

1 Límits a l'Origen per Coordenades Polars

Sigui la funció $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Considerem la funció g definida per

$$g : (0, +\infty) \times (0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Es pot provar la següent:

Proposició 1. *Essent f i g les funcions definides adalt es satisfà:*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f = L \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0} (f \circ g)(r, \theta) = L \text{ uniformement en } \theta,$$

on **uniformement** en θ vol dir que, donat un $\varepsilon > 0$ arbitrari, és possible trobar un $\delta > 0$ —que dependrà de l' ε —, de manera que $|(f \circ g)(r, \theta) - L| < \varepsilon$, sempre que $0 < r < \delta$ i **per a qualsevol** θ amb $0 < \theta \leq 2\pi$.

◀ Demostració: Defineixo els conjunts següents:

$$V_\delta = \{(r, \theta) \in (0, +\infty) \times (0, 2\pi] \mid 0 < r < \delta\} \quad \text{i} \quad U_\delta = B_\delta(0, 0) - \{(0, 0)\}.$$

I és fàcil provar (exercici) que *per a cada* $(r, \theta) \in V_\delta$ *existeix un únic* $(x, y) \in U_\delta$ *tal que* $g(r, \theta) = (x, y)$, i. e. que g estableix una bijecció entre V_δ i U_δ . Aleshores:

$$((r, \theta) \in V_\delta \Rightarrow |(f \circ g)(r, \theta) - L| < \varepsilon) \Leftrightarrow ((x, y) \in U_\delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon).$$

La qual cosa prova la proposició 1. Veure figura 1 ▶

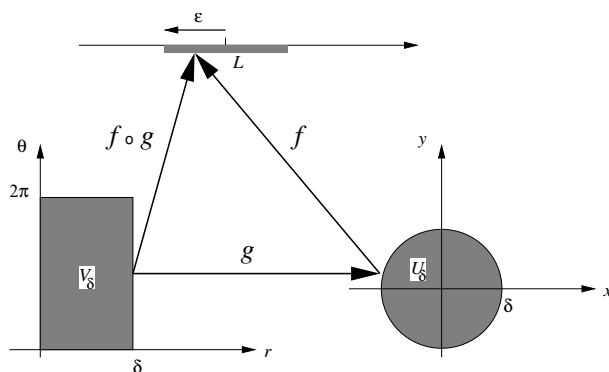


Figura 1: Límit uniforme en θ

Moltes vegades, el que és difícil de demostrar és que la convergència cap a L quan $r \rightarrow 0$ sigui uniforme en θ . Malgrat tot podem donar un criteri que ens proporciona una *condició suficient*.

Proposició 2. *Sigui R una funció que només depèn de la variable polar r , i que satisfà les dues condicions següents:*

1. $R(r) \rightarrow 0$, quan $r \rightarrow 0$,

2. $|(f \circ g)(r, \theta) - L| < R(r)$, per $0 < r < r_0$ i $\forall \theta$ amb $0 < \theta \leq 2\pi$.

Llavors $(f \circ g)(r, \theta) \rightarrow L$, quan $r \rightarrow 0$ **uniformement** en θ .

◀ Demostració: és immediata a partir de la definició de límit i la de límit uniforme en θ .

▶

Exercici 1. Estudieu la continuïtat a l'origen de la funció definida per:

$$f(x, y) = \frac{y}{x} \sin(x^2 + y^2) \quad \text{si } x \neq 0, \quad f(0, y) = 0.$$

Solució. Busquem el límit a l'origen. Passem primer la funció f a coordenades polars:

$$(f \circ g)(r, \theta) = \begin{cases} \tan \theta \sin r^2, & \text{si } \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ 0, & \text{si } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Per a qualsevol valor fixat de θ , ($\theta = \theta_0 \in (0, 2\pi]$), tindrem $\lim_{r \rightarrow 0} (f \circ g)(r, \theta_0) = 0$. Així, si existeix el límit de $f(x, y)$ quan $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, haurà de ser 0. La condició necessària i suficient per que això passi és, segons la proposició 1, que $(f \circ g)(r, \theta)$ convergeixi cap a 0 uniformement en θ quan r tendeix cap a zero, la qual cosa mostrarem que, en aquest cas, és falsa. En efecte, car si fos cert, fixat $\varepsilon > 0$, hi hauria un $\delta (= \delta_\varepsilon) > 0$, t. q. si:

$$0 < r < \delta \implies |(f \circ g)(r, \theta)| < \varepsilon, \quad \forall 0 < \theta \leq 2\pi$$

Llavors, en particular, per a un r_0 amb $0 < r_0 < \min(1, \delta) \leq \delta$, i $0 < \theta < \pi/2$, serà:

$$|\tan \theta \sin r_0^2| = |\tan \theta| \sin r_0^2 < \varepsilon \implies |\tan \theta| < \frac{\varepsilon}{\sin r_0^2},$$

($\sin r_0^2 > 0$, ja que $0 < r_0 \leq 1$). Però això és impossible, donat que la funció tangent no està acotada a l'interval $(0, \pi/2)$. Tenim així que els límits direccionals existeixen i són zero, però la convergència cap a zero en fer tendir r a zero no és uniforme en θ . Aleshores podem concloure que no existeix el límit de f a l'origen i per tant la funció no és contínua en aquest punt. ■

Exercici 2. Calculeu el límit a l'origen (si existeix) de:

$$f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

Solució.

$$(f \circ g)(r, \theta) = r^2 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta).$$

Si fixem $\theta = \theta_0 \in (0, 2\pi]$ i fem tendir $r \rightarrow 0$, la funció tendeix cap a zero. Per tant ja tenim que el candidat al límit és $L = 0$. Ara bé, com que les funcions sin i cos estan acotades en valor absolut per 1, resulta:

$$|r^2 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)| \leq r^2 (|\cos \theta|^4 + |\sin \theta|^4) \leq 2r^2,$$

per a qualsevol $0 < \theta \leq 2\pi$. I $r^2 \rightarrow 0$ quan $r \rightarrow 0$. Aplicant doncs la proposició 2 tenim que zero és el límit uniforme en θ de $(f \circ g)(r, \theta)$ quan $r \rightarrow 0$, la qual cosa implica que $f(x, y) \rightarrow 0$ quan $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. ■