

Equacions diferencials ordinàries.

Teoremes d'existència i unicitat

1 Introducció

Una *equació diferencial ordinària* —d'ara endavant, EDO—, és una equació del tipus:

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

que relaciona una funció, y , dependent de la variable real x amb les seves derivades:

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n},$$

fins a un cert ordre $n \geq 1$ finit.

Una *solució* de l'EDO (1), és una funció n vegades derivable $y \in I \mapsto y(x) \in \mathbb{R}$ d'un interval I (acotat o no) de la recta real amb valors en \mathbb{R} que satisfà idènticament la relació (1), és a dir:

$$G(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

per tot $x \in I$.

Tanmateix, és molt usual referir-se a x com la *variable independent* mentre que la “funció incògnita”, y , reb el nom de *variable dependent*.

L'*ordre* d'una EDO és el grau de la derivada més alta que hi apareix. D'aquesta manera, n seria l'ordre de l'equació diferencial de dalt. No s'ha de confondre, però l'ordre amb el *grau* d'una EDO, que es defineix només quan G és un polinomi algebraic en $y, y', \dots, y^{(n)}$, com el *grau* d'aquest polinomi. Per exemple, l'equació:

$$(y')^3 \cos x + (y')^2 \sin x + y' + 2e^x y = 0,$$

és de *primer ordre* però de *tercer grau*.

Els casos en què es poden donar resultats clars sobre l'existència de solucions, corresponen a aquells on es pot aïllar la derivada d'ordre màxim (almenys localment) i així escriure (1) d'una manera equivalent com

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2)$$

on $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, amb $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ obert. Quan això és possible, podem convertir l'equació (2) en un *sistema d'equacions* diferencials de primer ordre, sense res més que definir,

$$y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$$

i llavors, afegint (2)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \quad (3)$$

En notació vectorial, aquest últim sistema s'acostuma a escriure com:

$$Y' = F(x, Y) \quad (4)$$

on $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, mentre que la funció F vé donada per:

$$\begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} \in \Omega \xrightarrow{F} F(x, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(x, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Per tant, des d'un punt de vista formal —de cara a provar teoremes d'existència—, hi ha prou amb considerar (sistemes) d'equacions diferencials de primer ordre, com el representat per (4).

Es poden considerar sistemes d'equacions diferencials de primer ordre de la forma (4) *per se*, sense cap referència a una equació diferencial d'ordre superior. Suposarem doncs, d'ara endavant, que $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on Ω és una regió (i. e., un conjunt obert i connex) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. En aquest context introduïrem els conceptes següents:

DEFINICIÓ 1.1. Una *família de solucions* de (4) a l'interval $I \subseteq \mathbb{R}$ (tancat o obert, acotat o no) és una família de funcions $Y(\cdot, C) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, on $C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ és un vector de constants, tal que:

- 1) $(x, Y(x, C)) \in \Omega$, per tot $x \in I$
- 2) $Y(\cdot, C) \in C^1(a, b)$,
- 3) $Y'(x, C) = F(x, Y(x, C))$, per tot $x \in I$.

Les constants c_1, c_2, \dots, c_n reben el nom de *paràmetres* de la família.

DEFINICIÓ 1.2. Anomenarem *solució general* de (4) a una família de solucions que conté *totes* les solucions de l'equació.

EXEMPLE 1.1. La solució general de l'EDO $y' = y$ és $y = Ce^x, C \in \mathbb{R}$. En canvi, la família de funcions $y = (x - C)^2, C \in \mathbb{R}$ no és la solució general de $y' = 2\sqrt{y}, y > 0$, ja que no conté la *solució singular* $y \equiv 0$ (és a dir la solució constant $y(x) = 0$ per tot $x \in \mathbb{R}$).

DEFINICIÓ 1.3. Anomenarem *solució particular* de (4) en l'interval I a una funció específica de la solució general o d'una família de solucions, que s'obté fixant tots els paràmetres.

EXEMPLE 1.2. Una solució particular de $y' = y$ és $y = e^x$, la qual correspon al valor $C = 1$ del paràmetre a la solució general (veure exemple 1.1).

DEFINICIÓ 1.4 (Sistemes autònoms). Quan al sistema (4), el terme de la dreta, F no depèn explícitament de la variable dependent, x , i. e., quan el sistema és del tipus:

$$Y' = F(Y), \quad (5)$$

amb $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ obert; es parla de *sistema d'equacions diferencials autònom* o senzillament *sistema autònom*.

En general, quan en una equació diferencial (o sistema) no apareix explícitament la variable independent, es parla d'*equació diferencial autònoma* o de *sistema d'equacions diferencials autònom*.

DEFINICIÓ 1.5 (Trajectòries i corbes integrals). Donada una solució qualsevol $y(x)$ del sistema (4), definida a l'interval I , s'anomena *trajectòria*, o de vegades també *òrbita*, a la imatge de la funció $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mentre que el gràfic d'aquesta funció reb el nom de *corba integral*.

Així, parlarem de les trajectòries (òrbites) i de les corbes integrals d'una EDO o d'un sistema. Notem que les trajectòries d'un sistema com (4) són corbes parametritzades (per la seva variable independent) a l'*espai de fases* \mathbb{R}^n . Aquestes corbes s'obtenen projectant les corbes integrals —les quals “viuen” a l'espai de fases “extès” $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ — sobre \mathbb{R}^n . A la figura 1 es representen una corba integral i la seva trajectòria del sistema $y_1' = y_2, y_2' = -y_1$.

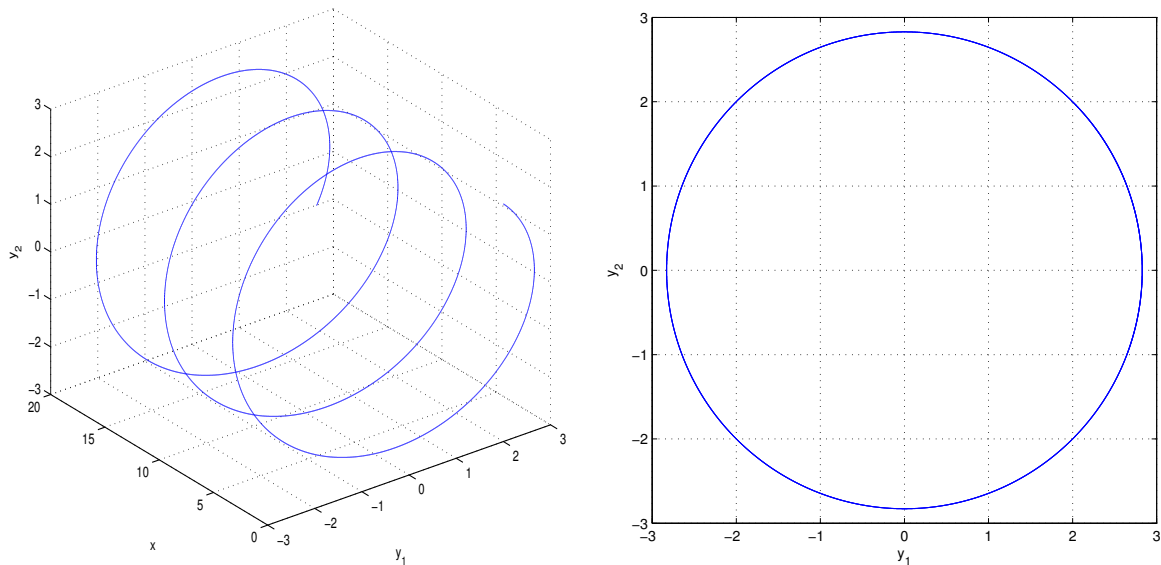


Figura 1. Corba integral (figura de l'esquerra) i trajectòria (a la dreta) del sistema $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1$. Totes dues corresponen a la solució: $y_1(x) = 2\sqrt{2} \cos x$, $y_2(x) = 2\sqrt{2} \sin x$.

EXEMPLE 1.3 (Equacions de Lotka-Volterra). El sistema d'equacions diferencials següent:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= (a - cY)X, \\ \frac{dY}{dt} &= (-b + dX)Y, \end{aligned} \quad (6)$$

és l'anomenat *sistema de Lotka-Volterra* i va ser desenvolupat de manera independent pels matemàtics A. Lotka i Vitto Volterra qui passà la primera Guerra Mundial en les Forces Aèries, desenvolupant les capacitats bèl·liques dels dirigibles (fou el primer en proposar l'ús de l'heli en comptes de l'hidrògen, molt inflamable). Un cop acabat el conflicte, dirigí les seves investigacions cap a aplicacions civils, proposant models matemàtics per descriure la dinàmica poblacional dels ecosistemes marins. Així el sistema (6) vingué motivat per la necessitat d'explicar les fluctuacions periòdiques de la població piscícola a l'Adriàtic. En aquestes equacions, $X(t)$ representa la població de preses i $Y(t)$ la de depredadors. S'assumeix, a més, que l'espècie X té al seu abast una font externa —i sense restriccions en el medi— d'alimentació (per exemple, la vegetació) mentre que l'espècie Y s'alimenta exclusivament de X . α , β , a , b són constants (positives) del model. Si en (6) re-escalem les variables:

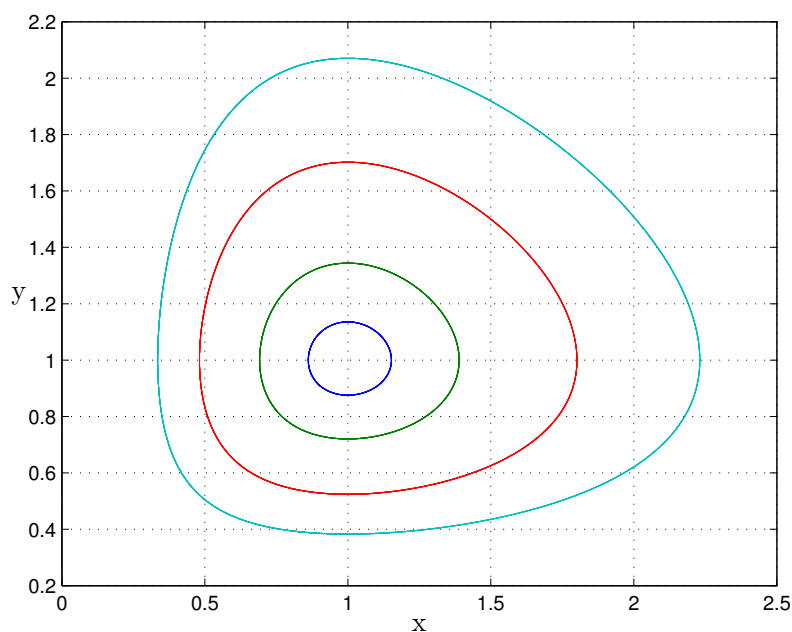
$$X = \frac{b}{d}x, \quad Y = \frac{a}{c}y, \quad t = \frac{1}{d}\tau$$

i definim $\gamma := a/b$, el sistema es transforma en:

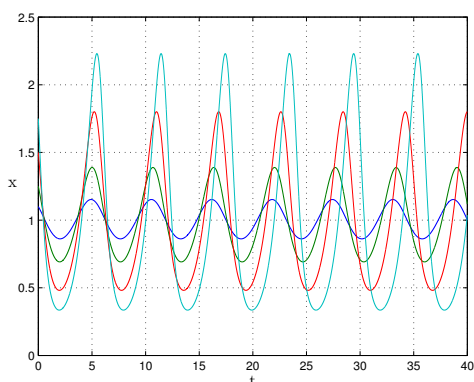
$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \gamma x(1 - y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= -y(1 - x), \end{aligned} \quad (7)$$

on hem posat: $\gamma = a/b$. A la figura 2(a) es dibuixen diverses òrbites del sistema (7), mentre que a les figures 2(b) i 2(c) es representen l'evolució de la població de preses i dels depredadors en funció del temps respectivament.

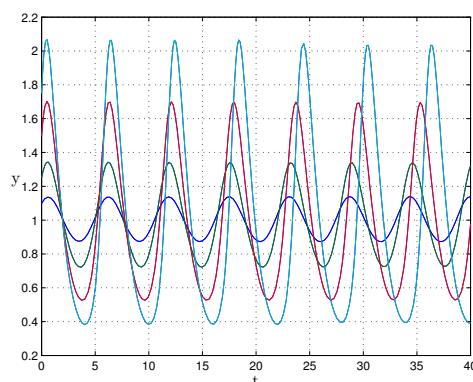
Es veu doncs que el model reproduïx les variacions cícliques de les poblacions a què fèiem referència dalt. Els anomenats *cicles de Volterra* —els de la figura 2(a)— s'expliquen qualitativament de la forma següent. Suposem (vegeu [8], que és d'on hem tret aquest exemple) que inicialment hi ha un nombre



(a)



(b)



(c)

Figura 2. (a) Òrbites de les equacions de Lotka-Volterra (7) per $\gamma = 1.25$. A les gràfiques (b) i (c) es representa, per a les mateixes òrbites, l'evolució de la població preses i de depredadors respectivament.

relativament petit depredadors —per fixar idees posem-ne, taurons—, mentre que les aigües estan infestades de preses —gambes, per exemple. de taurons creix ràpidament, esquilant la població de gambes. Aviat hi ha massa taurons que ja no tenen prou menjar i així la seva població comença a minvar. A mesura que la població de depredadors decreix, les gambes es reproduïxen més ràpidament i el seu nombre augmenta. A partir d'aquest punt, el cicle es pot tornar repetir vegada rera vegada.

DEFINICIÓ 1.6 (El problema de Cauchy). O *problema s valors inicials*, PVI, es formula en termes d'una EDO —o un sistema d'EDOs, com (4)— i una *condició inicial*:

$$\begin{aligned} Y' &= F(x, Y) \\ Y(x_0) &= Y_0 \end{aligned} \tag{8}$$

on $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, essent Ω una regió (i. e., un conjunt obert i connex) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i $(x_0, Y_0) \in \Omega$ donat. La segona equació és la *condició inicial*. Així, resoldre el problema de Cauchy (8) consistirà en trobar una funció $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, I interval de \mathbb{R} amb $x_0 \in I$ tal que:

- C1) $(x, Y(x)) \in \Omega$, per tot $x \in I$,
- C2) $Y \in C^1(I)$,
- C3) $Y'(x) = F(x, Y(x))$, per tot $x \in I$,
- C4) $Y(x_0) = Y_0$.

C1)–C3) indiquen que Y és solució de l'equació diferencial i per C4), que aquesta solució satisfà la condició inicial. Breument doncs, caldrà trobar una solució del sistema —de l'EDO— que passi (la seva corba integral!) pel punt (x_0, Y_0) .

EXEMPLE 1.4. Es comprova d'immediat que la solució del PVI: $y' = y$, $y(0) = 1$ vé donada per $y(x) = e^x$. En efecte: $y'(x) = e^x = y(x)$ i $y(0) = e^0 = 1$. És, per tant, una solució que “passa” pel punt $(0, 1)$.

Voldrem trobar condicions sobre F per tal que el PVI (8) tingui solució i aquesta sigui única. Això es discutirà amb detall a la secció 8 d'aquest mateix capítol, on desenvoluparem mètodes constructius per obtenir solucions *locals*. Abans però, ens mirarem els sistemes des d'un punt de vista geomètric: tota EDO —o sistema d'EDOs—, té un *camp de direccions* associat, que és el que “segueixen” les seves solucions. Això tindrà important conseqüències pràctiques: d'una banda ens permetrà visualitzar les trajectòries del sistema i de l'altra aproximar numèricament les seves solucions.

2 Camps de direccions

Comencem considerant equacions diferencials de primer ordre (o escalars) de la forma

$$y' = f(x, y) \tag{9}$$

on, suposarem que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Sigui $y(x)$ una solució, definida en un cert interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Això vol dir que satisfà idènticament l'equació de dalt en aquest interval. És a dir:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{10}$$

per tot $x \in I$. Sigui $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ un punt de la gràfica de $y(x)$, i. e.: $y_0 = y(x_0)$. Llavors, posant $x = x_0$ en (10):

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0).$$

Veiem doncs que, per trobar el pendent de la solució que passa per un punt $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ no cal pas conèixer explícitament la solució sinó només avaluar $f(x, y)$ en aquest punt, i. e.: $f(x_0, y_0)$. Si es fa això amb tots els punts de $I \times \mathbb{R}$ tenim els pendents de les solucions que passen per cadascun d'ells. A la pràctica, és impossible fer això per tots els punts de $I \times \mathbb{R}$, més aviat es selecciona un nombre suficient i es dibuixa, a cada punt triat, un petit segment amb la inclinació determinada pel pendent de la solució que passa per aquell punt, indicant la seva direcció. S'obté d'aquesta manera el que s'anomena *camp de direccions*. A la figura 3(a) es representa el camp de direccions de l'equació diferencial $y' = 2x - y$ i algunes de les seves corbes integrals.

3 Camp de direccions per sistemes al pla

Suposem a continuació que tenim un sistema autònom al pla, com ara:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y), \end{aligned} \tag{11}$$

essent $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, funcions contínues amb $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ obert. Sigui $x(t), y(t)$ una solució definida en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ i considerem la corresponent trajectòria, que serà la corba parametritzada

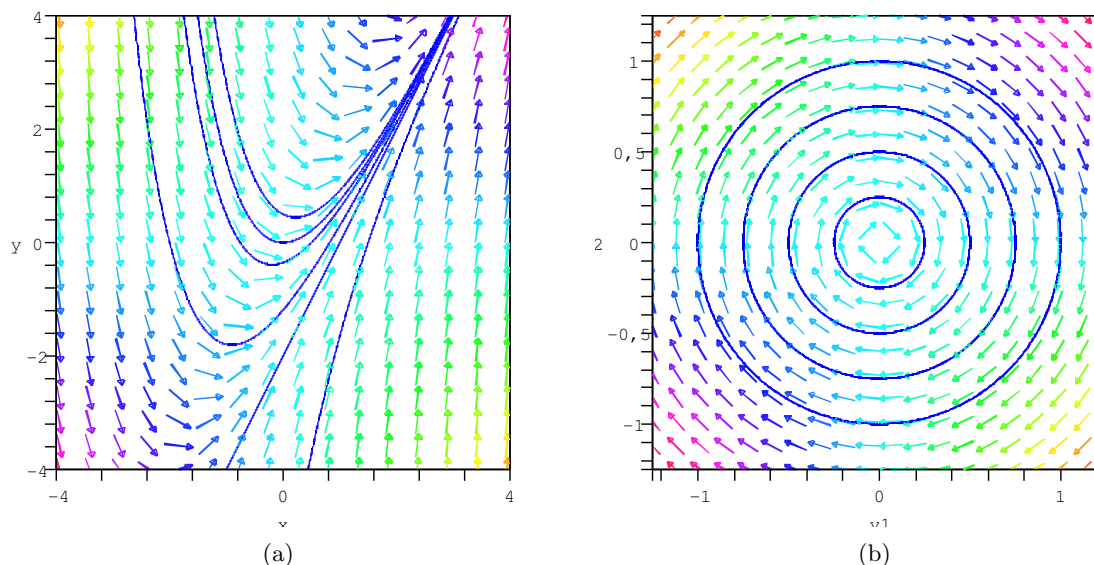


Figura 3. Camp de direccions de l'equació $y' = 2x - y$ (a) i del sistema autònom $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1$ (b). En ambdós casos s'han dibuixat també, en blau, algunes solucions —corbes integrals en el primer i trajectòries en el segon—.

$(x(t), y(t))$. Si (x_0, y_0) és un punt d'aquesta trajectòria corresponent a un valor $t_0 \in I$ del paràmetre, i. e., $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, el vector tangent en aquest punt a la trajectòria (vector velocitat) és:

$$(x'(t_0), y'(t_0)) = (f(x_0, y_0), g(x_0, y_0))$$

De la mateixa manera que abans, podem aprofitar aquest fet per dibuixar un nombre suficient de petits segments (o de fletxetes) que ens ajudaran a visualitzar les trajectòries. A tall d'exemple, a la figura 3(b) s'ha dibuixat el camp de direccions i les òrbites del sistema $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1$ (veure també la figura 1).

Podem estendre aquestes idees i parlar de camps de direccions per sistemes definits en espais de fase de dimensió més gran (tot i que, evidentment, la representació gràfica d'aquests camps esdevé inviable per $n > 2$ en el cas no autònom i $n > 3$ en el cas autònom). La idea però, és que tot sistema d'equacions defineix un camp continu (si F ho és) de direccions, que és en cada punt tangent a la corba integral —en el cas no autònom (4)— o a la trajectòria —en el cas autònom (5)— que passa per aquell punt.

Els teoremes d'existència i unicitat estableixen que, recíprocament, tot camp prou regular¹ de direccions a l'espai $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ defineix, al menys localment al voltant de cada punt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un *flux*, i. e., una aplicació

$$\psi : [t_0 - \tau_{t_0}, t_0 + \tau_{t_0}] \times V_{(t_0, x_0)} \longrightarrow U_{(t_0, x_0)},$$

$\tau_{t_0} > 0$, $V_{(t_0, x_0)}$ i $U_{(t_0, x_0)}$ entorns de x_0 en \mathbb{R}^n ; tal que:

F1) Per tot $(t, x) \in [t_0 - \tau_{t_0}, t_0 + \tau_{t_0}] \times V_{(t_0, x_0)}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = F(t, \psi(t, x)),$$

F2) $\psi(t_0, x_0) = x_0$.

¹hi ha prou amb que sigui *localment Lipschitz* (veure secció 8).

Observem llavors que $Y(t) = \psi(t, x)$ amb $x \in V_{(t_0, x_0)}$, $|t - t_0| < \tau_{t_0}$ és solució (local) del problema de Cauchy:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= F(t, Y), \\ Y(t_0) &= x.\end{aligned}$$

A continuació, veurem com les idees geomètriques introduïdes en aquesta secció es poden fer servir per trobar aproximacions numèriques de les solucions d'un problema de Cauchy donat.

4 El mètode d'Euler

Considerem el problema de Cauchy (8). Busquem un *algorisme* per calcular valors *aproximat*s $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \dots$ de la solució en els punts $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots$. Observem que d'aquesta manera, en comptes d'una funció $Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$, tindrem una *taula de valors* com la taula 1 on $y_{k;0} = y_k(x_0)$ per $k = 1, 2, \dots, n$ —i. e., l'expressió en components de les condicions inicials: $Y(x_0) = Y_0$ —, però $y_{k;j} \approx y_k(x_j)$ per $k = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$.

x	y_1	y_2	\dots	y_n
x_0	$y_{1;0}$	$y_{2;0}$	\dots	$y_{n;0}$
x_1	$y_{1;1}$	$y_{2;1}$	\dots	$y_{n;1}$
x_2	$y_{1;2}$	$y_{2;2}$	\dots	$y_{n;2}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
x_m	$y_{1;m}$	$y_{2;m}$	\dots	$y_{n;m}$

Taula 1. Valors aproximats de la solució del PVI (8).

Seguint el conveni de la taula de dalt, denotarem per $Y(x_k)$ i Y_k als valors exacte i aproximat respectivament de la solució del PVI (8) al punt $x = x_k$, $k = 1, 2, \dots$. A partir de la condició inicial, sabem que $Y(x_0) = Y_0$, però (en general) $Y(x_k) \neq Y_k$ per $k \geq 1$ i de manera semblant per les derivades, és a dir: $Y'(x_0) = F(x_0, Y(x_0)) = F(x_0, Y_0)$ però (en general) $Y'(x_k) = F(x_k, Y(x_k)) \neq F(x_k, Y_k)$ per $k \geq 1$. A més, suposarem que els punts $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ són *equiespaiats* sobre la recta real amb un pas h , i. e.: $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_k = x_0 + kh, \dots$

Cap al 1768 el matemàtic suís L. Euler va introduir el que ell anomenà *mètode de les tangents* i que avui coneixem com *mètode d'Euler*, el qual consisteix en lo següent: com que x_0, Y_0 són valors coneguts a partir de les condicions inicials del PVI (8), la derivada de la solució en $x = x_0$ vé donada per $Y'(x_0) = F(x_0, Y(x_0)) = F(x_0, Y_0)$. Llavors podrem agafar, a l'interval $[x_0, x_1]$, el desenvolupament de Taylor de primer ordre en $x = x_0$ com aproximació de la solució $Y(x)$ al mateix interval, i. e. $Y(x) \approx \tilde{Y}_1(x)$ per $x_0 \leq x \leq x_1$, on es defineix:

$$\tilde{Y}_1(x) := Y_0 + (x - x_0)F(x_0, Y_0), \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

A continuació, a l'interval $[x_1, x_2]$, aproximem també la solució $Y(x)$ pel seu desenvolupament de Taylor a primer ordre, ara al punt $x = x_1$:

$$Y(x) \approx Y(x_1) + (x - x_1)Y'(x_1)$$

però en aquest punt no coneixem $Y(x_1)$ ni $Y'(x_1)$! És per això que ens cal alguna aproximació addicional. De fet, el mètode d'Euler rau en agafar:

$$Y(x_1) \approx Y_1 := \tilde{Y}_1(x_1), \quad Y'(x_1) = F(x_1, Y(x_1)) \approx F(x_1, Y_1)$$

i es pren $Y(x) \approx \tilde{Y}_2(x)$ per $x_1 \leq x \leq x_2$ on

$$\tilde{Y}_2(x) = Y_1 + (x - x_1)F(x_1, Y_1), \quad x_1 \leq x \leq x_2.$$

Aquest últim pas el podem repetir i calcular recursivament² les aproximacions $\tilde{Y}_3(x), \tilde{Y}_4, \dots, \tilde{Y}_k(x), \dots$ de $Y(x)$ als respectius intervals $[x_2, x_3], [x_3, x_4], \dots, [x_{k-1}, x_k], \dots$. Així doncs tindrem, per $k = 2, 3, 4, \dots$,

$$Y(x) \approx Y(x_{k-1}) + (x - x_{k-1})Y'(x_{k-1}) \approx Y_{k-1} + (x - x_{k-1})F(x_{k-1}, Y_{k-1})$$

per $x_{k-1} \leq x < x_k, k = 2, 3, 4, \dots$. Com abans per $k = 2$, s'agafa

$$\tilde{Y}_k(x) = Y_{k-1} + (x - x_{k-1})F(x_{k-1}, Y_{k-1}), \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k. \quad (12)$$

com aproximació de $Y(x)$ en l'interval $[x_{k-1}, x_k]$: i. e. $Y(x) \approx \tilde{Y}_k(x)$ per $x_{k-1} \leq x \leq x_k$. Igualment, en comptes de $Y(x_{k-1})$ i $Y'(x_{k-1})$ —desconeguts!—, es prenen les aproximacions d'aquestes quantitats que produeix el pas anterior, i. e.:

- E1) $Y(x_{k-1}) \approx Y_{k-1} := \tilde{Y}_{k-1}(x_{k-1})$,
 E2) $Y'(x_{k-1}) = F(x_{k-1}, Y(x_{k-1})) \approx F(x_{k-1}, Y_{k-1})$.

DEFINICIÓ 1.7. S'anomena *poligonal d'Euler* de la solució $Y(x)$ del problema de Cauchy (8), a la funció definida “a trossos” per:

$$\tilde{Y}(x) := \tilde{Y}_k(x), \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad (13)$$

$k = 1, 2, \dots$ i on $\tilde{Y}_k(x)$, donat per (8) és costat k -èsim de la poligonal d'Euler.

A partir de (12), de 1 per $x = x_k$ i tenint en compta que $h = x_k - x_{k-1}$ per $k = 1, 2, 3, \dots$ s'arriba a l'*algorisme d'Euler*

$$\begin{aligned} Y_0 &= Y(x_0), \\ Y_k &= Y_{k-1} + hF(x_{k-1}, Y_{k-1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

el qual dóna valors aproximats $Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \dots$ de la solució $Y(x)$ respectivament als punts $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ i. e., posarem: $Y_k \approx Y(x_k)$ als punts $x_k = x_0 + kh$, per $k = 1, 2, \dots$

A la l'algorisme 1 es troba una implementació de (14) amb el llenguatge de programació del MATLAB. Als problemes resolts que vénen a continuació farem servir aquesta funció per comprovar els resultats.

5 Exercicis

En els problemes següents escriu l'algorisme d'Euler, doneu la taula de valors aproximats i dibuixeu la poligonal d'Euler associada.

Problema 5-1. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$, $x \in (0, 1)$ per un pas $h = 0.25$.

◁ **Solució.** Aplicant (14) per $x_0 = 0$, $Y_0 = 1$, $F(x, y) = x^2 - y^2$ s'obté:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) = y(0) = 1, \\ y_n &= y_{n-1} + h(x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2) = y_{n-1} + h((n-1)^2 h^2 - y_{n-1}^2), \quad n = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

on s'ha fet servir que $x_n = x_0 + nh = 0 + nh$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Aleshores l'algorisme es pot posar com la relació de recurrència següent:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y_n &= (1 - hy_{n-1})y_{n-1} + (n-1)^2 h^3, \quad n = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (15)$$

Fent els càlculs explícitament per $n = 1, 2, 3, 4$ i $h = 0.25$ tenim,

$$\begin{aligned} n = 1 : \quad x_1 &= 0.25, \quad y_1 = (1 - 0.25y_0)y_0 + (1-1)h^3 = 1 - 0.25 = \boxed{0.75} \\ n = 2 : \quad x_2 &= 0.50, \quad y_2 = (1 - 0.25y_1)y_1 + (2-1)^2 \cdot 0.015625 = (1 - 0.25 \cdot 0.75) \cdot 0.75 \\ &\quad + 1 \cdot 0.015625 = \boxed{0.625} \end{aligned}$$

²Hom se'n adona fàcilment [veure (12)] que a cada pas es necessiten les aproximacions a la solució obtinguda al pas anterior.

Algorisme 1 Mètode d'Euler amb MATLAB

```

% Euler.m
%
%           [t, x] = Euler(F,tspan,x0,h)
%
% INPUT
%       F : és la funció que conté el camp, la capçalera haurà de ser
%           de la forma:
%
%           function dxdt = F(t,x)
%
%
%       tspan : tspan = [t_inicial, t_final]
%       x0: valor inicial de la variable dependent.
%       h : tamany del pas.
%
% OUTPUT
%       t : vector que conte les abscisses on es calcularan els valors
%           aproximats de les solucions: t(n) = tspan(1)+ n * h, on
%           n= 1,2,...,N = (tspan(2) - tspan(1)) / h.
%       x : x(n,:), n=1,...,N aproximació de la solució a temps t(i).

function [t,x] = Euler(F,tspan,x0,h)

x(1,:) = x0';
t = tspan(1):h:tspan(2);

for K = 1:length(t)-1,
    dxdt = feval(F,t(K),x(K,:));
    x(K+1,:) = x(K,:) + h .* dxdt';
end;

```

n	x_n	y_n [EULER]	y_n [RK78]
0	0,000	1,000 000 000 0	1,000 000 000 000 00
1	0,250	0,750 000 000 0	0,804 707 564 801 89
2	0,500	0,625 000 000 0	0,701 768 384 456 89
3	0,750	0,589 843 750 0	0,683 250 775 970 04
4	1,000	0,643 489 837 6	0,750 015 702 847 29

Taula 2. Solució del PVI **3-1** problema pel mètode d'Euler. La darrera columna de la dreta correspon a la integració amb RK78 i $\varepsilon_{TL} < 1,0 \cdot 10^{-15}$.

$$n = 3: \quad x_3 = 0.75, \quad y_3 = (1 - 0.25y_2)y_2 + (3 - 2)^2 \cdot 0.015625 = (1 - 0.25 \cdot 0.625) \cdot 0.625 + 4 \cdot 0.015625 = \boxed{0.58984375}$$

$$n = 4: \quad x_4 = 1.00, \quad y_4 = (1 - 0.25y_3)y_3 + (4 - 1)^2 \cdot 0.015625 = (1 - 0.25 \cdot 0.58984375) \cdot 0.58984375 + 9 \cdot 0.015625 = \boxed{0.643489837}$$

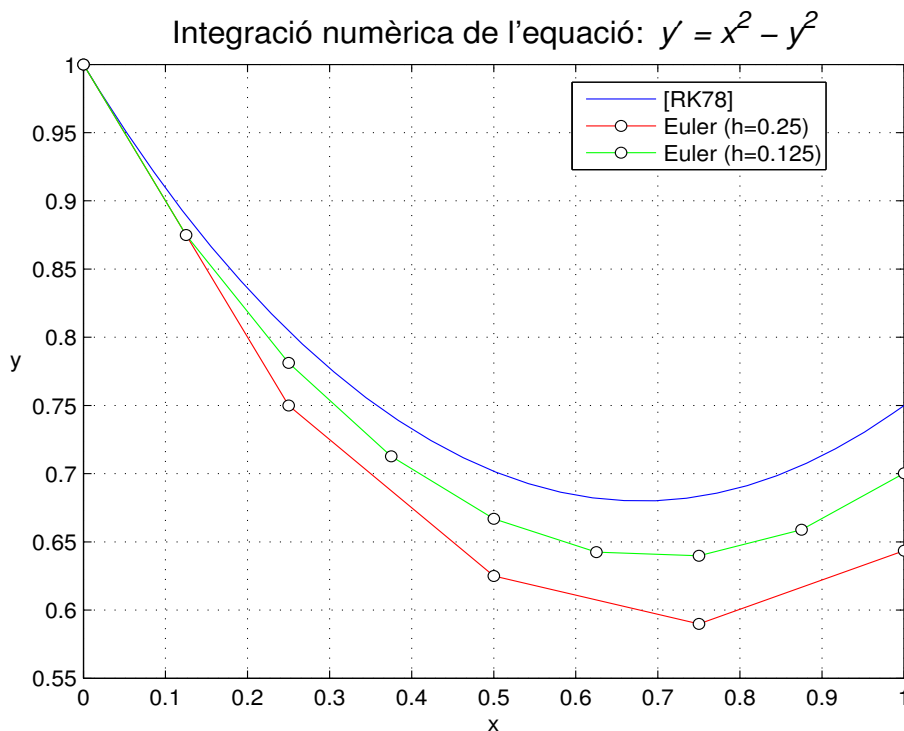


Figura 4. La corba contínua (en blau) correspon a la integració del PVI 3-1 amb RK78 i $\varepsilon_{LT} < 1,0 \cdot 10^{-15}$.

Els resultats d'aquests càlculs es recullen a la taula 2 on, a la darrera columna de la dreta s'han escrit els valors aproximats de la solució als mateixos punts però obtinguts a partir del mètode Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 7 i 8 amb control del pas, —[RK78] a partir d'ara. No comentarem aquí en què consisteix aquest mètode (vegeu l'apèndix, per una descripció més detallada dels mètodes de Runge-Kutta) però assenyalarem que l'esmentat “control del pas” consisteix en ajustar, a cada pas, el seu tamany h de manera que l'error de l'aproximació calculada no sigui més gran que una certa tolerància, ε_{TL} , fixada. A aquest control de l'error, s'afegeix al fet de què es tracta d'un mètode d'ordre elevat. Tot això fa que el [RK78] es consideri un mètode prou acurat —de lluny molt més que mètode d'Euler— per resoldre numèricament problemes a valors inicials: especialment si el camp de direccions és prou regular (prou “smooth”) i l'interval d'integració no és massa llarg. Així, a la figura 4 la corba integral (la gràfica “contínua” en blau) ha estat obtinguda amb el mètode [RK78], calculant un nombre prou elevat de punts. La poligonal d'Euler corresponent a $h = 0.25$ es dibuixa en vermell, on els punts marcats són els de la taula 2. Tot i que s'aprecien desviacions notables entre totes dues —especialment a mesura que x augmenta—, la poligonal “segueix” la corba integral prou bé...

Problema 5-2. $y'' = 1 - y^2$, $y(0) = y'(0) = 0$, $x \in (0, 1)$ per un pas $h = 0.25$.

◁ **Solució.** Introduint $z(x) := y'(x)$, obtenim el sistema equivalent de primer ordre:

$$\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= 1 - y^2, \end{aligned} \tag{16}$$

amb les corresponents condicions inicials:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) = 0, \\ z_0 &= z(0) = y'(0) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

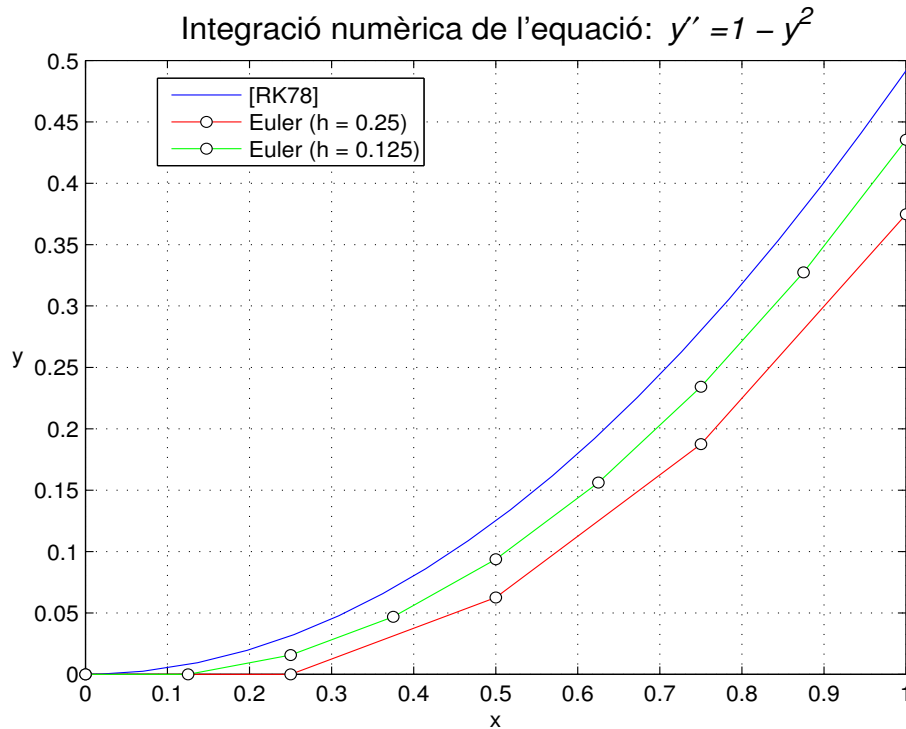


Figura 5. Les poligonals (en vermell i en verd) corresponen a tamanys del pas $h = 0.25$ ($N = 4$) i 0.125 ($N = 8$) respectivament. La corba contínua (en blau) correspon a la integració del PVI 5-1 amb [RK78] i $\varepsilon_{LT} < 1,0 \cdot 10^{-15}$.

Ara, l'algorisme d'Euler corresponent a aquest PVI queda:

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + h z_{n-1}, \\ z_n &= z_{n-1} + h(1 - y_{n-1}^2), \end{aligned} \quad (18)$$

on y_n, z_n són respectivament, les aproximacions de les components $y(x_n), z(x_n)$ de la solució als punts $x_n = x_0 + nh$ per $n = 1, 2, \dots, N$. Posant $x_0 = 0, h = 0.25$ i $N = 4$ (dedes de l'enunciat), l'algorisme 18 produeix la taula 3. La poligonal d'Euler i la corba integral són les representades a la figura 5.▷

n	x_n	y_n	y_n [RK78]	z_n	z_n [RK78]
0	0,000	0,000 000 000 0	0,000 000 000 0	0,000 000 000 0	0,000 000 000 0
1	0,250	0,000 000 000 0	0,031 247 965 6	0,250 000 000 0	0,249 951 175 4
2	0,500	0,062 500 000 0	0,124 869 882 0	0,500 000 000 0	0,498 439 306 9
3	0,750	0,187 500 000 0	0,279 772 044 1	0,749 023 437 5	0,738 203 993 4
4	1,000	0,374 755 859 4	0,491 758 376 8	0,990 234 375 0	0,950 913 603 2

Taula 3. Solució del sistema (16) amb les c. i. (17). S'ha agafat una tolerància $\varepsilon_{TL} < 1,0 \cdot 10^{-14}$ al mètode [RK78].

6 Errors en els mètodes numèrics

Quan es fan servir mètodes numèrics per fer càlculs, com ara l'algorisme d'Euler (14) per resoldre el problema de Cauchy (8), el que s'acaba obtenint són *aproximacions* de les quantitats *exactes*. Així, abans de donar per bona una solució numèrica s'han d'examinar diversos aspectes dels mètodes emprats. Un d'aquests és la *convergència*: és cert que a mida que el pas h tendeix cap a zero, tendeixen els valors de la solució numèrica $Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \dots$ cap als respectius valors $Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_k), \dots$

de la solució exacta? si fos així: com de ràpida és aquesta convergència? o, en termes quantatius: donada una precisió, quin tamany del pas h s'hauria d'agafar per garantir aquesta precisió? De fet, caldrà treballar amb un tamany del pas prou petit per assolir la apreciació demanada però tampoc massa petit, perquè això podria donar lloc a la relentització dels càlculs i fins i tot a la pèrdua de precisió, debut l'acumulació d'errors *d'arrodoniment*.

En efecte, en resoldre numèricament un PVI hi ha dues fonts d'error. En primer lloc, si es suposa que la computadora amb què treballem és capaç d'efectuar tots els càlculs de manera exacta —fent servir “infinites” xifres decimals—, la diferència ε_k entre la solució exacta i la solució aproximada:

$$\varepsilon_k := \|Y(x_k) - Y_k\|, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

es coneix com *error global de truncament*. Aquest error és debut, d'una banda, a que cada pas s'aplica una fórmula aproximada per determinar Y_{n+1} , i de l'altra, a que les dades “d'entrada” a cada pas difereixen de la solució exacta, ja que en general, $Y_k \neq Y(x_k)$. Si aquest últim efecte no es té en compte, i. e., si es suposa que les dades d'entrada són correctes, llavors l'únic error en avançar un pas és debut només a l'ús d'una fórmula aproximada (concretament, a un desenvolupament de Taylor a ordre finit). Aquest error es coneix com *error local de truncament*, ϵ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$.

En segon lloc, debut a les limitacions dels ordinadors, a la pràctica és impossible calcular de manera exacta Y_{k+1} a partir de la fórmula donada. Per tant es té un *error d'arrodoniment* debut a la manca d'exactitud dels càlculs. L'error *global d'arrodoniment* es defineix com:

$$r_k = \|Y_k - Y_k^*\|, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

on Y_k^* és el valor calculat realment per mitjà del mètode numèric emprat, per exemple el mètode d'Euler (14). El mòdul de l'error total en calcular $Y(x_k)$ vindrà donat per:

$$\begin{aligned} \|Y(x_k) - Y_k\| &= \|Y(x_k) - Y_k + Y_k - Y_k^*\| \\ &\leq \|Y(x_k) - Y_k\| + \|Y_k - Y_k^*\| \\ &= \varepsilon_k + r_k. \end{aligned} \quad (20)$$

Pels mètodes numèrics d'un pas (entre els quals es troba el mètode d'Euler) és possible obtenir estimacions efectives de l'error de truncament. En canvi, l'error d'arrodoniment és de naturalesa més aleatòria; depèn del tipus de computadora que es faci servir, del ordre al qual es portin els càlculs, del mètode d'arrodoniment, etc. i el seu estudi ultrapassa l'àmbit d'aquestes notes. Una bona referència per aquests aspectes són els títols [4], [3] de la bibliografia.

7 Error de truncament en el mètode d'Euler

A continuació analitzarem l'error de truncament en el cas del mètode d'Euler. De fet, el que s'obtindrà seran acotacions d'aquest error de truncament. El resultat principal és el que vé formulat a la proposició següent:

PROPOSICIÓ 1.1. *Sigui $Y(x)$ solució del problema del PVI (8) amb $F \in C^1(\Omega)$ i $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a < b$. Supposem: $[a, b] \subseteq I$; $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convex i contenint els vèrtexs de la poligonal d'Euler, i. e.: $(x_k, Y_k) \in \Omega$ per $k = 1, 2, \dots, N$ amb: $x_0 = a$, $x_k = x_0 + kh$, $h = (b - a)/N$ i Y_k donat per (14). Si existeixen L, M donades per:*

$$L = \max \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y) \right\| : (x, Y) \in \bar{\Omega} \right\}, \quad (21)$$

$$M = \max \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x, Y) \right\| + \left\| \frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y) F(x, Y) \right\| : (x, Y) \in \bar{\Omega} \right\}; \quad (22)$$

llavors, els errors local y global de truncament $\epsilon_k, \varepsilon_k$ (veure (19)) admeten les fites següents:

$$\epsilon_k \leq \frac{h^2 M}{2}, \quad (23)$$

$$\varepsilon_k \leq \frac{Mh}{2L} \left(e^{(b-a)L} - 1 \right) \quad (24)$$

per tot $k = 0, 1, 2, \dots, N$.

REMARCA 1.2. En (21) la norma es pren sobre una matriu. Donada una norma vectorial $\|\cdot\|$ en \mathbb{C}^n es defineix la seva *norma matricial compatible* mitjançant:

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \neq 0 \right\}$$

essent A una matriu complexa qualsevol. Sovint a la pràctica, el càlcul de (21) ó (22) pot ser complicat o força feixuc i s'haurà de substituir aquestes quantitats per fites superiors triades convenientment. Per exemple, es pot fer servir

$$L' := n \sup_{1 \leq i, j \leq n} \left\{ \left| \frac{\partial F_i}{\partial Y_j}(x, Y) \right| : (x, Y) \in \bar{\Omega} \right\} \geq L$$

en comptes de L .

DEMOSTRACIÓ. Primer calcularem l'error local de truncament ϵ_n . Desenvolupant per Taylor $Y(x_{n+1}) = Y(x_n + h)$ en $x = x_n$ i tenint en compte (14),

$$Y(x_{n+1}) - Y_{n+1} = Y(x_n) - Y_n + h(F(x_n, Y(x_n)) - F(x_n, Y_n)) + \frac{h^2}{2} Y''(\tilde{x}_n), \quad (25)$$

$\tilde{x}_n \in (x_n, x_n + h)$. Ara, derivant respecte de x a totes dues bandes de $Y'(x) = F(x, Y(x))$ i substituint $x = \tilde{x}_n$ s'obté

$$Y''(\tilde{x}_n) = \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n)) + \frac{\partial F}{\partial Y}(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n))F(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n)).$$

A continuació, substituint a (25), prenent la norma a totes dues bandes i teneint present (22), s'arriba a:

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} &= \|Y(x_{n+1}) - Y_{n+1}\| \\ &= \frac{h^2}{2} \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n)) + \frac{\partial F}{\partial Y}(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n))F(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n)) \right\| \\ &\leq \frac{h^2}{2} \left(\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n)) \right\| + \left\| \frac{\partial F}{\partial Y}(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n))F(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n)) \right\| \right) \\ &\leq \frac{h^2 M}{2}, \end{aligned}$$

per $k = 0, 1, 2, \dots$, on remarquem que en el càlcul de l'error *local* de truncament es suposa $Y_n = Y(x_n)$ (i. e., que les dades "d'entrada" són exactes) i per tant el primer i segon termes a la dreta de la igualtat en (25) són zero, i. e.:

$$Y(x_n) - Y_n = 0, \quad F(x_n, Y(x_n)) - F(x_n, Y_n) = 0.$$

Per acotar l'error de truncament global es procedeix a partir igualment a partir de (25) tenint en compte que les desigualtats de dalt ara no són zero. De fet, la primera és, segons la definició (19), ϵ_n mentre que, pel teorema del valor mitjà (veure [1], secció 12.11):

$$\begin{aligned} \|F(x_n, Y(x_n)) - F(x_n, Y_n)\| &\leq \left\| \frac{\partial F}{\partial Y}(x_n, \tilde{Y}_n) (Y(x_n) - Y_n) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{\partial F}{\partial Y}(x_n, \tilde{Y}_n) \right\| \|Y(x_n) - Y_n\| \\ &\leq L \|Y(x_n) - Y_n\| \end{aligned}$$

on \tilde{Y} és un punt intermig del segment que uneix (x_n, Y_n) amb $(x_n, Y(x_n))$. La última desigualtat és conseqüència de (21). Combinant-ho tot, a partir de (25) s'obté:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1} &= \|Y(x_{n+1}) - Y_{n+1}\| \\ &\leq \|Y(x_n) - Y_n\| + h\|F(x_n, Y(x_n)) - F(x_n, Y_n)\| + \varepsilon_{n+1} \\ &\leq \|Y(x_n) - Y_n\| + hL\|Y(x_n) - Y_n\| + \frac{h^2}{2}M, \\ &= \varepsilon_n + hL\varepsilon_n + \frac{h^2M}{2}\end{aligned}$$

és a dir, la relació:

$$\varepsilon_{n+1} \leq (1 + hL)\varepsilon_n + \frac{h^2M}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

I com que $\varepsilon_0 := \|Y(x_0) - Y_0\| = 0$, aplicant (26) recursivament:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &\leq (1 + hL)\varepsilon_0 + \frac{h^2M}{2} \\ &= \frac{h^2M}{2}, \\ \varepsilon_2 &\leq (1 + hL)\varepsilon_1 + \frac{h^2M}{2} \leq (1 + hL)\frac{h^2M}{2} + \frac{h^2M}{2} \\ &= (1 + (1 + hL))\frac{h^2M}{2}, \\ \varepsilon_3 &\leq (1 + hL)\varepsilon_2 + \frac{h^2M}{2} \leq (1 + hL)(1 + (1 + hL))\frac{h^2M}{2} + \frac{h^2M}{2}, \\ &= (1 + (1 + hL) + (1 + hL)^2)\frac{h^2M}{2}, \dots\end{aligned}$$

Per inducció es comprova que,

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &\leq (1 + (1 + hL) + \dots + (1 + hL)^{n-1})\frac{h^2M}{2} \\ &= \frac{(1 + hL)^n - 1}{1 + hL - 1} \times \frac{h^2M}{2} \\ &= hM\frac{(1 + hL)^n - 1}{2L}, \quad \text{per tot } n = 0, 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

a partir d'aquí, la fita (24) es dedueix de les desigualtats

$$(1 + hL)^n \leq e^{nhL}, \quad \text{per tot } n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

$$nh = \frac{b - a}{N} \leq (b - a), \quad \text{per tot } n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (28)$$

La segona és evident mentre que per demostrar (27) considerarem la funció

$$h(x) = \ln(1 + x) - x, \quad \text{per } x \geq 0.$$

En efecte, com que $h(x)$ és monòtona decreixent per $x > 0$ (ja que la seva derivada $h'(x) = -x/(1 + x)$ és negativa per $x > 0$) i $h(0) = 0$ es té llavors: $h(x) \leq 0$ per tot $x \geq 0$, la qual cosa implica que $\ln(1 + x)^n \leq nx$, per tot $x \geq 0$ i per tot $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. D'aquí (27) surt agafant $x = hL$. \square

REMARCA 1.3. Observem que Per un punt fixat, $\hat{x} = x + Nh$, i. e., amb Nh constant, llavors $Nh = \hat{x} - x_0$. Substituint això en (24), veiem que

$$\varepsilon_k \leq hM\frac{e^{L(\hat{x} - x_0)} - 1}{2L} \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

quan $h \rightarrow 0$ (llavors però es necessiten un nombre infinit de passos per arribar a \hat{x} , i. e., llavors $N \rightarrow \infty$). Així doncs el mètode d'Euler és convergent, donat que l'error global de truncament tendeix a zero quan el pas tendeix cap a zero.

8 Existència i unicitat de solucions del problema de Cauchy

A la definició 1.6 es va introduir el problema de Cauchy o de valors inicials (PVI). Suposarem ara que F és almenys contínua en Ω . En aquesta secció estudiarem sota quines condicions existeix i és única la solució *local* del problema de Cauchy (8). Abans però, cal definir què s'entèn per solució local.

DEFINICIÓ 1.8. Anomenarem *solució local* de (8) a l'interval $[x_0 - a, x_0 + a]$ a una funció $Y : [x_0 - a, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfà:

SL-1) $(x, Y(x)) \in \Omega$ per tot $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

SL-2) $Y \in C^1(]x_0 - a, x_0 + a[) \cap C^0([x_0 - a, x_0 + a])$.

SL-3) $Y'(x) = F(x, Y(x))$ per tot $x \in]x_0 - a, x_0 + a[$ i $Y(x_0) = Y_0$.

REMARCA 1.4. Notem que per tal de que $Y \in C^1(]x_0 - a, x_0 + a[)$, cal que F sigui almenys contínua. Si no és així (8) pot no admetre ni tan sols una solució diferenciable. L'exemple següent Il·lustra aquest fet.

EXEMPLE 1.5. Sigui el PVI:

$$\begin{aligned} y' &= \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$

Si la solució d'aquest problema existís, tenint en compte que haurà de ser contínua en $x = 0$, aquesta vindrà donada per $y(x) = x + y_0$, si $x \leq 0$ i $y(x) = y_0$, si $x > 0$. Però en aquest cas $y'(0^+) = 0 \neq y'(0^-) = 1$. Per tant $y(x)$ no és diferenciable en $x = 0$ i el problema de Cauchy no té solució.

Es pot comprovar, però que la continuïtat de F no tan sols és necessària sinó que és també *suficient* per garantir l'existència. En canvi, per assegurar la *unicitat* de la solució del problema local caldrà més regularitat.

EXEMPLE 1.6. El PVI:

$$\begin{aligned} y' &= y^{1/3}, \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

admet com solució $y_1(x) \equiv 0$, però també:

$$y_2(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Observem doncs que existex solució (F és contínua) però aquesta no és única. El problema rau en la manca de regularitat de $f(x, y) = y^{1/3}$ (no és, per exemple, de classe C^1 a l'origen).

REMARCA 1.5 (Notació). D'ara endavant, $D_r(x_0, Y_0)$ denotarà la bola tancada amb centre $(x_0, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i radi $r > 0$, i. e.:

$$D_r(x_0, Y_0) = \{(x, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|(x - x_0, Y - Y_0)\| \leq r\} = \overline{B_r(x_0, Y_0)}.$$

DEFINICIÓ 1.9. Sigui la funció $f : S \rightarrow \mathbb{R}^p$, on S és un obert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ ($x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$). Direm que f és *localment Lipschitz* en $(x_0, y_0) \in S$, si existeixen $r, L > 0$ tals que $D_r(x_0, y_0) \subset S$ i

$$\|f(x, y) - f(x, y')\| \leq L\|y - y'\|$$

per tot $(x, y), (x, y') \in S$. L reb el nom de constant (local) de Lipschitz.

REMARCA 1.6. Per exemple, si $f \in C^1(S)$, llavors a partir del teorema del valor mitjà i de les propietats de les normes matricials és immediat comprovar que f és localment Lipschitz respecte y en qualsevol punt (x_0, y_0) amb constant de Lipschitz (local) donada per

$$L = \max \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\| : (x, y) \in D_r(x_0, y_0) \right\}$$

El teorema (clàssic) que estableix l'existència i unicitat de solucions al Problema de Cauchy pot formular-se de la manera següent.

TEOREMA 1.7 (Existència i unicitat de solucions). *Sigui el problema a valors inicials:*

$$\begin{aligned} Y' &= F(x, Y), \\ Y(x_0) &= Y_0, \end{aligned} \tag{29}$$

on $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, essent Ω una regió (i. e., un conjunt obert i connex) de $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ($x \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}^n$), amb $(x_0, Y_0) \in \Omega$. Supposem que F és contínua en Ω i existeixen $r, L > 0$ tals que $D_r(x_0, Y_0) \subset \Omega$ i:

$$\|F(x, Y) - F(x, Y')\| \leq L\|Y - Y'\|$$

per $(x, Y) \in \Omega$, $(x, Y') \in \Omega$ qualssevol; i. e., F és localment Lipschitz respecte Y en (x_0, Y_0) amb constant de Lipschitz L —veure definició 1.9—. Sigui M donada per:

$$M = \max \{ \|F(x, Y)\| : (x, Y) \in D_r(x_0, Y_0) \}. \tag{30}$$

Aleshores, si

$$0 < a = \min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{r}{2M} \right\}, \tag{31}$$

existeix una única solució local (definició 1.8), $Y(x)$, definida a l'interval $I_a(x_0) = [x_0 - a, x_0 + a]$. Aquesta solució és única en el sentit següent: si $\tilde{Y}(x)$ és otra solució del PVI (29), definida a l'interval $I_{a'}(x_0)$, amb $0 < a' < a$. Aleshores $Y(x) = \tilde{Y}(x)$ per tot $x \in I_{a'}(x_0)$.

Per abordar la demostració d'aquest teorema necessitem prèviament un conjunt de conceptes i resultats de l'anàlisi que detallem a continuació.

9 Successions funcionals: alguns conceptes i propietats

Entendrem per *successió funcional* una col·lecció numerada de funcions $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = \{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$ definides al mateix interval I de la recta real i prenent valors en \mathbb{R}^n , i. e., $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

DEFINICIÓ 1.10. Direm que una successió funcional, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ com la descrita dalt, convergeix *uniformement* sobre l'interval I (o a l'interval I) a una funció $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si, per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix un índex $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \tag{32}$$

per tot $n \geq N$ i per tot $x \in I$.

Altra caracterització alternativa de la convergència uniforme és la següent: $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ convergeix uniformement a f sobre I si $\sup_{x \in I} \|f(x) - f_n(x)\|$ tendeix a zero quan n tendeix a infinit. Intuïtivament, la convergència uniforme és una convergència “per tubs”. Així, donada $\varepsilon > 0$, les gràfiques de f_n es troben dintre d'un tub de radi ε al voltant de la gràfica de f per a tota n suficientment gran (veure figura 6).

Taquigràficament, s'escriurà $f_n \rightarrow f$ sobre I , o $f_n(x) \rightarrow f(x)$ sobre I . D'altra banda, caldrà distingir la convergència uniforme de la convergència *puntual*.

DEFINICIÓ 1.11. Una successió de funcions $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, convergeix *puntualment* sobre l'interval I cap a la funció $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ per tot $x \in I$. En altres paraules si, per cada x de l'interval I , la successió *numèrica* $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$ convergeix cap al corresponent valor de f al mateix punt, $f(x)$. Escriurem $f_n \rightarrow f$ a (o sobre) I , ó $f_n(x) \rightarrow f(x)$ a (o sobre) I , etc.

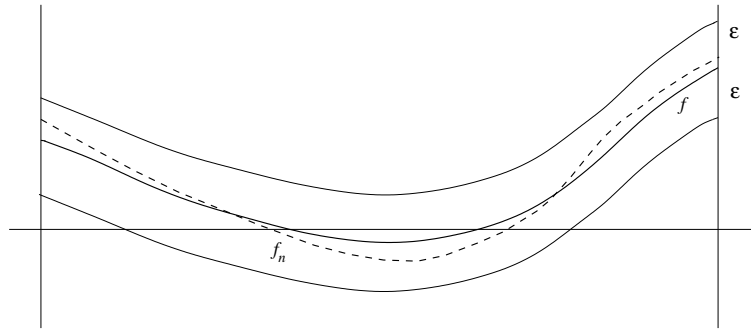


Figura 6. Convergència uniforme: per n suficientment gran les funcions f_n es troben dintre d'un "tub" de radi ε centrat a la funció límit f .

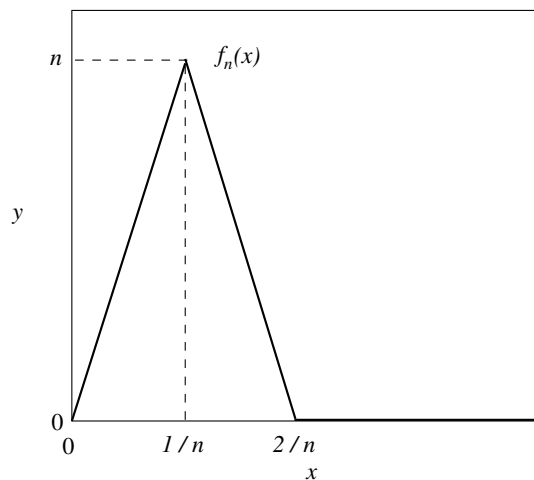


Figura 7. Representació gràfica de la funció $f_n(x)$ donada per (33).

REMARCA 1.8. A partir de les dues definicions, és immediat que la convergència uniforme és més "forta" que la convergència puntual, en el sentit que la primera implica necessàriament la segona. De manera més precisa:

$$f_n \rightarrow f \text{ sobre } I \implies f_n \rightarrow f \text{ sobre } I .$$

EXEMPLE 1.7. La successió de funcions $f_n(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots$ convergeix uniformement cap a $f(x) \equiv 0$ sobre qualsevol interval $[0, b]$ amb $0 < b < 1$. En efecte, ja que, per qualsevol $\varepsilon > 0$:

$$|x^n - 0| \leq b^n < \varepsilon, \text{ per } N \in \mathbb{N} \text{ amb } N > \frac{\log \varepsilon}{\log b}$$

i per tot $0 \leq x \leq b$. En canvi $\{x^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ no convergeix uniformement a l'interval $[0, 1]$ (veure la remarca 1.9).

EXEMPLE 1.8. Sigui la successió de funcional:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in [0, 1/n] \\ 2n - n^2x, & x \in [1/n, 2/n] \\ 0, & x \in [2/n, 1]. \end{cases} \quad (33)$$

Puntualment $f_n(x) \rightarrow 0$ per tota $x \in I = [0, 1]$. En canvi és evident (figura 7) que $\sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = n$ amb la qual cosa $\sup_{x \in [0,1]} \{f_n(x)\} \rightarrow \infty$ y llavors $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no pot ser absolutament convergent.

PROPOSICIÓ 1.9. El límit uniforme $f(x)$ d'una successió $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$ de funcions contínues definides en un mateix interval I de \mathbb{R} i amb valors en \mathbb{R}^n , és una funció contínua sobre el mateix interval.

DEMOSTRACIÓ. Considerem $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ funcions contínues per tot $n = 0, 1, 2, \dots$; $I \subseteq \mathbb{R}$ interval i suposem que $f_n \rightarrow f$ sobre I . Per cada $\hat{x} \in I$ fixat, acotem la diferència $\|f(x) - f(\hat{x})\|$, $x \in I$, utilitzant la desigualtat triangular:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(\hat{x})\| &= \|f(x) - f_n(x) + f_n(\hat{x}) - f(\hat{x}) + f_n(x) - f_n(\hat{x})\| \\ &\leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(\hat{x}) - f(\hat{x})\| + \|f_n(x) - f_n(\hat{x})\|. \end{aligned}$$

Debut a la convergència uniforme, per un $\varepsilon > 0$ donat, existeix $N \in \mathbb{N}$: $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon/2$ per tot $n \geq N$ i per tot $x \in I$. Aleshores, amb $n \geq N$ fixat, de la desigualtat de dalt es dedueix que:

$$0 \leq \|f(x) - f(\hat{x})\| < \|f_n(x) - f_n(\hat{x})\| + \varepsilon \quad (34)$$

per tot $x \in I$. A continuació, prenent límits quan $x \rightarrow \hat{x}$ a totes dues bandes

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \|f(x) - f(\hat{x})\| \leq \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \|f_n(x) - f_n(\hat{x})\| + \varepsilon = \varepsilon,$$

ja que, debut a la continuïtat de les funcions f_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ de la successió a l'interval I és $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \|f_n(x) - f_n(\hat{x})\| = 0$. Per tant:

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \|f(x) - f(\hat{x})\| \leq \varepsilon \quad (35)$$

però com que de fet $\varepsilon > 0$ és arbitrària, (35) implica:

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \|f(x) - f(\hat{x})\| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = f(\hat{x})$$

per cada $\hat{x} \in I$; d'on es conclou la continuïtat de f a l'interval I . \square

REMARCA 1.10. Fent servir aquesta propietat es veu clar que la successió $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de l'exemple 1.7 no pot convergir uniformement a l'interval $[0, 1]$, perquè, com ja hem vist, la funció límit és $f(x) \equiv 0$ a qualsevol interval compacte contingut a $[0, 1]$, mentre que $f(1) = 1$ (puix $f_n(1) = 1$ per tot $n = 0, 1, 2, \dots$). En altres paraules, la funció límit no seria contínua a l'interval $[0, 1]$; la qual cosa contradiu la proposició 1.9.

La definició 1.10 no és massa pràctica per comprovar la convergència uniforme de $f_n(x)$, debut a que hom té que "endivinar" la funció límit $f(x)$ abans de poder comprovar la desigualtat (32). Com al cas de les successions numèriques, hi ha l'anomenat *criteri de Cauchy* per la convergència uniforme.

PROPOSICIÓ 1.11 (Criteri de Cauchy de convergència uniforme). *La successió $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de funcions $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ definides sobre un interval comú $I \subseteq \mathbb{R}$, convergeix uniformement a una funció f , definida al mateix interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si, donat $\varepsilon > 0$ qualsevol, existeix $N \in \mathbb{N}$ de manera que:*

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon, \quad (36)$$

per tot $m, n \geq N$ i per tot $x \in I$.

REMARCA 1.12. És clar que aquest criteri no dóna elements per deduir la funció límit, però permet garantir la seva existència i la seva unicitat.

DEMOSTRACIÓ. Primer de tot (36) assegura la convergència *puntual*, car fixada $t \in I$, la successió (numèrica) $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ és una successió de Cauchy i aleshores convergent cap a un límit que anomenarem $f(t)$. Si això ho fem per a cada $x \in I$, tindrem definida una funció $x \in I \mapsto f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. S'haurà de comprovar que aquesta funció $f(x)$ definida com el límit puntual per cada $x \in I$, és també el límit uniforme de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Procedirem de la manera següent: fixat $\varepsilon > 0$ arbitrari, triem $N \in \mathbb{N}$ de manera que es satisfaci (36); a continuació, amb $n \geq N$, prenem límit quan $m \rightarrow \infty$,

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$$

i com que això val de fet per tot $n \geq N$ i per tot $x \in I$, la proposició 1.11 queda demostrada. \square

Exercici 1.1. Demostreu el recíproc, i. e., que si la successió és un uniformement convergent, llavors es satisfà la condició de Cauchy (36).

Tanmateix es farà servir la propietat següent.

PROPOSICIÓ 1.13. *Sigui $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una successió de funcions contínues definides en un mateix interval $I \subseteq \mathbb{R}$ i amb valors en \mathbb{R}^n (veure definició 1.11). Si $f_n \rightarrow f$ sobre I , llavors per $x_0, x_1 \in I$ qualssevol es satisfà:*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{x_1} f_n(x) dx.$$

En altres paraules: la convergència uniforme commuta amb la integració.

DEMOSTRACIÓ. Com que les funcions f_n són contínues en I estaran definides cadascuna de les integrals $\int_{x_0}^{x_1} f_n(x) dx$ per $n = 0, 1, 2, \dots$. D'altra banda, segons la proposició 1.9, f serà contínua i aleshores també estarà definida la integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$. A més, com que per tota $\varepsilon > 0$ podem fer $\sup_{x \in [x_0, x_1]} \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ prenent n més gran que un cert índex N , resulta

$$\begin{aligned} \left\| \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx - \int_{x_0}^{x_1} f_n(x) dx \right\| \\ = \left\| \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - f_n(x)) dx \right\| \leq \left| \int_{x_0}^{x_1} \|f(x) - f_n(x)\| dx \right| \leq \varepsilon |x_1 - x_0|, \end{aligned} \quad (37)$$

la qual cosa prova que $\int_{x_0}^{x_1} f_n(x) dx \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$. \square

Notem que en aquesta última demostració, per establir (37) s'ha fet servir una desigualtat bàsica del càlcul integral:

LEMA 1.14. *donada una funció vectorial $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ amb valors en \mathbb{R}^m , contínua a l'interval $[a, b]$; la integral vectorial $\mathfrak{J} = \int_a^b f(t) dt \in \mathbb{R}^m$ satisfà:*

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \left| \int_a^b \|f(t)\| dt \right|.$$

DEMOSTRACIÓ. Només cal comparar les sumes mitjançant la desigualtat triangular

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta x_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_i)\| |\Delta x_i|,$$

($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) i prendre límits quan $n \rightarrow \infty$. \square

10 Mètode de Picard i demostració del teorema d'existència i unicitat

La resolució del PVI (29) és equivalent a la de l'equació integral

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(s, Y(s)) ds, \quad x \in I_a(x_0) = [x_0 - a, x_0 + a] \quad (38)$$

en el sentit següent; sigui $Y : I_a(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ solució —segons la definició 1.8—, del problema de Cauchy (29). Aleshores $Y'(x) = F(x, Y(x))$ per $x \in \overset{\circ}{I}_{x_0} =]x_0 - a, x_0 + a[$ i integrant a l'interval $[x_0, x]$ amb $|x - x_0| < a$, a totes dues bandes: $Y(x) - Y(x_0) = \int_{x_0}^x F(s, Y(s)) ds$ des d'on substituint la condició inicial: $Y(x_0) = Y_0$ es conclou que Y satisfà l'equació integral (38) en I_{x_0} .

Recíprocament, si $Y(x)$, funció contínua en I_{x_0} amb $(x, Y(x)) \in \Omega$ per tot $x \in I_{x_0}$, és una solució de (38), llavors és també solució del PVI (29); ja que la regla de la cadena garanteix que la funció $x \in I_{x_0} \mapsto (x, Y(x)) \in \Omega \mapsto F(x, Y(x)) \in \mathbb{R}^n$ és també contínua i aleshores, pel teorema fonamental del càlcul, Y és C^0 a I_{x_0} i C^1 a $\overset{\circ}{I}_{x_0}$ amb $Y'(x) = F(x, Y(x))$. D'altra banda, Y satisfà la condició inicial del PVI (29): $Y(x_0) = Y_0$, com es comprova d'immmediat substituint $x = x_0$ en (38).

DEFINICIÓ 1.12 (Algorisme de Picard). Sigui $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, amb Ω un obert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i $(x_0, Y_0) \in \Omega$. Es defineix l'algorisme de Picard a un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, mitjançant:

$$\begin{aligned} Y_0(x) &\equiv Y_0, \\ Y_n(x) &= Y_0 + \int_{x_0}^x F(s, Y_{n-1}(s)) \, ds, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (39)$$

per $x \in I$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Les funcions Y_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ donades per aquest algorisme s'anomenen *iterats de Picard*.

REMARCA 1.15. Convé precisar que, perquè l'algorisme (39) estigui *ben definit* cal $(x, Y_n(x)) \in \Omega$ per qualsevol $x \in I$ (ja que s'ha de verificar $(s, Y(s)) \in \Omega$ per $s : |s - x_0| \leq |x - x_0|$ amb $x \in I$) i tota $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Aquesta condició es comprovarà explícitament a la demostració del teorema 1.7 que donem a continuació.

DEMOSTRACIÓ (DEL TEOREMA D'EXISTÈNCIA I UNICITAT DE SOLUCIONS LOCALS). Estructurarem la prova del teorema 1.7 en tres passos:

- (1) L'algorisme (39) està ben definit, segons es precisa a la remarca 1.15 de dalt. De manera més precisa, comprovarem que cadascuna de les funcions Y_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ donades per (39) està definida i és contínua en $I_a(x_0) = [x_0 - a, x_0 + a]$ i que per tot x en aquest interval i tota $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, és: $(x, Y_n(x)) \in D_r(x_0, Y_0)$.
- (2) Que $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ convergeix uniformement sobre $I_a(x_0)$ a una solució, Y , definida en el mateix interval, de l'equació integral (38).
- (3) Que la solució (local) obtinguda d'aquesta manera és única: en altres paraules, que si $\tilde{Y}(x)$ és una altra solució de (38) definida en $I_{a'}(x_0)$ amb $0 < a' < a$, llavors necessàriament $\tilde{Y}(x) = Y(x)$, per tot $x \in I_{a'}(x_0)$.

El primer punt el provarem per inducció: és cert per $n = 0$, doncs $(x, Y_0(x)) = (x, Y_0)$ i,

$$x \in I_a(x_0) \Rightarrow \|(x - x_0, Y_0(x) - Y_0)\| = \|(x - x_0, 0)\| = |x - x_0| \leq a \leq r/2 \leq r.$$

A continuació, si suposem que es satisfà per $n > 0$ enter arbitrari:

$$\|Y_n(x) - Y_0\| = \left\| \int_{x_0}^x F(s, Y_{n-1}(s)) \, ds \right\| \leq \left| \int_{x_0}^x \|F(s, Y_{n-1}(s))\| \, ds \right| \leq M|x - x_0| \quad (40)$$

i segons es van definir a i $I_a(x_0)$ a l'enunciat del teorema 1.7: $x \in I_a(x_0)$ implica $|x - x_0| \leq a \leq \min\{\frac{r}{2}, \frac{r}{2M}\}$. Per tant, si $x \in I_a(x_0)$,

$$\begin{aligned} \|(x - x_0, Y_n(x) - Y_0)\| &\leq |x - x_0| + \|Y_n - Y_0\| \leq |x - x_0| + M|x - x_0| \\ &\leq \frac{r}{2} + M \frac{r}{2M} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \implies (x, Y_{n+1}(x)) \in D_r(x_0, Y_0), \end{aligned}$$

per tot $n = 1, 2, 3, \dots$. Per provar (2), cal veure primer (exercici) que,

$$\|Y_n(x) - Y_{n-1}(x)\| \leq \frac{M}{L} \times \frac{(L|x - x_0|)^n}{n!}, \quad (41)$$

per tot $n = 1, 2, 3, \dots$ i per tot $x \in I_a(x_0)$. Suposem $m, n \in \mathbb{N}$ amb $m > n \geq 0$. Llavors,

$$\begin{aligned} \|Y_m(x) - Y_n(x)\| &\leq \sum_{j=0}^{m-n-1} \|Y_{m-j}(x) - Y_{m-j-1}(x)\| \leq \frac{M}{L} \sum_{j=0}^{m-n-1} \frac{(L|x-x_0|)^{m-j}}{(m-j)!} \\ &= \frac{M}{L} \times \frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{m-n-1} \frac{(n+1)!}{(m-j)!} (L|x-x_0|)^{m-n-j-1} \\ &= \frac{M}{L} \times \frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{(n+1)!}{(k+n+1)!} (L|x-x_0|)^k \\ &\leq \frac{M}{L} \times \frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{m-n-1} \frac{(L|x-x_0|)^k}{k!} \\ &\leq \frac{M}{L} \times \frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} e^{L|x-x_0|}, \end{aligned}$$

on s'ha fet servir que $\frac{(n+1)!}{(k+n+1)!} \leq \frac{1}{k!}$, per tot $k = 0, 1, 2, \dots, m-n-1$, amb $m > n \geq 0$ (comproveu-ho per inducció) i, a més, que $\sum_{k=0}^s x^k/k! \leq e^x$, per tot $x \geq 0$ i per tot $s = 0, 1, 2, 3, \dots$. Per tant,

$$\|Y_m(x) - Y_n(x)\| \leq \frac{M}{L} \times \frac{(2aL)^{n+1}}{(n+1)!} e^{2aL}, \quad (42)$$

per tot $m, n \in \mathbb{N}$, amb $m > n \geq 0$ i per tot $x \in I_a(x_0) = [x_0 - a, x_0 + a]$. Així, de (42) es dedueix que la seqüència dels iterats de Picard $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ donada per (39) és uniformement de Cauchy en $I_a(x_0)$ i per tant, uniformement convergent en aquest interval. Sigui $Y(x)$ aquest límit uniforme i. e., $Y_n \rightarrow Y$ en $I_a(x_0)$. A més, segons la proposició 1.9 Y és una funció contínua, donat que totes les Y_n ho són per construcció (com es comprova inductivament a partir de l'algorisme (39) tenint en compte que F és contínua). Aleshores, és clar que també la successió de les funcions, $f_n : I_a(x_0) \rightarrow D_r(x_0, Y_0)$, donada per $I_a(x_0) \ni x \mapsto f_n(x) := F(x, Y_n(x))$ és uniformement convergent, sobre l'interval $I_a(x_0)$, essent $f(x) = F(x, Y(x))$ el seu límit uniforme. Això es segueix de la convergència uniforme de Y_n cap a Y i de

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \|F(x, Y_n(x)) - F(x, Y(x))\| \leq L \|Y_n(x) - Y(x)\|,$$

sobre l'interval $I_a(x_0)$.

REMARCA 1.16. De fet, la convergència uniforme de $f_n(x) = F(x, Y_n(x))$ sobre $I_a(x_0)$ es segueix directament de la de $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ i de la continuïtat de F (exercici).

Per tant, de la proposició 1.13 s'obté:

$$\int_{x_0}^x F(s, Y(s)) \, ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x F(s, Y_{n-1}(s)) \, ds$$

per a cada $x \in I_a(x_0)$. D'aquesta manera, prenent límits a totes dues bandes de (39) obtenim, sobre el mateix interval

$$Y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(x) = Y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x F(s, Y_{n-1}(s)) \, ds = Y_0 + \int_{x_0}^x F(s, Y(s)) \, ds.$$

Aleshores, el límit uniforme, $Y(x)$, de la seqüència d'iterats de Picard (39) sobre $I_a(x_0)$ és una solució contínua de l'equació integral (38) definida a l'interval $I_a(x_0) = [x_0 - a, x_0 + a]$, amb la qual cosa és també —i al mateix interval—, solució local (segons la definició 1.8) derivable del corresponent PVI (8).

Per últim provarem la unicitat. Sigui $a' > 0$ amb $a' < a$, i \tilde{Y} una solució (local) del PVI (8). A l'interval $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$ Definim la funció w mitjançant,

$$w(x) := \|Y(x) - \tilde{Y}(x)\|.$$

A l'interval $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$ és immediat és deduir la desigualtat:

$$0 \leq w(x) \leq L \int_{x_0}^x w(s) \, ds. \quad (43)$$

En efecte,

$$\begin{aligned} Y(x) - \tilde{Y}(x) &= \int_{x_0}^x (F(s, Y(s)) - F(s, \tilde{Y}(s))) \, ds \implies w(x) = \|Y(x) - \tilde{Y}(x)\| \\ &= \left\| \int_{x_0}^x (F(s, Y(s)) - F(s, \tilde{Y}(s))) \, ds \right\| \leq \int_{x_0}^x \|F(s, Y(s)) - F(s, \tilde{Y}(s))\| \, ds \\ &\leq \int_{x_0}^x L \|Y(s) - \tilde{Y}(s)\| \, ds = L \int_{x_0}^x w(s) \, ds \end{aligned}$$

i de fet, l'única solució no negativa de la desigualtat (43) és $w(x) = 0$ per tot $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$. Per veure això introduïm, al mateix interval, la funció

$$v(x) := \int_{x_0}^x w(s) \, ds, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + a',$$

d'on tenim, pel teorema fonamental del càlcul: $v'(x) = w(x)$ per a cada $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$. Així, de manera equivalent, la desigualtat (43) la podem escriure com $v'(x) - Lv(x) \leq 0$ per tot $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$. A continuació, multiplicant aquesta última pel "factor integrant" e^{-Lx} hom obté:

$$e^{-Lx} v'(x) - L e^{-Lx} v(x) \leq 0 \implies \frac{d}{dx} [e^{-Lx} v(x)] \leq 0 \implies e^{-Lx} v(x) \leq e^{Lx_0} v(x_0),$$

per tot $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$. D'una banda, com que $v(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} w(s) \, ds = 0$ això implica, que $v(x) \leq 0$ a l'interval $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$. De l'altra, però, $v(x) = \int_{x_0}^x w(s) \, ds \geq 0$ per $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$ donat que w és, per definició, no negativa. Aleshores, necessàriament $v(x) = 0$ per tot $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$. Com que $w(x) = v'(x)$, tanmateix $w(x) = \|Y(x) - \tilde{Y}(x)\| = 0$, d'on $Y(x) = \tilde{Y}(x)$, a l'interval $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$.

D'aquesta manera, hem provat que les dues solucions $Y(x)$ i $\tilde{Y}(x)$ coincideixen al semiinterval $x_0 \leq x \leq x_0 + a'$. Procedint anàlogament es pot demostrar (exercici!) que coincideixen també a $x_0 - a' \leq x \leq x_0$. D'aquesta manera queda provat el teorema 1.7. \square

11 Prolongació de solucions. Existència i unicitat global

L'aplicació directa del teorema d'existència i unicitat 1.7 garanteix l'existència de solució del PVI (8) en un entorn al voltant de la condició inicial $(x_0, Y_0) \in \Omega$. No obstant, sovint aquestes solucions existeixen en intervals més grans.

EXEMPLE 1.9. Considerem el PVI:

$$\begin{aligned} y' &= y^2, \\ y(1) &= -1, \end{aligned} \quad (44)$$

aquest problema satisfà les condicions del teorema 1.7 en tot domini acotat, Ω de \mathbb{R}^2 amb $(1, -1) \in \Omega$ ($F(x, y) = y^2$ és regular en tot \mathbb{R}^2 , per tant localment Lipschitz). Sigui $r > 0$ de manera que el disc (i. e., la bola tancada) $D_r(1, -1) \subseteq \Omega$. Sigui:

$$M = \max_{(x,y) \in D_r(1,-1)} |y^2| = (r+1)^2 = (r+1)^2,$$

aleshores, el teorema 1.7 garanteix que existeix (i és única en el sentit que es precisa a l'enunciat) una solució, $y = \varphi(x)$, definida a l'interval $I_a(1)$, amb:

$$a = \min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{r}{2M} \right\} = \left\{ \frac{r}{2}, \frac{r}{2(1+r)^2} \right\} = \frac{r}{2(1+r)^2} \leq \frac{1}{8}$$

(el màxim absolut de la funció $h(r) = \frac{r}{2(1+r)^2}$ amb $r > 0$ val $1/8$ i s'atany per $r = 1$). En conclusió, per aplicació directa del teorema 1.7 podem garantir que existeix una solució (local) única, i que està

definida a l'interval $I_{1/4}(1) = [3/4, 5/4]$. D'altra banda, també podem obtenir explícitament la solució del PVI (44) (l'equació és un cas especial en "variables separades") i obtenir com *solució global*:

$$\tilde{\varphi}(x) = -\frac{1}{x},$$

que està definida a l'interval $I = (0, +\infty) \supseteq I_{1/4}(1)$, i que constitueix una *prolongació* —tal com es defineix a continuació—, de la solució local.

Si existeix una solució, φ , del Problema de Cauchy (8) definida per tota $t \in \mathbb{R}$ es diu que la solució es pot *prolongar indefinidament*. Si existeix una solució definida per totes les $t \geq t_0$ (corresponentment, per tota $t \leq x_0$) es diu que la solució es pot prolongar indefinidament *cap endavant* (corresponentment, *cap endarrera*). Sigui:

Sigui $\Gamma \subseteq \Omega$. Si existeix una solució del problema del PVI (8), φ , amb la condició inicial, definida al segment $x_0 \leq x \leq x_1$ i $\varphi(x_1) \in \Gamma$, es diu que la solució es pot prolongar cap endavant a fins a Γ .

Suposem que K és un subconjunt compacte de Ω amb $(x_0, Y_0) \in K$. Denotem per Γ la seva frontera, i. e. $\Gamma = \partial K$,

Bibliografia

- [1] T. Apostol, *Análisis Matemático*, Reverté, Barcelona, 1991.
- [2] V.I. Arnold, *Ecuaciones Diferenciales*, Rubiños, Madrid, 1994.
- [3] P. Henrici, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley, New York, 1962.
- [4] E. Isaacson and H.B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley & Sons, New York, 1966.
- [5] A. Nikiforov and V. Ouvarov, *Éléments de la théorie des Fonctions Spéciales*, Mir, Moscou, 1975.
- [6] S. Novo, R. Obaya, and J. Rojo, *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*, McGraw-Hill, Madrid, 1995.
- [7] J. Sotomayor, *Llições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1974.
- [8] I. Stewart, *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*, Penguin, London, 1997.
- [9] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press., Cambridge, Mass., 1927.