Sèries Numèriques

Problemes

1. Estudieu la convergència de les sèries:

(a) $\sum \ln\left(1+\dfrac{2}{p}\right)$, (b) $\sum \dfrac{p}{1+\sqrt{p}}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{p}\right)$, (c) $\sum \dfrac{\sqrt{p}}{1+p}\sin\dfrac{p}{1+p^2}$.

◁ **Solució.**

(a) $\sum \ln\left(1+\dfrac{2}{p}\right) \sim \sum \dfrac{2}{p}$ divergent $\Rightarrow \sum \ln\left(1+\dfrac{2}{p}\right)$ divergent.

(b) $\sum \dfrac{p}{1+\sqrt{p}}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{p}\right) \sim \sum \dfrac{1}{p^{3/2}}$ convergent $\Rightarrow \sum \dfrac{p}{1+\sqrt{p}}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{p}\right)$ convergent.

(c) $\sum \dfrac{\sqrt{p}}{1+p}\sin\dfrac{p}{1+p^2} \sim \sum \dfrac{1}{p^{3/2}}$ convergent $\Rightarrow \sum \dfrac{1}{p^{3/2}}$ convergent. ▷

2. Estudieu la convergència de les sèries:

(a) $\sum \dfrac{p}{3^p}$, (b) $\sum \dfrac{p^5}{2^p+3^p}$, (c) $\sum \dfrac{2^p}{p^3+1}$.

◁ **Solució.**

(a) $a_p = \dfrac{p}{3^p} \Rightarrow \lim_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \sqrt[p]{\dfrac{p}{3^p}} = \dfrac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum \dfrac{p}{3^p}$ convergent (criteri de l'arrel/quocient).

(b) $a_p = \dfrac{p^5}{2^p+3^p} \Rightarrow \lim_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \sqrt[p]{\dfrac{p^5}{2^p+3^p}} = \lim_p \dfrac{\sqrt[p]{p^5}}{3\sqrt[p]{1+(2/3)^p}} = \dfrac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum \dfrac{p^5}{2^p+3^p}$ convergent (criteri de l'arrel/quocient).

(c) $\lim_p a_p = \lim_p \dfrac{a_p}{p^3+1} = \dfrac{1}{3} = +\infty \Rightarrow \sum \dfrac{2^p}{p^3+1}$ divergent (no se satisfà la condició necessària de convergència) ▷.

3. Estudieu la convergència de les sèries:

(a) $\sum \left(\dfrac{p+1}{p^2}\right)^p$, (b) $\sum (\sqrt[p]{p}-1)^p$.

◁ **Solució.**

(a) $a_p = \left(\dfrac{p+1}{p^2}\right)^2 \Rightarrow \lim_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \sqrt[p]{\left(\dfrac{p+1}{p^2}\right)^p} = \lim_p \dfrac{p+1}{p^2} = 0 < 1 \Rightarrow \sum \left(\dfrac{p+1}{p^2}\right)^p$ convergent (criteri de l'arrel/quocient).

(b) $a_p = (\sqrt[p]{p}-1)^p \Rightarrow \lim_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \sqrt[p]{(\sqrt[p]{p}-1)^p} = \lim_p (\sqrt[p]{p}-1) = 0 < 1 \Rightarrow \sum (\sqrt[p]{p}-1)^p$ convergent (criteri de l'arrel/quocient). $\triangleright$

4. Estudieu la convergència de les sèries:

(a) $\displaystyle\sum \frac{\ln p}{p^2}$, (b) $\displaystyle\sum \frac{1}{1+2+\cdots+p}$.

$\triangleleft$ **Solució.**

(a) $\displaystyle\lim_p p^{3/2}\frac{\ln p}{p^2} = \lim_p \frac{\ln p}{p^{1/2}} = 0$. I com que $\displaystyle\sum \frac{1}{p^{3/2}}$ és convergent, llavors $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \frac{\ln p}{p^2}$ també és (abs.) convergent (criteri de Pringsheim/Riemann).

(b) Pel criteri del quocient:

$$\sum_{p\geq 1} \frac{1}{1+2+\cdots+p} = \sum_{p\geq 1} \frac{2}{p(p+1)} \sim \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2} \text{ convergent } \Rightarrow \sum_{p\geq 1} \frac{1}{1+2+\cdots+p} \text{ (abs.) convergent.}\triangleright$$

5. Estudieu la convergència de les sèries:

(a) $\displaystyle\sum \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)$, (b) $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right)$.

$\triangleleft$ **Solució.**

(a) El terme general $a_p = \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right)$ es pot expressar com:

$$\left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right) = \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right) \times \frac{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}} = \frac{p+1-p}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}},$$

llavors (pel criteri del quocient):

$$\sum_{p\geq 0} \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right) = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}} \sim \sum \frac{1}{p^{1/2}} \text{ divergent } \Rightarrow \sum_{p\geq 0} \left(\sqrt{p+1}-\sqrt{p}\right) \text{ divergent.}$$

(b) El terme general, $a_p = \dfrac{1}{\sqrt{p-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{p}}$ es pot expressar com:

$$\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{p}-\sqrt{p-1}}{\sqrt{p}\sqrt{p-1}} \times \frac{\sqrt{p}+\sqrt{p-1}}{\sqrt{p}+\sqrt{p-1}} = \frac{p-(p-1)}{p\sqrt{p-1}\left(1+\sqrt{1+1/p}\right)} > 0$$

per tot $p \geq 2$. Aleshores:

$$\sum_{p\geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \sim \sum_{p\geq 2} \frac{1}{p\sqrt{p-1}\left(1+\sqrt{1+1/p}\right)} \sim \sum_{p\geq 2} \frac{1}{p^{3/2}} \text{ (convergent)}$$

i per tant (pel criteri del quocient), la sèrie: $\displaystyle\sum_{p\geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}}\right)$ és (abs.) convergent. $\triangleright$

6. Estudieu la convergència i la convergència absoluta de les sèries:

(a) $\displaystyle\sum (-1)^p \frac{p}{p\sqrt{p}+3}$, (b) $\displaystyle\sum \left(\frac{1+5p}{3-p}\right)^p$.

$\triangleleft$ **Solució.**

(a) El terme general es pot expressar com $(-1)^p a_p$ amb:

$$a_p \geq 0 \qquad \text{i} \qquad a_p = \frac{p}{p\sqrt{p}+3} \searrow 0,$$

(termes no negatius i tendint "monotònicament" cap a zero). Per tant el criteri de les sèries alternades ens assegura la convergència d'aquesta sèrie. *No* hi ha, en canvi, *convergència absoluta*. En efecte, aplicant el criteri del quocient a la sèrie formada pel mòdul de cadascun dels termes resulta:

$$\sum_{p\geq 0}\left|(-1)^p \frac{p}{p\sqrt{p}+3}\right| = \sum_{p\geq 0}\frac{p}{p\sqrt{p}+3} \sim \sum_{p\geq 1}\frac{1}{\sqrt{p}} \text{ (divergent)}$$

d'on es segueix (criteri del quocient) que $\sum_{p\geq 0}\left|(-1)^p \frac{p}{p\sqrt{p}+3}\right|$ també és divergent.

(b) Es tracta d'una sèrie alternada, com es veu fent:

$$\sum_{p\geq 3}\left(\frac{1+5p}{3-p}\right)^p = \sum_{p\geq 3}(-1)^p\left(\frac{1+5p}{p-3}\right)^p,$$

però com que el seu terme general no tendeix cap a zero (de fet, ni tan sols és convergent), la sèrie no és convergent i evidentment, tampoc no ho és absolutament. $\triangleright$

7. Estudieu la convergència i la convergència absoluta de les sèries:

(a) $\sum \frac{1+p\mathrm{i}}{p^2}$, (b) $\sum\left(\frac{1}{p+1} + \mathrm{i}\frac{p^2}{2^p(p+2)^2}\right)$, (c) $\sum\left(\frac{(-1)^p}{p} + \mathrm{i}\frac{1}{p!}\right)$,

(d) $\sum \frac{(1+\mathrm{i})^p}{p}$.

$\triangleleft$ **Solució.**

(a) La sèrie és divergent. En efecte:

$$\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2} \text{ convergent, } \sum_{p\geq 1}\frac{1}{p} \text{ divergent } \Rightarrow \sum_{p\geq 1}\frac{1+\mathrm{i}p}{p^2} \text{ divergent.}$$

Per tant, no pot ser absolutament convergent (donat que la convergència absoluta implicaria la convergència de la sèrie). De totes maneres, comprovem-ho:

$$\sum_{p\geq 1}\left|\frac{1+p\mathrm{i}}{p^2}\right| = \sum_{p\geq 1}\sqrt{\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^2}} \sim \sum_{p\geq 1}\frac{1}{p} \text{ divergent } \Rightarrow \sum_{p\geq 1}\left|\frac{1+p\mathrm{i}}{p^2}\right| \text{ divergent.}$$

(b) Com abans mirem per separat les sèries formades per les parts real i imaginària del terme general,

$$\sum_{p\geq 0}\frac{1}{p+1} \text{ div., } \sum_{p\geq 0}\frac{p^2}{2^p(p+1)^2} \sim \sum\frac{2}{2^p} \text{ conv. } \Rightarrow \sum_{p\geq 0}\left(\frac{1}{p+1} + \mathrm{i}\frac{p^2}{2^p(p+2)^2}\right) \text{ div.}$$

Aleshores, no pot haver-hi convergència absoluta. Tot i que això es segueix de manera immediata, podem comprovar-ho explícitament:

$$\sum_{p\geq 0}\left|\frac{1}{p+1} + \mathrm{i}\frac{p^2}{2^p(p+2)^2}\right| = \sum_{p\geq 0}\frac{1}{1+p}\sqrt{1+\frac{p^4(1+p)^2}{2^{2p}(p+2)^4}} \sim \sum_{p\geq 0}\frac{1}{1+p} \text{ divergent.}$$

(c) La sèrie és convergent. En efecte:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p}{p} \text{ harmònica alternada (conv.),} \\ \displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p!} = \mathrm{e}-1 \text{ (conv.),}\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{p\geq 1}\left(\frac{(-1)^p}{p} + \mathrm{i}\frac{1}{p!}\right) \text{ conv.}$$

No és, en canvi, absolutament convergent:

$$\sum_{p\geq 1}\left|\frac{(-1)^p}{p}+\mathrm{i}\frac{1}{p!}\right| = \sum_{p\geq 1}\sqrt{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p!)^2}} \sim \sum_{p\geq 1}\frac{1}{p}\ \text{div.} \ \Rightarrow \sum_{p\geq 1}\left|\frac{(-1)^p}{p}+\mathrm{i}\frac{1}{p!}\right|\ \text{div.}$$

(d) La sèrie és divergent perquè:

$$\left|\frac{(1+\mathrm{i})^p}{p}\right| = \frac{|1+\mathrm{i}|^p}{p} = \frac{2^{p/2}}{p} \to +\infty$$

(no se satisfà la condició necessària de convergència de Cauchy). ▷

8. Estudieu la convergència de les sèries:

(a) $\dfrac{a+(-1)^p\sqrt{p}}{p}$, (b) $\dfrac{(-1)^p p+2}{p^2}$.

◁ **Solució.**

(a) $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{a}{p}$ divergent i $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ convergent $\Rightarrow \displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{a+(-1)^p\sqrt{p}}{p}$ divergent.(1)

(b) $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p}{p}$ conv. (sèrie harmònica alternada), $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{2}{p^2}$ conv. $\Rightarrow \displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p p+2}{p^2}$ conv. ▷

9. Estudieu la convergència de les sèries:

(a) $\displaystyle\sum \sin\left(\pi\frac{p^2+p+1}{p+1}\right)$, (b) $\displaystyle\sum \sin\left(\pi\sqrt{1+p^2}\right)$.

◁ **Solució.**

(a) Podem reescriure la sèrie com:

$$\sum_{p\geq 0}\sin\left(\pi\frac{p^2+p+1}{p+1}\right) = \sum_{p\geq 0}\sin\left(\pi p+\frac{\pi}{p+1}\right) = \sum_{p\geq 1}(-1)^p\sin\left(\frac{\pi}{p+1}\right),$$

i es veu clarament que és una sèrie alternada amb $\sin\left(\dfrac{\pi}{p+1}\right)\searrow 0$. Per tant, la sèrie és convergent.

(b) Es veu que es tracta d'una sèrie alternada:

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 1}\sin\left(\pi\sqrt{1+p^2}\right) &= \sum_{p\geq 1}\sin\left(\pi\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}\right) = \sum_{p\geq 1}\sin\left(\pi p+\pi p\left(\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}-1\right)\right)\\ &= \sum_{p\geq 1}(-1)^p\sin\left[\pi p\left(\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}-1\right)\right] = \sum_{p\geq 1}(-1)^p\sin\left[\pi\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)\right],\end{aligned}$$

i a més, $\sin\left[\pi p\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{p^2}}-1\right)\right]\searrow 0$. En efecte, per $p=1$ és: $\pi(\sqrt{2}-1)=\pi(\sqrt{2}-1)\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}+1} < \dfrac{\pi}{2}$ i llavors:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &\geq \pi\left(\sqrt{p^2+1}-p\right) = \pi\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)\times\frac{\sqrt{p^2+1}+p}{\sqrt{p^2+1}+p} = \frac{\pi}{\sqrt{p^2+1}+p} \geq\\ &\geq \frac{\pi}{\sqrt{(p+1)^2+1}+(p+1)} = \pi\left(\sqrt{(p+1)^2+1}-(p+1)\right)\end{aligned}$$

(1) $\sum a_p$ convergent, $\sum b_p$ divergent $\Rightarrow \sum(a_p+b_p)$ divergent (ja que si $\sum(a_p+b_p)$ fos convergent, aleshores $\sum b_p = \sum(a_p+b_p)-\sum a_p$ seria convergent |essent la sèrie suma de dues convergents|, la qual cosa és una contradicció).

per tot $p \geq 1$. Per tant:

$$1 \geq \sin\left[\pi\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)\right] \geq \sin\left[\pi\left(\sqrt{(p+1)^2+1}-(p+1)\right)\right] \geq 0,$$

per tot $p \geq 1$. Aleshores, pel criteri de les sèries alternades, la sèrie $\sum_{p\geq 1} \sin\left(\pi\sqrt{1+p^2}\right)$ és convergent. $\triangleright$

10. Discutiu, segons els valors de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergència de les sèries:

(a) $\displaystyle\sum_{p\geq 2}\left(\ln\frac{p+1}{p-1}\right)^{\alpha}$, (b) $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{p^{\alpha}}{1+\sqrt{p}}\sin\frac{\sqrt{p}}{1+p}$.

$\triangleleft$ **Solució.**

(a) Convergent sii $\alpha > 1$, com es comprova aplicant el criteri de Pringsheim-Riemann, i. e.:

$$\lim_p p^{\alpha}\left[\ln\left(1+\frac{2}{p-1}\right)\right]^{\alpha} = \lim_p p^{\alpha}\left(\frac{2}{p-1}\right)^{\alpha} = 2^{\alpha} \Rightarrow \sum_{p\geq 2}\left(\ln\frac{p+1}{p-1}\right)^{\alpha} \sim \sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^{\alpha}} \quad \text{conv.} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

(b) Es comprova, també pel criteri de Pringsheim-Riemann que la sèrie és convergent sii $\alpha < 0$. Explícitament:

$$\lim_p p^{1-\alpha}\frac{p^{\alpha}}{1+\sqrt{p}}\sin\frac{\sqrt{p}}{1+p} = \lim_p p^{1-\alpha}\frac{p^{\alpha}}{1+\sqrt{p}} \times \frac{\sqrt{p}}{1+p} = 1 \Rightarrow \sum_{p\geq 1}\frac{p^{\alpha}}{1+\sqrt{p}}\sin\frac{\sqrt{p}}{1+p} \sim \sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^{1-\alpha}}$$

i aquesta última és convergent sii $1-\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 0$. $\triangleright$

11. Discutiu, segons els valors de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergència de les sèries:

(a) $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{\sqrt{p+1}-\sqrt{p}}{p^{\alpha}}$, (b) $\displaystyle\sum_{p\geq 2} p^{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}-\frac{1}{\sqrt{p}}\right)$.

$\triangleleft$ **Solució.**

(a) La sèrie convergeix sii $\alpha > \frac{1}{2}$. De nou, podem arribar a aquesta conclusió aplicant el criteri de Pringsheim-Riemann. En efecte, de

$$\lim_p p^{\alpha+\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{p+1}-\sqrt{p}}{p^{\alpha}} \times \frac{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}} = \lim_p \frac{p^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{p+1}+\sqrt{p}} = \frac{1}{2},$$

es segueix que:

$$\sum_{p\geq 1}\frac{\sqrt{p+1}-\sqrt{p}}{p^{\alpha}} \sim \sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^{\alpha+\frac{1}{2}}} \text{ conv. } \Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}.\triangleright$$

(b) Convergent sii $\alpha < \frac{1}{2}$. Per Pringsheim-Riemann un altre cop:

$$\lim_p p^{\frac{3}{2}-\alpha}p^{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}-\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = \lim_p p^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{p}-\sqrt{p-1}}{\sqrt{p}\sqrt{p-1}} \times \frac{\sqrt{p}+\sqrt{p+1}}{\sqrt{p}+\sqrt{p+1}} =$$

$$= \lim_p \frac{p^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{p}}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{p}}\right)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{p\geq 2} p^{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}-\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \sim \sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^{\frac{3}{2}-\alpha}}$$

i $\displaystyle\sum_{p\geq 2}\frac{1}{p^{\frac{3}{2}-\alpha}}$ convergent $\Leftrightarrow -\alpha+\frac{3}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{2}-1 = \frac{1}{2}$.$\triangleright$

12. Discutiu, segons el valor de $\alpha \in \mathbb{Z}$, la convergència de les sèries:

(a) $\displaystyle\sum \frac{1}{1+2^\alpha+\cdots+p^\alpha}$, (b) $\displaystyle\sum \left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{p^\alpha}\right)$.

◁ **Solució.**

(a)

- Si $\alpha = 0$: $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \frac{1}{1+2^\alpha+\cdots+p^\alpha} = \sum_{p\geq 1}\frac{1}{p}$ divergent (sèrie harmònica).
- Si $\mathbb{Z} \ni \alpha < 0$: $\displaystyle\frac{1}{1+2^\alpha+\cdots+p^\alpha} \geq \frac{1}{p}$ i com que: $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p}$ divergent $\Rightarrow \displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{1}{1+2^\alpha+\cdots+p^\alpha}$ divergent (comparació per majorització).
- Si $\alpha = 1$: $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{1}{1+2+\cdots+p} = \sum_{p\geq 1}\frac{2}{p(p+1)} \sim \sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2}$ convergent (criteri de Pringsheim-Riemann per sèries amb termes de signe constant).
- Si $\mathbb{Z} \ni \alpha > 1$: $0 < \displaystyle\frac{1}{1+2^\alpha+\cdots+p^\alpha} < \frac{1}{1+2+\cdots+p}$, i llavors (per majorització):

$$\sum_{p\geq 1}\frac{1}{1+2+\cdots+p} \text{ convergent } \Rightarrow \sum_{p\geq 1}\frac{1}{1+2^\alpha+\cdots+p^\alpha} \text{ convergent.}$$

(b) $1+\dfrac{1}{2^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{p^\alpha} \geq 1$ per tot $\alpha \in \mathbb{Z}$ i per tant la sèrie divergeix (no es satisfà la condició necessària de convergència). ▷

13. Discutiu, segons els valors de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergència de la sèrie $\sum p^\alpha (\ln p)^\beta$.

◁ **Solució.** *1)* Si $\alpha > 0$ la sèrie és divergent per tot $\beta \in \mathbb{R}$ donat que no es satisfà la condició necessària de convergència: $\lim\limits_{p} p^\alpha (\ln p)^\beta = +\infty$ per tot $\beta \in \mathbb{R}$.

2) Si $\alpha = 0$ distingirem dos casos:

(a) Per $\beta \geq 0$ la sèrie divergeix, també debut a què no es satisfà la condició necessària de convergència: $\lim\limits_{p} (\ln p)^\beta \neq 0$ per cap valor de $\beta \geq 0$ (és $+\infty$ per $\beta > 0$ i 1 quan $\beta = 0$).

(b) Per $\beta < 0$ considerarem la funció: $f(x) = (\ln x)^\beta$ que és positiva, contínua i monòtona decreixent per $x \geq 2$ i per tot $\beta < 0$ i estudiarem la convergència de la seva integral sobre l'interval $[2, +\infty)$:

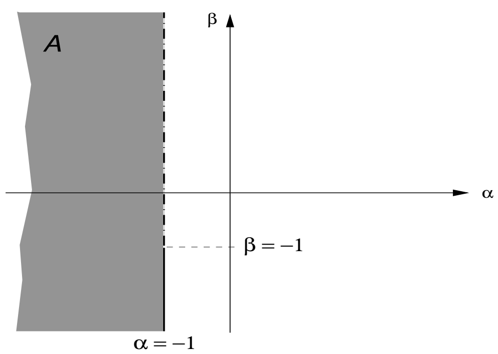

Figura 1. Convergència al pla (α, β).

$$\int_2^\infty (\ln x)^\beta \, dx = \int_2^e (\ln x)^\beta \, dx + \int_e^{+\infty} (\ln x)^\beta \, dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \text{c. v.: } x = e^u \Leftrightarrow u = \ln x, \\ x = e^u \Rightarrow dx = e^u du, \\ x \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty, \\ x = e \Rightarrow u = 1. \end{array}\right\} = \underbrace{\int_2^e (\ln x)^\beta \, dx}_{\text{conv.}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} u^\beta e^u \, du}_{\text{div., amb: } u^\beta e^u > 0} = +\infty.$$

Aleshores, pel criteri integral:

$$\int_2^\infty (\ln x)^\beta \, dx \text{ divergent } \forall \beta < 0 \Rightarrow \sum_{p\geq 2} (\ln x)^\beta \text{ divergent } \forall \beta < 0.$$

3) Si $\alpha < 0$, considerarem la funció $f(x) = x^\alpha (\ln x)^\beta$ per $x \geq 2$, la qual |en aquest interval|, és positiva, contínua i decreix per $x \geq M(\alpha,\beta)$, on:

$$M(\alpha,\beta) = \sup\left\{2, \lfloor \mathrm{e}^{-\beta/\alpha}\rfloor + 1\right\}, \tag{1}$$

amb $\alpha < 0, \beta \in \mathbb{R}$ i on $\lfloor\cdot\rfloor$ denota la funció part entera(2). En efecte, ja que:

$$f'(x) = x^{\alpha-1}(\ln x)^{\beta-1}[\alpha \ln x + \beta] \leq 0 \Longleftrightarrow \alpha\ln x + \beta \leq 0, (\alpha < 0) \Longleftrightarrow \ln x \geq -\frac{\beta}{\alpha}$$

i per tant $f(x)$ decreix si $x \geq \mathrm{e}^{-\beta/\alpha}$. En particular a l'interval $[2,+\infty)$ decreixerà per $x \geq M(\alpha,\beta)$ amb $M(\alpha,\beta)$ definit per (1).

D'altra banda, es veu que la integral:

$$\int_{M(\alpha,\beta)}^{+\infty} x^\alpha (\ln x)^\beta \mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} \text{c. v.: } x = \mathrm{e}^t \Leftrightarrow t = \ln x, \text{ llavors:} \\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\mathrm{d}t, \\ x = M(\alpha,\beta) \Rightarrow t = \ln M(\alpha,\beta), \\ x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty. \end{array}\right\}$$

$$= \int_{\ln M(\alpha,\beta)}^{+\infty} t^\beta \mathrm{e}^{(1+\alpha)t}\mathrm{d}t : \left\{\begin{array}{l} \text{convergeix } \forall\beta, \text{ quan } \alpha < -1, \\ \text{convergeix} \Leftrightarrow \beta < -1, \text{ quan } \alpha = -1, \\ \text{divergeix } \forall\beta, \text{ quan } -1 < \alpha < 0. \end{array}\right.$$

Sigui $A \subset \mathbb{R}^2$ donat per:

$$A = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < -1\right\} \cup \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = -1, \beta < -1\right\}. \tag{2}$$

Així, dels puts *1)* i *2)* es conclou que, per tot β, la sèrie és divergent quan $\alpha \geq 0$. En canvi, per $\alpha < 0$ es segueix, aplicant el criteri integral al que s'ha vist al punt *3)*:

$$\int_{M(\alpha,\beta)}^{+\infty} x^\alpha(\ln x)^\beta \mathrm{d}x \text{ convergent} \Leftrightarrow (\alpha,\beta) \in A \Longrightarrow \sum_{p\geq 2} p^\alpha (\ln p)^\beta \text{ convergent} \Leftrightarrow (\alpha,\beta) \in A.$$

Finalment doncs, queda clar que:

$$\sum_{p\geq 2} p^\alpha(\ln p)^\beta \text{ convergent } \Longleftrightarrow (\alpha,\beta) \in A,$$

essent A el domini del pla de paràmetres (α,β) donat per (2). A la figura 1, l'àrea ombrejada representa aquesta regió de convergència. ▹

14. Essent $\sum a_p$ convergent $a_p \geq 0, b_p \geq 0$:

a) Proveu que si (b_p) és acotada, és $\sum a_p b_p$ convergent.

b) Proveu que si $\sum b_p$ és convergent, és $\sum \sqrt{a_p b_p}$ convergent.

c) En particular, deduïu que $\sum \frac{1}{p}\sqrt{a_p}$ és convergent.

◃ **Solució.**

a) com que $(b_p)_{p\geq 0}$ amb $b_p \geq 0$ és fitada, existeix $M \geq 0$ tal que: $b_p \leq M$ per tot p. Aleshores, $0 \leq a_p b_p \leq M a_p$ per tot p (ja que $a_p \geq 0$ per tot p); per tant:

$$\sum_{p\geq 0} a_p \text{ convergent } \Longrightarrow \sum_{p\geq 0} a_p b_p \text{ convergent (criteri de majorització).}$$

(2) i. e: si $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x\rfloor := \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$.

b) Com que $0 \leq \sqrt{a_p b_p} \leq \frac{1}{2}(a_p + b_p)$ per tot p; les sèries $\sum_{p\geq 0} a_p$ i $\sum_{p\geq 0} b_p$ són convergents (i per tant $\sum_{p\geq 0}(a_p + b_p)$ també és convergent; del criteri de majorització es dedueix la convergència de $\sum_{p\geq 0} \sqrt{a_p b_p}$.

c) Només cal aplicar b agafant $b_p = \frac{1}{p^2}$. ▷

15. a) Essent $\sum a_p, a_p \geq 0$, proveu el "criteri logarítmic":

$$\lim \frac{\ln \frac{1}{a_p}}{\ln p} = L > 1 \Rightarrow \sum a_p \text{ CONV.}, \qquad \frac{\ln \frac{1}{a_p}}{\ln p} = L < 1 \Rightarrow \sum a_p \text{ DIV.}$$

b) Apliqueu-lo per a discutir, segons el valor de $\alpha > 0$, la convergència de la sèrie $\sum \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)^{-p\ln p}$.

◁ **Solució.**

a) Com que suposen que aquest límit existeix i val L llavors, de la definició de límit es té que:

$$\forall\ 0 < \varepsilon < L\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : p \geq N \Longrightarrow L - \varepsilon < \frac{\ln \frac{1}{a_p}}{\ln p} < L + \varepsilon,$$

d'on es segueix que:

$$\frac{1}{p^{L+\varepsilon}} < a_p < \frac{1}{p^{L-\varepsilon}}, \qquad \text{per tot } p \geq N(\varepsilon). \tag{3}$$

Així, si $L > 1$ agafem, per exemple, $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$ i aplicant (3) tindríem:

$$0 \leq a_p \leq \frac{1}{p^{\frac{L+1}{2}}}, \quad \text{per } p \geq N(\tfrac{L-1}{2}). \text{ I com que: } \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^{\frac{L+1}{2}}} \text{ convergent } \Rightarrow \sum_{p\geq 1} a_p \text{ convergent}$$

(notem que $\frac{L+1}{2} > 1$, ja que $L > 1$). Per $L < 1$, podem triar: $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$ i, per (3) es té:

$$a_p > \frac{1}{p^{\frac{1+L}{2}}}, \qquad \text{per } p \geq N(\tfrac{1+L}{2}). \text{ I com que: } \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^{\frac{1+L}{2}}} \text{ divergent } \Rightarrow \sum_{p\geq 1} a_p \text{ divergent}$$

(notem que $\frac{L+1}{2} < 1$ quan, com ara $L < 1$). En tots dos casos hem aplicat comparació per majorització.

b) En aquest cas particular $a_p = (1 + \frac{\alpha}{p})^{-p\ln p}$ i llavors:

$$L = \lim_p \frac{\ln \frac{1}{a_p}}{\ln p} = \lim_p \frac{\ln(1 + \frac{\alpha}{p})^{p\ln p}}{\ln p} = \lim_p \frac{p \ln p \ln(1 + \frac{\alpha}{p})}{\ln p} = \lim_p p\frac{\alpha}{p} = \alpha.$$

Aleshores, per aplicació directa del que s'ha provat a l'apartat anterior, si $\alpha > 1$ la sèrie és convergent; si $\alpha < 1$ la sèrie és divergent. Mirem què passa si $\alpha = 1$. De $(1 + \frac{\alpha}{p})^p \leq \mathrm{e} \Rightarrow (1 + \frac{1}{p})^{p\ln p} \leq \mathrm{e}^{\ln p} = p \Rightarrow (1 + \frac{1}{p})^{-p\ln p} \geq \frac{1}{p} > 0$. I com que $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p}$ divergent $\Rightarrow \sum_{p\geq 1}(1 + \frac{1}{p})^{-p\ln p}$ divergent (criteri de majorització). Resumint: si $\alpha > 0$, $\sum_{p\geq 1}(1 + \frac{\alpha}{p})^{-p\ln p}$ és convergent $\Leftrightarrow \alpha > 1$. ▷

16. a) (Criteri de condensació de Cauchy). Essent $(a_p) \to 0$ decreixentment: $\sum a_p$ és convergent si i només si ho és $\sum 2^q a_{2^q} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots$

b) Apliqueu-lo per a estudiar la convergència de las sèries:

$$\sum \frac{1}{p \ln p}, \qquad \sum \frac{1}{p \ln p \ln(\ln p)}.$$

◁ **Solució.** *a)* Siguin $A_p = \sum_{k=0}^{p} a_k$ i $B_p = \sum_{k=0}^{p} 2^k a_{2^k}$ les sumes parcials de les sèries $\sum_{p\geq 0} a_p$ i $\sum_{p\geq 0} 2^p a_{2^p}$. Llavors, per $p \geq 0$ tenim d'una banda:

$$A_p = \sum_{k=0}^{p} a_k \leq a_0 + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ln p}{\ln 2} \rfloor} 2^k a_{2^k} = a_0 + B_{\lfloor \frac{\ln p}{\ln 2} \rfloor}, \tag{4}$$

on $\lfloor \cdot \rfloor$ és la funció part entera (veure nota (2) al problema 13, pàgina 7). En efecte:

$$2^k a_{2^k} \geq a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{q+1}-1} \Rightarrow a_0 + B_{\lfloor \frac{\ln p}{\ln 2} \rfloor} = a_0 + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ln p}{\ln 2} \rfloor} 2^k a_{2^k} \geq$$

$$\geq a_0 + \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 p \rfloor} (a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \geq a_0 + a_1 + a_2 + \sum + a_p = A_p,$$

per tot $p \geq 1$ i on hem fet servir que $\lfloor \frac{\ln p}{\ln 2} \rfloor = \lfloor \log_2 p \rfloor > \log_2 p - 1 \Rightarrow 2^{k+1} - 1 > 2^{\log_2 p - 1 + 1} - 1 = p - 1$ per tot $0 \leq k \leq \lfloor \frac{\ln p}{\ln 2} \rfloor$. De la mateixa manera:

$$B_p = \sum_{k=0}^{p} 2^k a_{2^k} \leq -2a_0 - a_1 + 2A_{2^p}; \tag{5}$$

com es pot comprovar d'immediat fent,

$$B_p = \sum_{k=0}^{p} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2\sum_{k=1}^{p} 2^{k-1} a_{2^k} \leq a_1 + 2\sum_{k=1}^{p} (a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k-1} + a_{2^k})$$

$$= a_1 + 2\sum_{k=2}^{2^p} a_k = a_1 + 2(A_{2^p} - a_1 - a_0) = -2a_0 - a_1 2A_{2^p},$$

on utilitzem que $0 \leq a_{2^k} \leq a_{2^{k-1}+s}, 1 \leq s \leq 2^{k-1}, 2 \leq k \leq p$ (pel decreixement dels termes).

Suposem primer que $\sum_{p\geq 0} 2^p a_{2^p}$ és convergent; llavors B_p, que és monòtona creixent —suma acumulada de termes positius—, ha d'estar acotada superiorment. Aleshores, de (4), es dedueix que A_p —que és monòtona creixent per la mateixa raó que B_p—, també està fitada superiorment. Es conclou d'aquí la convergència de $\sum_{p\geq 0} a_p$. Recíprocament, sigui $\sum_{p\geq 0} a_p$ convergent. Essent, com s'ha dit, A_p monòtona creixent, aquesta haurà d'estar acotada superiorment, però (5) implica que B_p també ho està, i d'aquí es deriva d'immediat la convergència de $\sum_{p\geq 0} 2^p a_{2^p}$.

b) Per la primera $a_p = \dfrac{1}{p \ln p}$. Aleshores:

$$\sum_{p\geq 1} 2^p a_{2^p} = \sum_{p\geq 1} 2^p \frac{1}{2^p \ln 2^p} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p} \text{ (divergent) } \overset{a)}{\Longrightarrow} \sum_{p\geq 1} a_p = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p \ln p} \text{ divergent .}$$

Per la segona és $a_p = \dfrac{1}{p \ln p \ln(\ln p)}$. Aleshores:

$$\sum_{p\geq 2} 2^p a_{2^p} = \sum_{p\geq 2} \frac{2^p}{2^p \ln 2^p \ln(\ln 2^p)} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{p\geq 2} \frac{1}{p(\ln p + \ln(\ln 2))}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{p\geq 0} \frac{1}{p \ln p \left(1 + \frac{\ln(\ln 2)}{\ln p}\right)} \sim \sum_{p\geq 2} \frac{1}{p \ln p} \text{ div. (per } a)) \Longrightarrow \sum_{p\geq 2} \frac{1}{2^p \ln 2^p \ln(\ln 2^p)} \text{ div.,}$$

pel criteri de comparació per quocient per sèries de termes amb signe constant, donat que:

$$\lim_p p \ln p \frac{1}{p \ln p \left(1 + \frac{\ln(\ln 2)}{\ln p}\right)} = 1.$$

Per últim, el que s'ha demostrat a l'apartat *a)* garanteix la convergència de $\sum_{p\geq 2} \frac{1}{p \ln p \ln(\ln p)}$. $\triangleright$

17. Essent $\sum a_n, a_n \geq 0$, una sèrie divergent, proveu que:

(a) $\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ és convergent. (b) $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ és divergent.

$\triangleleft$ **Solució.**

(a) De $\frac{a_n}{1+n^2a_n} \leq \frac{1}{n^2}$ per tot n. Aleshores, del criteri de majorització:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ CONV.} \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+n^2a_n} \text{ CONV.}$$

(notem que no cal la divergència de $\sum_{n\geq 1} a_n$).

(b) Podem suposar $a_n \neq 0$ (si no, els treiem i encara $\sum a_n = +\infty$). Si $\lim_n a_n = 0$, llavors es segueix directament de la definició de límit que hi ha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_n \leq 1$ per tot $n \geq n_0$. Per tant,

$$\frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{a_n}{2}, \quad \forall n \geq n_0$$

i del criteri de comparació per majorització:

$$\sum_{n\geq 0} a_n \text{ DIV. } \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{1+a_n} \text{ DIV.}$$

En canvi, si $a_n \not\to 0$ llavors $\frac{a_n}{1+a_n} \not\to 0$ i la sèrie és divergent ja que no es satisfà la condició necessària de Cauchy. $\triangleright$

18. a) Essent $\sum a_p$ i $\sum b_p$ dues sèries de termes positius, suposem que existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que: $\frac{b_{p+1}}{b_p} \leq \frac{a_{p+1}}{a_p}, \forall p \in \mathbb{N}$. Proveu que si $\sum a_p$ és convergent, llavors $\sum b_p$ també és convergent.

b) Apliqueu-ho per a estudiar la convergència de la sèrie $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2p)}$.

$\triangleleft$ **Solució.** *a)* Per tot $p > N$ es té:

$$\frac{b_{p+1}}{b_{N+1}} = \frac{b_{p+1}}{b_p}\cdot\frac{b_p}{b_{p-1}}\cdot\frac{b_{p-1}}{b_{p-2}}\cdot\frac{b_{p-2}}{b_{p-3}}\cdot\ldots\cdot\frac{b_{N+3}}{b_{N+2}}\cdot\frac{b_{N+2}}{b_{N+1}}$$
$$\leq \frac{a_{p+1}}{a_p}\cdot\frac{a_p}{a_{p-1}}\cdot\frac{a_{p-1}}{a_{p-2}}\cdot\frac{a_{p-2}}{a_{p-3}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} = \frac{a_{p+1}}{a_{N+1}} \Longrightarrow 0 \leq b_{p+1} \leq \frac{b_{N+1}}{a_{N+1}}a_{p+1}.$$

I com que $\sum a_p$ és convergent, per majorització tenim que $\sum b_p$ és convergent.

Remarca 1.1. De la mateixa manera es demostra per aquest cas que si existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{b_{p+1}}{b_p} \geq \frac{a_{p+1}}{a_p}, \quad \forall p > N.$$

Llavors $\sum a_p$ divergent $\Rightarrow \sum b_p$ divergent.

b) $b_p = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2p+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2p)}$. Aleshores:

$$\frac{b_{p+1}}{b_p} = \frac{2p+1}{2p+2} \geq \frac{p}{p+1} = \frac{1/(p+1)}{1/p} \quad \forall p > 1,$$

$(a_p = 1/p)$. I com que $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p}$ és divergent, la sèrie estudiada és divergent (remarca 1.1). $\triangleright$

19. Calculeu la suma de les sèries:
(a) $\sum \frac{1}{p(p+1)}$, (b) $\sum \frac{1}{(2p-1)(2p+1)}$, (c) $\sum \frac{p+12}{p^3+5p^2+6p}$.

◁ **Solució.** Si $a_p = b_{p+1} - b_p =: \Delta b_p$, la sèrie corresponent, $\sum a_p = \sum \Delta b_p$, s'anomena sèrie *telescòpica*. En particular,

$$\sum_{p=M}^{N-1} a_p = \sum_{p=M}^{N-1} \Delta b_p = b_N - b_M \Rightarrow \sum_{p\geq M} a_p = \sum_{p\geq M} \Delta b_p = \lim_{N\to+\infty}(b_N - b_M).$$

Aleshores:

$$\sum_{M\geq 0} a_p = \sum_{p\geq M} \Delta b_p \text{ convergent } \iff \lim_p b_p \text{ existeix i és finit.}$$

(a) És una sèrie telescòpica. En efecte, descomposant el fraccions simples el seu terme general, es té:

$$a_p = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = b_{p+1} - b_p$$

amb: $b_p = -\frac{1}{p}$; llavors,

$$\sum_{p=M}^{N-1} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=M}^{N-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{M} - \frac{1}{N}$$

i per $M = 1$:

$$\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p(p+1)} = \lim_{N\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1.$$

(b) També és una sèrie telescòpica:

$$a_p = \frac{1}{(2p-1)(2p+1)} = \frac{1/2}{2p-1} - \frac{1/2}{2p+1} = b_{p+1} - b_p,$$

on ara agafem: $b_p = \frac{-1/2}{2p-1}$. Per tant,

$$\sum_{p=M}^{N-1} \frac{1}{(2p-1)(2p+1)} = \sum_{p=M}^{N-1} \left(\frac{1/2}{2p-1} - \frac{1/2}{2p+1}\right) = \frac{1/2}{2M-1} - \frac{1/2}{2N-1}$$

i per $M = 0$:

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p-1)(2p+1)} = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1/2}{-1} - \frac{1/2}{2N-1}\right) = -\frac{1}{2}.$$

(c) A partir de la descomposició en fraccions simples del terme general:

$$\begin{aligned}\frac{p+12}{p^3+5p^2+6p} &= \frac{p+12}{p(p+2)(p+3)} = \frac{2}{p} - \frac{5}{p+2} + \frac{3}{p+3} \\ &= \frac{2}{p} - \frac{2}{p+1} + \frac{2}{p+1} - \frac{2}{p+2} + \frac{3}{p+3} - \frac{3}{p+2},\end{aligned}$$

es veu que la sèrie es pot descomposar com suma de tres sèries telescòpiques convergents:

$$\sum_{p\geq 1} \Delta b_p = \sum_{p\geq 1}(b_{p+1} - b_p) = \sum_{p\geq 1}\left(\frac{-2}{p+1} - \frac{-2}{p}\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(2 - \frac{2}{N}\right) = 2,$$

$$\sum_{p\geq 1} \Delta c_p = \sum_{p\geq 1}(c_{p+1} - c_p) = \sum_{p\geq 1}\left(\frac{-2}{p+2} - \frac{-2}{p+1}\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{N+1}\right) = 1,$$

$$\sum_{p\geq 1} \Delta d_p = \sum_{p\geq 1}\left(\frac{3}{p+3} - \frac{3}{p+2}\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{3}{N+2} - 1\right) = -1.$$

Aleshores:

$$\sum_{p\geq 1} \frac{p+12}{p^3+5p^2+6p} = \sum_{p\geq 1}(\Delta b_p + \Delta c_p + \Delta d_p) = \sum_{p\geq 1}\Delta b_p + \sum_{p\geq 1}\Delta c_p + \sum_{p\geq 1}\Delta d_p = 2+1-1 = 2. \triangleright$$

20. Demostreu les següents expressions d'acotació del residu:

a) $\left|\sum_{p=0}^{\infty} \frac{p}{p+1}\frac{1}{3^p} - \sum_{p=0}^{N} \frac{p}{p+1}\frac{1}{3^p}\right| < \frac{1}{3^N 2}$.

b) $\left|\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} - \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!}\right| < \frac{1}{N!N}$.

$\triangleleft$ **Solució.**

a) Per tot $N \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{p=0}^{\infty} \frac{p}{p+1}\frac{1}{3^p} - \sum_{p=0}^{N} \frac{p}{p+1}\frac{1}{3^p}\right| = \sum_{p\geq N+1} \underbrace{\frac{p}{p+1}}_{<1\ \forall p\in\mathbb{N}} \frac{1}{3^p} < \sum_{p\geq N+1} \frac{1}{3^p} = \frac{1}{3^{N+1}}\sum_{p\geq 0}\frac{1}{3^p} = \frac{\frac{1}{3^{N+1}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^N 2}.$$

b) Per tot $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} - \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!}\right| &= \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+2)!} + \frac{1}{(N+3)!} + \frac{1}{(N+4)!} + \cdots + \frac{1}{(N+k)!} + \dots \\
&= \frac{1}{(N+1)!}\left(1 + \frac{1}{(N+2)} + \frac{1}{(N+2)(N+3)} + \frac{1}{(N+2)(N+3)(N+4)} + \dots \right. \\
&\qquad \left. \cdots + \frac{1}{(N+2)(N+3)\cdots(N+k)} + \dots\right) \\
&< \frac{1}{(N+1)!}\left(1 + \frac{1}{(N+1)} + \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(N+1)^{k-1}} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{(N-1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{N+1}} = \frac{1}{(N+1)!}\frac{N+1}{N+1-1} = \frac{1}{N!N}.
\end{aligned}$$

On hem fet servir que $\prod_{j=2}^{k}(N+j) = (N+2)(N+3)(N+4)\cdots(N+k) > (N+1)^{k-1}$ per tot $N \in \mathbb{N}$ i tot $\mathbb{N} \ni k \geq 2$. Exercici: comproveu això últim per inducció. $\triangleright$