 - 2e^\alpha z \cos \beta + 1}$$

i per la segona,

$$\mathcal{Z} [e^{-\alpha k} \sin \beta k] (z) = \mathcal{Z} [\sin \beta k] (e^\alpha z) = \frac{e^\alpha z \sin \beta}{e^{2\alpha} z^2 - 2e^\alpha z \cos \beta + 1} \triangleright$$

4. Calculeu, en funció de $\mathcal{Z} [y(k)] (z)$

$$\mathcal{Z} \left[\frac{y(k)}{k + \alpha} \right] (z)$$

◁ **Solució.**

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[\frac{y(k)}{k + \alpha} \right] (z) &= \sum_{k \geq 0} \frac{y(k)}{k + \alpha} z^{-k} = -z^\alpha \sum_{k \geq 0} y(k) \frac{-z^{-k-\alpha}}{k + \alpha} = \\ &= -z^\alpha \sum_{k \geq 0} y(k) \int z^{-k-\alpha-1} dz = -z^\alpha \int \frac{\sum_{k \geq 0} y(k) z^{-k}}{z^{\alpha+1}} dz = -z^\alpha \int \frac{\mathcal{Z} [y(k)] (z)}{z^{\alpha+1}} dz. \triangleright \end{aligned}$$

5. Demostreu les següents \mathcal{Z} -antitransformades

a) $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{(z - \lambda)^3} \right] = \lambda^{k-3} \frac{(k-2)(k-1)}{2}$.

b) $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z - \lambda)^3} \right] = \lambda^{k-2} \frac{(k-1)k}{2}$.

c) $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z^2}{(z - \lambda)^3} \right] = \lambda^{k-1} \frac{k(k+1)}{2}$.

◁ **Solució.**

$$\begin{aligned}
 \text{(a) } y(k) &:= \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{(z-\lambda)^3} \right] (k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[\lambda^{-3} \frac{1}{(z/\lambda-1)^3} \right] (k) = \lambda^{-3} \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{z/\lambda} \times \frac{z/\lambda}{(z/\lambda-1)^3} \right] (k) \\
 &\stackrel{16.2}{=} \lambda^{-3} \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{z/\lambda} \mathcal{Z} \left[\binom{k}{2} \right] \left(\frac{z}{\lambda} \right) \right] (k) = \lambda^{-3} \mathcal{Z}^{-1} \left[\mathcal{Z} \left[\binom{k}{2} \right] \left(\frac{z}{\lambda} \right) \right] (k) \\
 &= \lambda^{-3} \mathcal{Z}^{-1} \left[\mathcal{Z} \left[\binom{k-1}{2} \right] \left(\frac{z}{\lambda} \right) \right] (k) = \lambda^{-3} \mathcal{Z}^{-1} \left[\mathcal{Z} \left[\lambda^k \binom{k-1}{2} \right] (z) \right] (k) \\
 &= \lambda^{k-3} \binom{k-1}{2} = \lambda^{k-3} \frac{(k-1)(k-2)}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b) } y(k) &:= \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z-\lambda)^3} \right] (k) \implies y(k-1) = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{(z-\lambda)^3} \right] (k) \stackrel{\text{(a)}}{=} \lambda^{k-3} \frac{(k-1)(k-2)}{2} \implies \\
 &\implies y(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z-\lambda)^3} \right] (k) = \lambda^{k-2} \frac{k(k-1)}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c) } y(k) &:= \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z^2}{(z-\lambda)^3} \right] (k) \implies y(k-1) = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z-\lambda)^3} \right] (k) \stackrel{\text{(b)}}{=} \lambda^{k-2} \frac{k(k-1)}{2}. \\
 &\implies y(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z^2}{(z-\lambda)^3} \right] (k) = \lambda^{k-1} \frac{(k+1)k}{2}. \triangleright
 \end{aligned}$$

REMARCA 1.3. Aquest resultat surt de manera immediata aplicant la fórmula (4) —remarca 1.2, problema 2. En efecte:

$$\text{(a) } M = 0 \leq N = 3 \geq 1 : \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{(z-\lambda)^3} \right] (k) = \lambda^{k-3} \binom{k-1}{2} = \lambda^{k-3} \frac{(k-1)(k-2)}{2}.$$

$$\text{(b) } M = 1 \leq N = 3 \geq 1 : \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z-\lambda)^3} \right] (k) = \lambda^{k-2} \binom{k}{2} = \lambda^{k-2} \frac{k(k-1)}{2}.$$

$$\text{(c) } M = 2 \leq N = 3 \geq 1 : \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z^2}{(z-\lambda)^3} \right] (k) = \lambda^{k-1} \binom{k+1}{2} = \lambda^{k-1} \frac{(k+1)k}{2}. \triangleright$$

6. Calculeu les \mathcal{Z} -antitransformades de les següents fraccions racionals:

$$\text{(a) } \frac{z+2}{z-1}, \quad \text{(b) } \frac{z-3}{z^2-3z+2}, \quad \text{(c) } \frac{2z^2-3z}{z^2-3z+2}, \quad \text{(d) } \frac{z}{z^2-6z+8}.$$

◁ **Solució.** (a) Arran de la descomposició en fraccions simples s'obté:

$$\begin{aligned}
 \frac{z+2}{z-1} &= 1 + \frac{3}{z-1} \implies \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z+2}{z-1} \right] (k) = \mathcal{Z}^{-1} [1] (k) + \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{3}{z-1} \right] (k) = \\
 &= (1, 0, 0, \dots, 0, \dots) + (0, 3, 3, \dots, 3, \dots) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad k=0 \\ 3, \quad k \geq 1 \end{array} \right\} = (1, 3, 3, \dots, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

(b) Igualment, descomposant en fraccions simples:

$$\frac{z-3}{z^2-3z+2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} \implies (z-2)A + (z-1)B = z-3 \implies \begin{cases} z=2 \implies B=-1, \\ z=1 \implies A=2. \end{cases}$$

S'obté:

$$\begin{aligned} y(k) &= \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z-3}{z^2-3z+2} \right] (k) \\ &= 2\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{z-1} \right] (k) - \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{1}{z-2} \right] (k) \\ &= 2(0, 1, 1, \dots, 1, \dots) + (0, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^k, \dots) \\ &= (0, 0, 2-2^2, 2-2^3, \dots, 2-2^k, \dots), \end{aligned}$$

o, en notació més compacta:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z-3}{z^2-3z+2} \right] (k) = \begin{cases} 0, & k=0, \\ 2-2^k, & k \geq 1. \end{cases}$$

(c) De la mateixa manera, descomposem primer en fraccions simples:

$$\frac{2z^2-3z}{z^2-3z+2} = z \left(\frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} \right) \implies (z-2)A + (z-1)B = 2z-3 \implies \begin{cases} z=2 \implies B=1, \\ z=1 \implies A=1, \end{cases}$$

i després, per la linealitat de la \mathcal{Z} -transformada (i per tant de la \mathcal{Z} -antitransformada):

$$\begin{aligned} y(k) &= \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{2z^2-3z}{z^2-3z+2} \right] (k) \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-1} \right] (k) + \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-2} \right] (k) \\ &= (1, 1, 1, \dots, 1, \dots) + (1, 2, 2^2, \dots, 2^k, \dots) \\ &= (2, 3, 5, \dots, 1+2^k, \dots) \\ &= (1+2^k)_{k \in \mathbb{N}_0} \end{aligned}$$

on, recordem, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

(d) Un cop més, descomposem en fraccions simples:

$$\frac{z}{z^2-6z+8} = z \left(\frac{A}{z-4} + \frac{B}{z-2} \right) \implies (z-2)A + (z-4)B = 1 \implies \begin{cases} z=2 \implies B=-1/2, \\ z=4 \implies A=1/2. \end{cases}$$

Amb això:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z^2-6z+8} \right] (k) = \frac{1}{2} \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-4} \right] (k) - \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-2} \right] (k) = \left(\frac{1}{2} (4^k - 2^k) \right) \triangleright$$

7. Resoleu, mitjançant la \mathcal{Z} -transformació, les equacions en diferències següents:

- $y(k+1) + 2y(k) = 4^k, y(0) = 0.$
- $y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 1, y(0) = y(1) = 2.$
- $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = k, y(0) = 0, y(1) = 1/2.$
- $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 0, y(0) = y(1) = 1.$
- $y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2, y(0) = 0, y(1) = 1.$

◁ **Solució.** Sigui:

$$Y(z) := \mathcal{Z}[y(k)](z).$$

Amb aquesta definició.

(a) Apliquem la \mathcal{Z} -transformada a totes dues bandes de l'equació:

$$zY(z) - zy(0) + 2Y(z) = (z+2)Y(z) = \frac{z}{z-4},$$

on hem substituït la condició inicial, $y(0) = 0$. Això clarament produeix una equació lineal algebraica en la \mathcal{Z} -transformada de $y(k)$, $Y(z)$. Aleshores, per trobar la solució, $(y(k))_{k \in \mathbb{N}_0}$, caldrà primer aïllar

la funció $Y(z)$,

$$Y(z) = \frac{z}{(z+2)(z-4)} = \frac{1}{6} \left(\frac{z}{z-4} + \frac{z}{z+2} \right)$$

i després trobar la seva \mathcal{Z} -antitransformada:

$$(y(k))_{k \in \mathbb{N}_0} = \mathcal{Z}^{-1} [Y(z)](k) = \left(\frac{1}{6} (4^k - (-2)^k) \right)_{k \in \mathbb{N}_0}.$$

(b) Com a l'apartat anterior, apliquem la \mathcal{Z} -transformada a la dreta i a l'esquerra de l'equació per obtenir

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1) - 3zY(z) + 3zy(0) + 2Y(z) = (z^2 - 3z + 2)Y(z) - 2z^2 + 4z = \frac{z}{z-1},$$

on hem substituït les condicions inicials: $y(0) = y(1) = 2$. Aïllant $Y(z)$ de l'equació de dalt s'arriba a:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)^2} + \frac{2z}{z-1}$$

(suposem $|z| > 2$). A continuació, descomposem en fraccions simples

$$\frac{z}{(z-1)^2(z-2)} = z \left(\frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2} \right) \Rightarrow (z-2)A + (z-2)(z-1)B + (z-1)^2 C = 1;$$

$$\text{d'on: } \begin{cases} z=2 \Rightarrow C=1, \\ z=1 \Rightarrow A=-1, \\ z=0 \Rightarrow -2A+2B+C=1 \Rightarrow B=-1. \end{cases}$$

Amb això,

$$\frac{z}{(z-1)^2(z-2)} = -\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$

i obtenim doncs la descomposició:

$$Y(z) = -\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2} + \frac{2z}{z-1} = -\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}.$$

Per últim, s'haurà de calcular \mathcal{Z} -antitransformada. Explícitament:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1} [Y(z)](k) = -\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z-1)^2} \right](k) + \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-1} \right](k) + \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-2} \right](k) = -\binom{k}{1} + 1 + 2^k$$

on la primera surt directament aplicant el resultat problema 2 amb $N = 1$ o bé de la fórmula (4) amb $M = 1, N = 2, \lambda = 1$ (veure remarca 1.2 al mateix problema). Resumint:

$$(y(k))_{k \in \mathbb{N}_0} = \mathcal{Z}^{-1} [Y(z)](k) = (-k + 1 + 2^k)_{k \in \mathbb{N}_0}.$$

(c) Aplicant la \mathcal{Z} -transformada a totes dues bandes de l'equació resulta:

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1) - 5zY(z) + 5zy(0) + 6Y(z) = (z^2 - 5z + 6)Y(z) - \frac{z}{2} = \frac{z}{(z-1)^2},$$

on es substitueixen les condicions inicials $y(0) = 0$ i $y(1) = 1/2$. D'aquí, aïllant $Y(z)$ i descomposant en fraccions simples obtenim:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)(z-3)} + \frac{z/2}{(z-2)(z-3)} = \frac{-3z/2}{z-2} + \frac{3z/4}{z-3} + \frac{z/2}{(z-1)^2} + \frac{3z/4}{z-1}.$$

Finalment, per tenir la solució de l'equació en diferències cal prendre la \mathcal{Z} -antitransformada de $Y(z)$, i. e.:

$$\begin{aligned} (y(k))_{k \in \mathbb{N}} &= \mathcal{Z}^{-1} [y(k)](k) \\ &= -\frac{3}{2} \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-2} \right](k) + \frac{3}{4} \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-3} \right](k) + \frac{1}{2} \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{(z-1)^2} \right](k) + \frac{3}{4} \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z-1} \right](k) \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(-3 \cdot 2^k + \frac{1}{2} 3^{k+1} + k + \frac{3}{2} \right) \right)_{k \in \mathbb{N}_0}. \end{aligned}$$

(d) Al igual que hem fet als apartats anteriors, aplicarem la \mathcal{Z} -transformada a dreta i esquerra de la igualtat, substituïrem les condicions inicials ($y(0) = y(1) = 1$ en aquest cas) i agruparem per tenir una equació lineal algebraica en $Y(z)$, i. e.:

$$z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1) - 5zY(z) + 5zy(0) + 6Y(z) = (z^2 - 5z + 6)Y(z) - z^2 + 4z = 0,$$

d'on:

$$Y(z) = z \frac{z-4}{(z-3)(z-2)} = z \left(\frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3} \right) \Rightarrow (z-3)A + (z-2)B = z-4$$

$$\text{d'aquí: } \begin{cases} z=3 & \Rightarrow B=-1, \\ z=2 & \Rightarrow A=2. \end{cases} \quad \text{i per tant: } Y(z) = z \frac{z-4}{(z-3)(z-2)} = \frac{2z}{z-2} + \frac{z}{z-3}.$$

Ara, amb $Y(z)$ descomposat en fraccions simples resulta fàcil trobar la seva \mathcal{Z} -antitransformada i amb aquesta, la solució:

$$(y(k))_{k \in \mathbb{N}_0} = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)](k) = 2\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right](k) - \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-3}\right](k) = (2^{k+1} - 3^k)_{k \in \mathbb{N}_0}.$$

(h) L'aplicació de la \mathcal{Z} -transformada a tots dos costats de l'equació ens duu a:

$$\begin{aligned} z^2 Y(z) - z^2 y(0) - zy(1) + 3zY(z) - 3zy(0) + 2Y(z) &= (z^2 + 3z + 2)Y(z) - z = \frac{2z}{z-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow Y(z) &= \frac{2z}{(z+2)(z+1)(z-1)} + \frac{z}{(z+2)(z+1)} \end{aligned}$$

i descomposant en fraccions simples:

$$Y(z) = \frac{z/3}{z-1} - \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2} + \frac{2z/3}{z+2} + \frac{z}{z+1} = \frac{z/3}{z-1} - \frac{z/3}{z+2}$$

d'on es dedueix que la solució de l'equació en diferències ve donada per:

$$(y(k))_{k \in \mathbb{N}_0} = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)](k) = \frac{1}{3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right](k) - \frac{1}{3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+2}\right](k) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^k\right)_{k \in \mathbb{N}_0}. \triangleright$$

8. (INTRESSOS I AMORTITZACIONS)

A) Supposeu que al començament de cada any s'ingressa en un compte bancari una quantitat constant b , més el rèdit produït durant l'any anterior a un interès anual i . Per a l'any k , disegneu per $y(k)$ la quantitat acumulada al començament de l'any, després de les operacions anteriors: $y(1) = b, \dots$

Plantegeu l'equació en diferències que verifica $y(k)$, i resoleu-la per a trobar la seva expressió en funció de k , i i b .

B) De manera anàloga, considereu un procés d'amortització d'un deute D , a un interès anual i , mitjançant l'abonament anual d'una quota constant B . Disegneu per $d(k)$ el deute pendent al cap de cap anys: $d(0) = D, \dots$

Plantegeu l'equació en diferències que verifica $d(k)$, i resoleu-la per trobar la seva expressió en funció de k , i , B , D .

Deduïu quin ha de ser el valor de B per tal que el deute sigui liquidat en un termini de n anys.

◁ **Solució.** Sigui $y(k)$ la quantitat acumulada al final de l'any k -èsim, i. e.:

$$y(0) = 0, \quad y(1) = b, \quad y(2) = b + y(1) + iy(1) = b + (1+i)y(1), \dots, \quad y(k+1) = b + (1+i)y(k), \dots$$

Així doncs, $y(k)$ vindrà donada per la solució de l'equació en diferències:

$$y(k+1) - (1+i)y(k) = b, \quad y(0) = 0.$$

Aplicant la \mathcal{Z} -transformada a dreta i esquerra i agrupant:

$$zY(z) - zy(0) - (1+i)Y(z) = (z - (i+1))Y(z) = \frac{bz}{z-1},$$

on es defineix $Y(z) := \mathcal{Z}[d(k)](z)$. A partir d'aquí:

$$Y(z) = \frac{bz}{(z-1)(z-(i+1))} = \frac{-bz/i}{z-1} + \frac{bz/i}{z-(i+1)}$$

i llavors, prenent la \mathcal{Z} -antitransformada s'obté:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)](k) = -\frac{b}{i}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right](k) + \frac{b}{i}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-(i+1)}\right](k) = \frac{b}{i}\left((i+1)^k - 1\right),$$

per $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

B) Sigui $d(k)$ el deute pendent al cap de k anys, i. e.:

$$d(0) = D, \quad d(1) = (1+i)d(0) - B, \dots, \quad d(k+1) = (1+i)d(k) - B, \dots$$

i llavors $d(k)$ ve determinat per la solució de l'equació en diferències,

$$d(k+1) - (1+i)d(k) = B, \quad d(0) = D. \tag{7}$$

Com a l'apartat anterior s'aplica la \mathcal{Z} -transformada a tots dos costats de l'equació. Posant ara $Y(z) := \mathcal{Z}[d(k)](z)$, s'arriba a,

$$zY(z) - zd(0) - (1+i)Y(z) = (z - (1+i))Y(z) - Dz = -\frac{Bz}{z-1}$$

(on s'ha substituït la "condició inicial", $d(0) = D$). Aïllant la transformada $Y(z)$ veiem que resulta ser una fracció racional, que descomposarem en fraccions simples. Explícitament:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{Dz}{z-(i+1)} - \frac{Bz}{(z-(i+1))(z-1)} = \frac{Dz}{z-(i+1)} + \frac{Bz/i}{z-1} - \frac{Bz/i}{z-(i+1)} \\ &= \left(D - \frac{B}{i}\right) \frac{z}{z-(i+1)} + \frac{Bz/i}{z-1}. \end{aligned}$$

Un cop expressada $Y(z)$ d'aquesta manera, el càlcul de la seva \mathcal{Z} -antitransformada és immediat. Resulta:

$$\begin{aligned} d(k) &= \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)](k) = \left(D - \frac{B}{i}\right) \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-(i+1)}\right](k) + \frac{B}{i} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right](k) \\ &= \left(D - \frac{B}{i}\right) (i+1)^k + \frac{B}{i}. \end{aligned}$$

Finalment, si volem que el deute D sigui liquidat en un termini de n anys, cal $d(n) = 0$ i llavors la quota anual a pagar ascendeix a:

$$d(k) = 0 \iff B = \frac{Di(i+1)^n}{(i+1)^n - 1} \triangleright$$

9. (MODEL DE TERANYINA)

A) Supposeu que la demanda d i la producció s d'un determinat producte depenen linealment del seu preu p segons

$$\begin{aligned} d(p) &= d_0 - ap \\ s(p) &= s_0 + bp \end{aligned}$$

on a, b, d_0 són constants positives i s_0 és una constant negativa.

Calculeu el preu de l'equilibri p_e .

B) Considerem en endavant el cas d'una producció periòdica.

Per fixar idees, suposarem que es tracta d'un producte agrícola anual.

Si designem per $s(k)$ la collita de l'any k , i per $p(k)$ el preu de venda que resulta d'equilibrar l'oferta amb la demanda, justifiqueu les relacions

$$\begin{aligned}s(k) &= d_0 - ap(k) \\ s(k+1) &= s_0 + b\underline{p}(k+1)\end{aligned}$$

on $\underline{p}(k+1)$ és la previsió de preu que els productors fan a un any vista, en el moment de sembrar.

C) Suposem ara que la previsió de preu és simplement

$$\underline{p}(k+1) = p(k)$$

C.1) Deduïu l'equació en diferències que verifica $p(k)$, i resolcu-la per trobar la seva expressió en funció de k , p_0 , p_e i de la constant $c = \frac{b}{a}$.

C.2) Discutiu l'evolució de $p(k)$ segons els valors de c .

En particular, determineu en quins casos tendeix cap al preu d'equilibri.

C.3) Representeu gràficament l'evolució anterior, sobre els gràfics de les funcions $d(p)$ i $s(p)$.

D) Suposeu ara una estratègia de previsió més complexa, segons la qual $\underline{p}(k+1)$ és el que resulta d'extrapolat linealment l'evolució dels dos últims anys. És a dir:

$$\underline{p}(k+1) = 2p(k) - p(k-1)$$

D.1) Determineu la nova equació en diferències que verifica $p(k)$.

D.2) Comproveu que el punt d'equilibri p_e n'és també una solució particular (constant).

D.3) Trobeu la solució general d'aquesta equació.

D.4) Deiscutiu per a quins valors de c el preu evoluciona cap al d'equilibri en aquestes noves circumstàncies.

◁ **Solució.**

(A) Demanda: $d(p) = d_0 - ap$, oferta: $s(p) = s_0 + bp$. En l'equilibri, l'oferta i la demanda s'han d'igualar en un preu estable, p_e , que no provoqui variacions en cap d'ells:

$$d_0 - ap = s_0 + bp \iff p_e = \frac{d_0 - s_0}{a + b}.$$

(B) Una vegada produïda la collita de l'any k , la demanda l'absorbirà tota i fixarà el preu de venda d'aquell any. Posarem, per tant:

$$s(k) = d_0 - ap(k).$$

D'altra banda, si es preveu que el preu de l'any següent serà $\underline{p}(k+1)$, llavors es produirà segons la llei de l'oferta. Aleshores:

$$s(k+1) = s_0 + b\underline{p}(k+1),$$

que farà màxim els beneficis.

(C) Si $\underline{p}(k+1) = p(k)$, aleshores:

$$(C.1) \quad d_0 - ap(k+1) = s_0 + bp(k) \iff ap(k+1) + bp(k) + s_0 - d_0 = 0.$$

Sigui $P(z) := \mathcal{Z}[p(k)](z)$. Aplicant la \mathcal{Z} -transformada a totes dues bandes de l'equació en diferències deduïda adalt s'obté:

$$azP(z) - ap(0)z + bP(z) = (az + b)P(z) - ap_0z = (d_0 - s_0)\frac{z}{z-1},$$

on $p_0 = p(0)$. D'aquí,

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{d_0 - s_0}{a} \times \frac{z}{(z-1)(z-c)} + \frac{p_0 a}{a} \times \frac{z}{z+c} \\ &\stackrel{(\ddagger)}{=} \frac{d_0 - s_0}{a(a+b)} \times \frac{a+b}{1+c} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+c} \right) + \frac{p_0 z}{z+c} \\ &\stackrel{(\text{A})}{=} p_e(1+c) \times \frac{1}{1+c} \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+c} \right) + \frac{p_0 z}{z+c}. \end{aligned}$$

amb la qual cosa tenim, finalment:

$$p(k) = \mathcal{Z}^{-1}[P(z)](k) = p_e(1 - (-c)^k) + p_0(-c)^k = p_e + (-1)^k(p_0 - p_e)c^k,$$

per $k \in \mathbb{N}$ i amb $c = b/a$.

(C.2) Distingirem els casos següents:

Primer cas: $c = \frac{b}{a} < 1 \implies p(k) \rightarrow p_e$, quan $k \rightarrow \infty$.

Segon cas: $c = \frac{b}{a} = 1$, llavors: $\nexists \lim_{k \rightarrow \infty} p(k)$, però com que $p(2k) = p_0$ i $p(2k-1) = 2p_e - p_0$ per $k = 1, 2, 3, \dots$, llavors existeixen els límits d'oscil·lació: $\{p_0, 2p_e - p_0\}$; i així $\limsup_k p(k) = \max\{p_0, 2p_e - p_0\}$ i $\liminf_k p(k) = \min\{p_0, 2p_e - p_0\}$.

Tercer cas: $c = \frac{b}{a} > 1$, llavors $\nexists \lim_{k \rightarrow \infty} p(k)$, ni tampoc existeixen límits d'oscil·lació finits.

(C.3) Els diagrames de teranyina per cadascun dels casos descrits a l'apartat anterior són els que es mostren a la figura 1.

(D) Ara $p(k+1) = 2p(k) - p(k-1)$, llavors:

$$(D.1) \left. \begin{aligned} s(k+1) &= d_0 - ap(k+1) \\ s(k+1) &= s_0 + 2bp(k) - bp(k-1) \end{aligned} \right\} \implies ap(k+1) + 2bp(k) - bp(k-1) = d_0 - s_0,$$

per $k = 1, 2, 3, \dots$

(D.2) $p(k) = p_e$ per tot $k = 1, 2, 3, \dots$; d'on:

$$ap_e + 2bp_e - bp_e = (a+b)p_e = (a+b)\frac{d_0 s_0}{a+b} = d_0 - s_0.$$

$$(D.3) \quad azP(z) - azp(0) + 2bP(z) - b\frac{P(z)}{z} = (d_0 - s_0)\frac{z}{z-1} \implies$$

$$a\left(z + 2c - \frac{c}{z}\right)P(z) - ap_0z = \frac{a}{z}(z - \lambda_+)(z - \lambda_-)P(z) - ap_0z = (d_0 - s_0)\frac{z}{z-1}, \text{ on:}$$

$$p_0 = p(0), \quad \lambda_{\pm} = -c \pm \sqrt{c^2 + c}, \quad c = \frac{b}{a},$$

i aïllant $P(z)$ s'obté:

$$P(z) = \frac{d_0 - s_0}{a+b}(1+c)z \frac{z}{(z-1)(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)} + p_0z \frac{z}{(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)}. \quad (8)$$

(\ddagger)Descomposició en fraccions simples:

$$\frac{1}{(z-1)(z-c)} = \frac{A}{z+c} + \frac{B}{z-1} = -\frac{1}{1+c} \times \frac{1}{z+c} + \frac{1}{1+c} \times \frac{1}{z-1}$$

donat que de: $(z-1)A + (z+c)B = 1$ es té, per $z = 1$: $(1+c)B = 1 \implies B = \frac{1}{1+c}$ i per $z = -c$: $-(1+c)A = 1 \implies A = -\frac{1}{1+c}$.

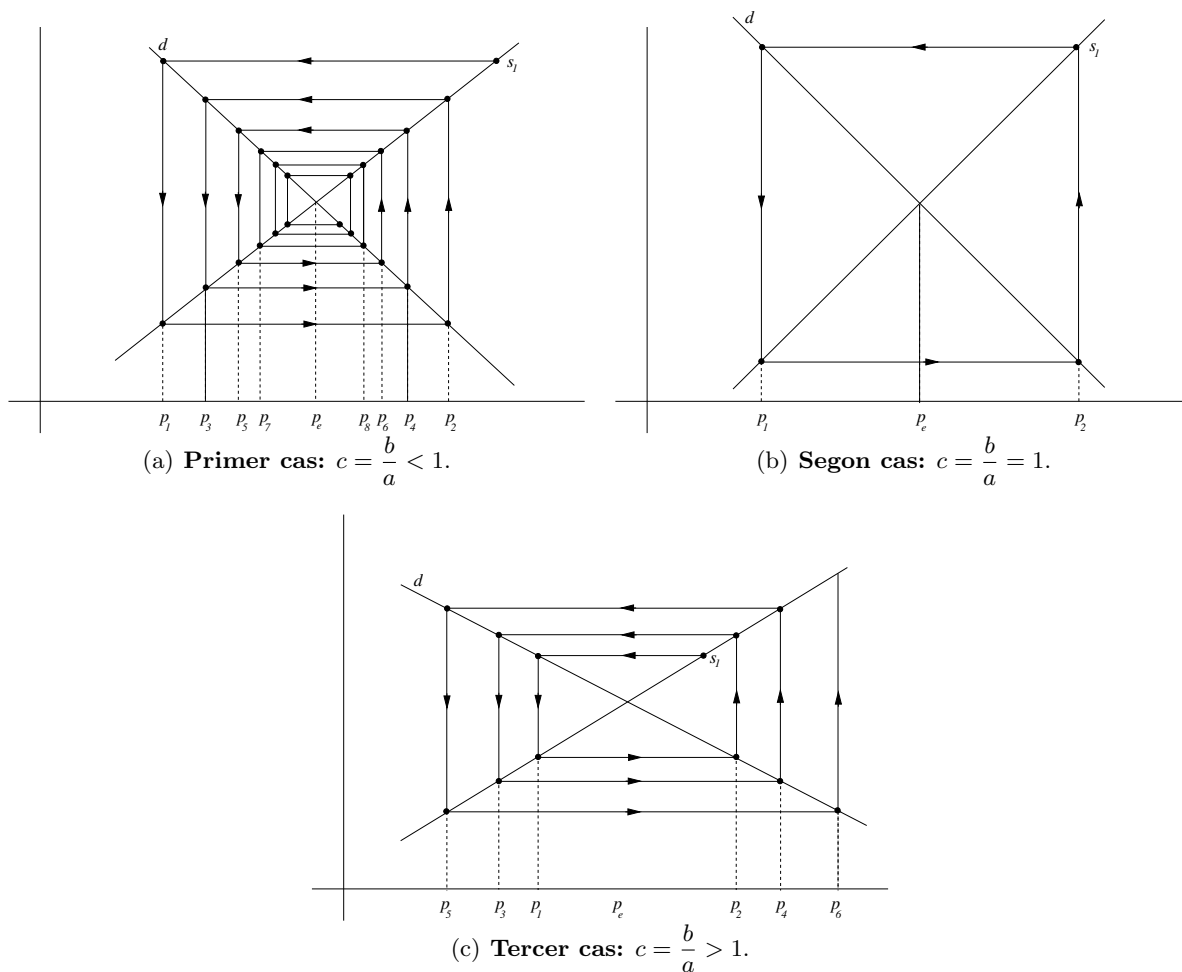


Figura 1

A continuació, per calcular l'antitransformada de $P(z)$ cal primer trobar la descomposició en fraccions simples de les funcions racionals que hi intervenen. Així:

$$\frac{z}{(z-1)(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-\lambda_+} + \frac{C}{z-\lambda_-} \implies$$

$$\implies (z-\lambda_+)(z-\lambda_-)A + (z-1)(z-\lambda_-)B + (z-1)(z-\lambda_+)C = z$$

i donant valors a z ,

$$z = \lambda_+ : (\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)B = \lambda_+ \implies B = \frac{\lambda_+}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)},$$

$$z = \lambda_- : (\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)C = \lambda_- \implies C = \frac{\lambda_-}{(\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)},$$

$$z = 1 : (1 - \lambda_+)(1 - \lambda_-)A = 1 \implies A = \frac{1}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_- - 1)}.$$

De la mateixa manera, per la segona fracció racional que apareix en l'expressió (8) per $P(z)$:

$$\frac{z}{(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)} = \frac{\tilde{A}}{z-\lambda_+} + \frac{\tilde{B}}{z-\lambda_-} \implies (z-\lambda_-)\tilde{A} + (z-\lambda_+)\tilde{B} = z.$$

Com abans, trobem els valors dels coeficients indeterminats \tilde{A} i \tilde{B} donant valors a z , i. e.:

$$\begin{aligned} z = \lambda_+ & : (\lambda_+ - \lambda_-)\tilde{A} = \lambda_+ \implies \tilde{A} = \frac{\lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_-}, \\ z = \lambda_- & : (\lambda_- - \lambda_+)\tilde{B} = \lambda_- \implies \tilde{B} = \frac{\lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+}. \end{aligned}$$

D'altra banda:

$$\begin{aligned} (\lambda_+ - 1)(\lambda_- - 1) &= (c - \sqrt{c^2 + c + 1})(c + \sqrt{c^2 + c + 1}) \\ &= c + 1, \\ \lambda_+ - \lambda_- &= -c + \sqrt{c^2 + c + c} + \sqrt{c^2 + c} \\ &= 2\sqrt{c^2 + c}. \end{aligned}$$

Així (8) es pot escriure com:

$$\begin{aligned} P(z) &= p_e(1+c) \left\{ \frac{1}{1+c} \times \frac{z}{z-1} + \frac{\lambda_+}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)} \times \frac{z}{z - \lambda_+} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_-}{(\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)} \times \frac{z}{z - \lambda_-} \right\} \\ &\quad + p_0 \left\{ \frac{\lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_-} \times \frac{z}{z - \lambda_+} + \frac{\lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+} \times \frac{z}{z - \lambda_-} \right\} \end{aligned}$$

i per últim, calculem l'antitransformada:

$$\begin{aligned} p(k) &= \mathcal{Z}^{-1}[P(z)](k) = p_e + \frac{(1+c)p_e}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)} \lambda_+^{k+1} + \frac{(1+c)p_e}{(\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)} \lambda_-^{k+1} \\ &\quad + \frac{p_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \lambda_+^{k+1} + \frac{p_0}{\lambda_- - \lambda_+} \lambda_-^{k+1} \\ &= p_e + \left[\frac{(1+c)p_e}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)} + \frac{p_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \right] \lambda_+^{k+1} \\ &\quad + \left[\frac{(1+c)p_e}{(\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)} + \frac{p_0}{\lambda_- - \lambda_+} \right] \lambda_-^{k+1}. \end{aligned}$$

Finalment doncs el preu, $p(k)$, vindrà donat per:

$$\begin{aligned} p(k) &= p_e + (-1)^k \left[\frac{(1+c)p_e}{2(c+1 - \sqrt{c^2 + 1})\sqrt{c^2 + c}} - \frac{p_0}{2\sqrt{c^2 + c}} \right] (\sqrt{c^2 + c} - c)^{k+1} \\ &\quad + (-1)^{k+1} \left[\frac{(1+c)p_e}{2(c+1 + \sqrt{c^2 + 1})\sqrt{c^2 + c}} - \frac{p_0}{2\sqrt{c^2 + c}} \right] (\sqrt{c^2 + c} + c)^{k+1}, \end{aligned}$$

per $k = 1, 2, 3, \dots$

(D.4) Temin que $|\lambda_+| < |\lambda_-|$ i perquè la solució tendeixi cap a l'equilibri cal que siguin < 1 , i. e.:

$$0 < |\lambda_+| < |\lambda_-| = c + \sqrt{c^2 + c} < 1,$$

o equivalentment:

$$0 < \sqrt{c^2 + c} < 1 - c \iff c^2 + c < 1 - 2c + c^2 \iff 3c < 1,$$

i recordem que $c = b/a > 0$. O sigui, el preu tendirà cap a l'equilibri si i només si:

$$0 < c < \frac{1}{3}. \triangleright$$

10. Trobeu la llei de formació i el límit de la successió

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \frac{169}{70}, \dots$$

◁ **Solució.** Clarament la llei de formació ve donada per:

$$\frac{a(k+2)}{b(k+2)} = \frac{a(k) + 2a(k+1)}{a(k+1)} = 2 + \frac{a(k)}{a(k+1)}.$$

És a dir:

$$a(k+2) = a(k) + 2a(k+1), \quad (9)$$

per $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ i amb $a(0) = 2, b(0) = 1, a(1) = 5, b(1) = a(0) = 2; (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$. Sigui ara: $A(z) := \mathcal{Z}[a(k)](z)$; aplicant la \mathcal{Z} -transformada a totes dues bandes de (9) s'obté,

$$z^2 A(z) - z^2 a(0) - z a(1) = A(z) + 2z A(z) - 2z a(0) \iff (z^2 - 2z - 1)A(z) = z(2z + 1).$$

A continuació, aïllant $A(z)$ i descomposant en fraccions simples,

$$A(z) = z \frac{2z + 1}{(z - (1 + \sqrt{2}))(z - (1 - \sqrt{2}))} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4} \times \frac{z}{z - (1 + \sqrt{2})} + \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4} \times \frac{z}{z - (1 - \sqrt{2})}$$

i calculem la transformada inversa:

$$a(k) = \mathcal{Z}^{-1}[A(z)](k) = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4} \times (1 + \sqrt{2})^k + \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4} (1 - \sqrt{2})^k.$$

Aleshores els termes de la successió,

$$c(0) = \frac{a(0)}{b(0)} = \frac{2}{1}, \quad c(1) = \frac{a(1)}{b(1)} = \frac{5}{2} \dots, c(k) = 2 + \frac{a(k-2)}{a(k-1)}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

vidran donats explícitament per:

$$c(k) = 2 + \frac{a(k-2)}{a(k-1)} = 2 + \frac{(4 + 3\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{k-2} \{1 + (12\sqrt{2} - 17)(2\sqrt{2} - 3)^{k-2}\}}{(4 + 3\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{k-1} \{1 + (12\sqrt{2} - 17)(2\sqrt{2} - 3)^{k-1}\}},$$

per $k = 2, 3, 4, \dots$. Finalment:

$$c(0) = \frac{2}{1}, \quad c(1) = \frac{5}{2}; \quad c(k) = 2 + \frac{1 + (12\sqrt{2} - 17)(2\sqrt{2} - 3)^{k-2}}{(1 + \sqrt{2}) \{1 + (12\sqrt{2} - 17)(2\sqrt{2} - 3)^{k-1}\}}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

i com que $0 < |2\sqrt{2} - 3| = 0,17157\dots < 1$, resulta:

$$\lim_k c(k) = 2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}. \triangleright$$

11. (NÚMEROS DE FIBONACCI)

Considereu els números de Fibonacci F_k definits per

$$F_1 = F_2 = 1, \\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \quad k \geq 2.$$

a) Trobeu una fórmula explícita de F_k , en funció de k .

b) Calculeu $\lim_k \frac{F_{k+1}}{F_k}$ ("relació aúria").

c) Demostreu que

$$F_1^2 + \dots + F_k^2 = F_k F_{k+1}.$$

(Nota: per a (b) i (c), no cal utilitzar (a)).

◁ **Solució.** (a) Equivalentment, s'escriurà¹:

$$F(k+2) = F(k+1) + F(k), \quad (10)$$

¹En aquest apartat i al següent farem servir la notació habitual, posant $F_1 = F(1), F_2 = F(2), \dots, F_k = F(k), \dots$

per $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ i amb

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1. \tag{11}$$

Sigui $f(z) = \mathcal{Z}[F(k)](z)$; llavors, aplicant la \mathcal{Z} -transformada a tots dos costats de (10) i tenint en compte les condicions inicials (11) s'obté:

$$z^2 f(z) - z^2 F(0) - zF(1) - zf(z) + zF(0) - f(z) = (z^2 - z - 1)f(z) = z,$$

d'on, aïllant la \mathcal{Z} -transformada $f(z)$:

$$f(z) = z \frac{z}{\left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{z/\sqrt{5}}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z/\sqrt{5}}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

i a continuació, per trobar $F(k)$, calculem l'antitransformada:

$$F(k) = \mathcal{Z}^{-1}[f(z)](k) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(b) Calculem el límit

$$\lim_k \frac{F(k+1)}{F(k)} = \lim_k \frac{\frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{k+1}\right]}{\frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^k\right]} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Aquest valor és l'anomenat "nombre d'or", "relació àuria" o "proporció àuria".

REMARCA 1.4. Tal com diu l'enunciat, per fer aquest apartat no calen els resultats de l'apartat (a). En efecte, si definim $a_k = F_{k+1}/F_k$, per $k = 1, 2, 3, \dots$; de la relació de recurrència del números de Fibonacci i dels seus valors inicials, es dedueix:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{k+1} &= 1 + \frac{1}{a_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{12}$$

D'aquí, per inducció, es demostra (exercici) que la subsuccessió parella, a_{2k} , és monòtona decreixent i acotada inferiorment mentre que la subsuccessió senar, a_{2k+1} , és monòtona creixent i acotada superiorment i llavors totes dues són convergents. Siguin ℓ_1 i ℓ_2 els seus respectius límits, i. e.:

$$\ell_1 = \lim_k a_{2k}, \quad \ell_2 = \lim_k a_{2k+1}$$

amb $\ell_1, \ell_2 > 0$, com es comprova d'immediat. Així, si prenem límits en (12):

$$\begin{aligned} \lim_k a_{2k+2} &= \lim_k \left(1 + \frac{1}{a_{2k+1}}\right) \implies \ell_1 = 1 + \frac{1}{\ell_2} \iff \ell_1 \ell_2 = \ell_2 + 1, \\ \lim_k a_{2k+1} &= \lim_k \left(1 + \frac{1}{a_{2k}}\right) \implies \ell_2 = 1 + \frac{1}{\ell_1} \iff \ell_1 \ell_2 = \ell_1 + 1 \end{aligned}$$

i igualant queda clar que $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, on ℓ és ara l'arrel positiva de l'equació $x^2 - x - 1 = 0$. Resumint:

$$\ell = \lim_k a_k = \lim_k a_{2k} = \lim_k a_{2k+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(c) Per inducció: veiem que és cert per $k = 1$. En efecte $F_1^2 = 1 = F_1 F_2$. Suposem a continuació que és cert per $k = m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ (hipòtesi d'inducció) i comprovarem que també es satisfà per $k = m + 1$:

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_m^2 + F_{m+1}^2 = F_m F_{m+1} + F_{m+1}^2 = (F_m + F_{m+1}) F_{m+1} = F_{m+1} + F_{m+2}.$$

On s'ha aplicat, al primer pas, la hipòtesi d'inducció i a l'últim pas, la relació de recurrència (10). Veiem així que la relació:

$$F_1^2 + \dots + F_k^2 = F_k F_{k+1},$$

es satisfà per tot $k \in \mathbb{N}$. ▸