Interpolació de Lagrange

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \hline f(x) & f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n) \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} L_k(x) &= \prod_{\substack{i=0 \\ (i\neq k)}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \\ &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}, \end{aligned}$$

per $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Aleshores:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x) \\ &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x) \in \mathbb{R}_n[x] \end{aligned}$$

és (l' únic!) polinomi de grau $\leq n$ que satisfà:

$$P_n(x_i) = f(x_i) \qquad \text{per } i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

P_n és el polinomi interpolador corresponent a la mostra (1) **en la seva forma de Lagrange**

Error en l'interpolació de Lagrange

Si:

- $x_0, x_1, \ldots, x_n \in I$, interval de $\mathbb{R}$
- $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$

Aleshores $\forall\, x \in I$, $\exists\, \xi_x \in \langle x_0, x_1, \ldots, x_n, x\rangle$ t. q.:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n), \qquad (2)$$

on $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n, x\rangle \subseteq I$ denota el (sub)interval més petit de I que conté a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i x.

- Observem que ξ_x depèn de x
- La fórmula (2) es coneix com la **fórmula de l'error en la interpolació de Lagrange**
- A partir de (2) podem trobar expressions per **acotar** l'error en valor absolut, i. e., $|f(x) - P_n(x)|$. Així, per exemple, tindrem que:

$$\begin{aligned} e(x) &:= |f(x) - P_n(x)| \\ &\leq \sup_{\xi \in I} |f^{(n+1)}(\xi)| \times \frac{|(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)|}{(n+1)!}, \end{aligned} \qquad (3)$$

per tot $x \in I$.