16. Volem estudiar com evoluciona la concentració d'un contaminant en els llacs Eire i Ontario, connectats per un riu que flueix d'Eire a Ontario. Fariem la hipòtesi que el contaminant es dissol uniformement a l'aigua.

(i) Siguin $x_1(t)$, $x_2(t)$ les concentracions de contaminants als llacs Eire i Ontario respectivament, a l'instant t. Justifiqueu el sistema d'equacions diferencials ordinàries següent:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \frac{r_1(e_1 - x_1)}{V_1}, \\ x_2' &= \frac{r_1 x_1 + (r_2 - r_1)e_2 - r_2 x_2}{V_2}, \end{aligned}\right\}$$

on:

- V_1, V_2 són els volums dels dos llacs, en Km^3,
- r_1, r_2 són les velocitats d'entrada i sortida de l'aigua, en Km^3/any i $r_2 > r_1$,
- e_1, e_2 són les concentracions de contaminants que entren a cada llac des de l'exterior.

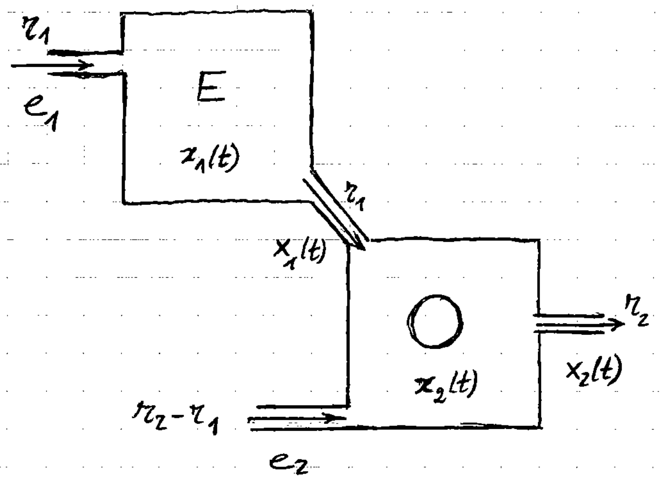
(ii) Poseu $V_1/r_1 = 2'6$, $V_2/r_2 = 7'8$, $r_1 = \frac{5}{6} r_2$. Suposant que ha cessat la contaminació externa ($e_1 = e_2 = 0$), trobeu una matriu fonamental del sistema i resoleu-lo amb les condicions inicials $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$.

(iii) Resoleu ara el sistema amb constants e_1, e_2 qualsevol, i amb les condicions inicials $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$. Quin és el límit de les concentracions $x_1(t)$, $x_2(t)$ quan $t \to +\infty$?

(iv) Torneu al cas en què no hi ha contaminació externa ($e_1 = e_2 = 0$), i suposeu que inicialment la concentració de contaminant és el doble que al llac Ontario sigui el 5 % de la inicial?

Indicació: pel darrer apartat heu de resoldre $x_2(t) = 0'05\, x_2^0$ en la solució de (ii). Useu fsolve.

Solució :



i) Balanç del llac E: $\underbrace{V_1 x_1'(t)}_{a} = \underbrace{r_1 e_1}_{b} - \underbrace{r_1 x_1(t)}_{c}$,

Balanç del llac O: $\underbrace{V_2 x_2'(t)}_{a} = \underbrace{r_1 x_1(t) + (r_2 - r_1) x_2(t)}_{b} - \underbrace{r_2 x_2(t)}_{c}$,

essent:

a : taxa de variació dels contaminants

b : taxa d'entrada dels contaminants

c : taxa de sortida dels contaminants.

Aleshores s'obté el sistema: $X' = AX + \vec{b}$, el qual s'escriu, explícitament:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{X'}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -r_1/V_1 & 0 \\ r_1/V_2 & -r_2/V_2 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{X}} + \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 e_1 / V_1 \\ (r_1 - r_2) e_2 / V_2 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{\vec{b}}} \qquad (1)$$

(ii) $e_1 = 0 = e_2 \Longrightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ sistema homogeni.

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{V_1}{r_1} = 2'6 \text{ (el llac E triga 2'6 anys en "renovar-se")} \\ \dfrac{V_2}{r_2} = 7'8 \text{ (» » O » 7'8 » » »)} \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2'6} & 0 \\ \frac{5}{6} \times \frac{1}{7'8} & -\frac{1}{7'8} \end{pmatrix}$.

Es comprova que: $\lambda_1 = -\frac{1}{2'6}$ és un valor propi d'A amb vector propi $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5/12 \end{pmatrix}$

i $\lambda_2 = -\frac{1}{7'8}$ » » » » » » » » $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Aleshores la solució general és, en aquest cas:

$$\boxed{X_h(t) = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t/2'6} \\ c_2 e^{-t/7'8} - \frac{5}{12} c_1 e^{-t/2'6} \end{pmatrix}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ constants}} \quad (2$$

(iii) Ara el sistema és no homogeni, per tant la solució general vindrà donada per la suma: $X_g(t) = X_h(t) + X_p(t)$, on $X_h(t)$ és la solució de l'apartat anterior

— i.e., la solució general del corresponent sistema homogeni —, mentre que $X_p(t)$ és una solució particular. Idea: com que en aquest cas el terme no homogeni és constant buscarem una solució particular constant. Així, si imposem que $X_p(t)\equiv\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ verifiqui el sistema (1) trobem:

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = X_p'(t) = A\,X_p(t) + \vec{b} \Longrightarrow \boxed{X_p(t)\equiv\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = -A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix}2'6 & 0\\ \frac{5}{6}2'6 & 7'8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1/2'6\\ e_2/6\cdot 7'8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e_1\\ \frac{5}{6}e_1+\frac{1}{6}e_2\end{pmatrix}}$$

El resultat final és doncs:

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} X_g(t) &= \lim_{t\to+\infty}\big(X_h(t)+X_p(t)\big) = \underbrace{\lim_{t\to+\infty} X_h(t)}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{(equació (2))}} + \begin{pmatrix}e_1\\ \frac{5}{6}e_1+\frac{1}{6}e_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}e_1\\ \frac{5}{6}e_1+\frac{1}{6}e_2\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

(iv) $e_1 = e_2 = 0$ (tornem al cas homogeni). La solució general $X_h(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$ és la donada per (2)

$x_1(0) = 2x_2(0)$: concentració inicial de contaminants al llac E doble que al llac O.

Segons (2): $c_1 = x_1(0) = 2x_2(0) = 2\left(c_2 - \frac{5}{12}c_1\right) \Longrightarrow c_1 = \frac{12}{11}c_2$; i per tant la solució és ara:

$$X(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{12}{11}e^{-t/2'6}\\ e^{-t/7'8} - \frac{5}{11}e^{-t/2'6}\end{pmatrix}c_2,$$

i busquem $t=\tau$ tal que:

$$\frac{x_2(\tau)}{x_2(0)} = 0'05 \Longleftrightarrow \frac{\left(e^{-\tau/7'8} - \frac{5}{11}e^{-\tau/2'6}\right)\cancel{c_2}}{\left(1-\frac{5}{11}\right)\cancel{c_2}} = 0'05 \Longleftrightarrow \boxed{e^{-\tau/7'8} - \frac{5}{11}e^{-\tau/2'6} = 0'05\,\frac{6}{11}}$$

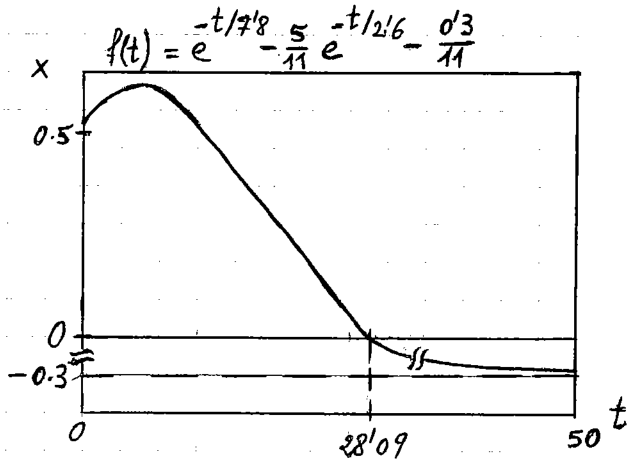
aquesta ultima és l'equació que s'ha de resoldre, per exemple, amb la comanda fsolve del MATLAB:

```
>> f=inline('exp(-t/7.8)-5*exp(-t/2.6)/11-0.3/11','t');
>> x=linspace(0,50,300); y=feval(f,x);
>> plot(x,y,'-');
>> hold on;
```

[Caldrà posar ./, .*, .^ quan faci falta (a la pràctica inline treballa com un m-file).]

NOTE BOOK

```
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
>> title('f(x) = exp(-t/7.8) - 5*exp(-t/2.6)/11 - 0.3/11')
>> grid on
>> [x,fx] = fsolve(f,25,optimset('TolFun',1.e-14))
x =
    28.0919
fx =
    1.8041e-16
```



Així, el temps per a que la concentració de contaminants al llac O sigui el 5% de la inicial és,

$$\boxed{\tau = 28'092 \text{ anys.}}$$