

Equacions Diferencials i Sistemes

(Temes I i IV)

J. R. Pacha

Índex

Capítol 1. Equacions diferencials ordinàries. Teoremes d'existència i unicitat	5
1. Introducció	5
2. Camps de direccions	10
3. El mètode d'Euler	12
4. Exercicis	13
5. Errors en els mètodes numèrics	17
6. Existència i unicitat de solucions del problema de Cauchy	20
Capítol 4. Equacions amb Coeficients Variables	27
1. Solucions al voltant d'un punt ordinari	27
2. Solucions al voltant de punts singulars regulars	31
3. Anàlisi de les fòrmules de recurrència. Teorema de Fuchs	36
4. Estudi dels casos especials: $s \in \mathbb{Z}$	40
Bibliografia	45

Equacions diferencials ordinàries. Teoremes d'existència i unicitat

1. Introducció

Una *equació diferencial ordinària* —d'ara endavant, EDO—, és una equació del tipus:

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

que relaciona una funció, y , dependent de la variable real x amb les seves derivades:

$$y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n},$$

fins a un cert ordre $n \geq 1$ finit.

Una *solució* de l'EDO (1), és una funció n vegades derivable $y \in I \mapsto y(x) \in \mathbb{R}$ d'un interval I (acotat o no) de la recta real amb valors en \mathbb{R} que satisfà idènticament la relació (1), és a dir:

$$G(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

per tot $x \in I$.

Tanmateix, és molt usual referir-se a x com la *variable independent* mentre que la “funció incògnita”, y , reb el nom de *variable dependent*.

L'*ordre* d'una EDO és el grau de la derivada més alta que hi apareix. D'aquesta manera, n seria l'ordre de l'equació diferencial de dalt. No s'ha de confondre, però l'ordre amb el *grau* d'una EDO, que es defineix només quan G és un polinomi algebraic en $y, y', \dots, y^{(n)}$, com el *grau* d'aquest polinomi. Per exemple, l'equació:

$$(y')^3 \cos x + (y')^2 \sin x + y' + 2e^x y = 0,$$

és de *primer ordre* però de *tercer grau*.

Els casos en què es poden donar resultats clars sobre l'existència de solucions, corresponen a aquells on es pot aïllar la derivada d'ordre màxim (almenys localment) i així escriure (1) d'una manera equivalent com

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2)$$

on $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, amb $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ obert. Quan això és possible, podem convertir l'equació (2) en un *sistema d'equacions* diferencials de primer ordre, sense res més que definir,

$$y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$$

i llavors, afegint (2)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \quad (3)$$

En notació vectorial, aquest últim sistema s'acostuma a escriure com:

$$Y' = F(x, Y) \quad (4)$$

on $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, mentre que la funció F vé donada per:

$$\begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} \in \Omega \xrightarrow{F} F(x, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(x, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Per tant, des d'un punt de vista formal —de cara a provar teoremes d'existència—, hi ha prou amb considerar (sistemes) d'equacions diferencials de primer ordre, com el representat per (4).

Es poden considerar sistemes d'equacions diferencials de primer ordre de la forma (4) *per se*, sense cap referència a una equació diferencial d'ordre superior. Suposarem doncs, d'ara endavant, que $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on Ω és una regió (i. e., un conjunt obert i connex) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. En aquest context introduïrem els conceptes següents:

DEFINICIÓ 1.1. Una *família de solucions* de (4) a l'interval $I \subseteq \mathbb{R}$ (tancat o obert, acotat o no) és una família de funcions $Y(\cdot, C) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, on $C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ és un vector de constants, tal que:

- 1) $(x, Y(x, C)) \in \Omega$, per tot $x \in I$
- 2) $Y(\cdot, C) \in C^1(a, b)$,
- 3) $Y'(x, C) = F(x, Y(x, C))$, per tot $x \in I$.

Les constants c_1, c_2, \dots, c_n reben el nom de *paràmetres* de la família.

DEFINICIÓ 1.2. Anomenarem *solució general* de (4) a una família de solucions que conté *totes* les solucions de l'equació.

EXEMPLE 1.1. La solució general de l'EDO $y' = y$ és $y = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$. En canvi, la família de funcions $y = (x - C)^2$, $C \in \mathbb{R}$ no és la solució general de $y' = 2\sqrt{y}$, $y > 0$, ja que no conté la *solució singular* $y \equiv 0$ (és a dir la solució constant $y(x) = 0$ per tot $x \in \mathbb{R}$).

DEFINICIÓ 1.3. Anomenarem *solució particular* de (4) en l'interval I a una funció específica de la solució general o d'una família de solucions, que s'obté fixant tots els paràmetres.

EXEMPLE 1.2. Una solució particular de $y' = y$ és $y = e^x$, la qual correspon al valor $C = 1$ del paràmetre a la solució general (veure exemple 1.1).

DEFINICIÓ 1.4 (Sistemes autònoms). Quan al sistema (4), el terme de la dreta, F no depèn explícitament de la variable dependent, x , i. e., quan el sistema és del tipus:

$$Y' = F(Y), \tag{5}$$

amb $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ obert; es parla de *sistema d'equacions diferencials autònom* o senzillament *sistema autònom*.

En general, quan en una equació diferencial (o sistema) no apareix explícitament la variable independent, es parla d'*equació diferencial autònoma* o de *sistema d'equacions diferencials autònom*.

DEFINICIÓ 1.5 (Trajectòries i corbes integrals). Donada una solució qualsevol $y(x)$ del sistema (4), definida a l'interval I , s'anomena *trajectòria*, o de vegades també *òrbita*, a la imatge de la funció $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mentre que el gràfic d'aquesta funció reb el nom de *corba integral*.

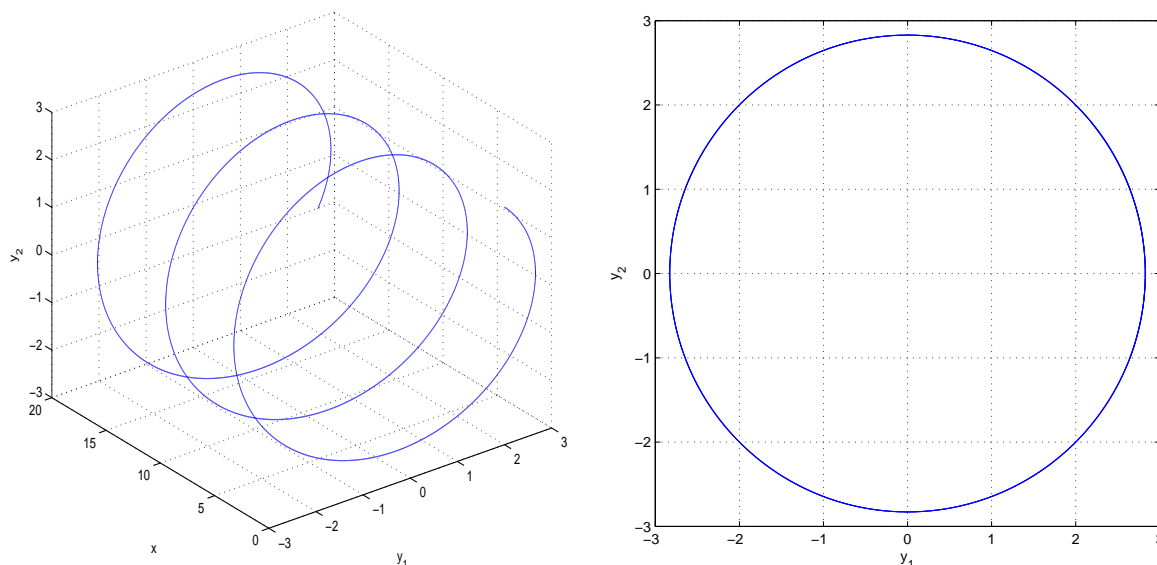


Figura 1: Corba integral (figura de l'esquerra) i trajectòria (a la dreta) del sistema $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1$. Totes dues corresponen a la solució: $y_1(x) = 2\sqrt{2} \cos x$, $y_2(x) = 2\sqrt{2} \sin x$.

Així, parlarem de les trajectòries (òrbites) i de les corbes integrals d'una EDO o d'un sistema. Notem que les trajectòries d'un sistema com (4) són corbes parametritzades (per la seva variable independent) a l'espai de fases \mathbb{R}^n . Aquestes corbes s'obtenen projectant les corbes integrals —les quals “viuen” a l'espai de fases “extès” $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ — sobre \mathbb{R}^n . A la figura 1 es representen una corba integral i la seva trajectòria del sistema $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1$.

EXEMPLE 1.3 (Equacions de Lotka-Volterra). El sistema d'equacions diferencials següent:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= (a - cY)X, \\ \frac{dY}{dt} &= (-b + dX)Y, \end{aligned} \tag{6}$$

és l'anomenat *sistema de Lotka-Volterra* i va ser desenvolupat de manera independent pels matemàtics A. Lotka i Vitto Volterra qui passà la primera Guerra Mundial en les Forces Aèries, desenvolupant les capacitats bèl·liques dels dirigibles (fou el primer en proposar l'ús de l'heli en comptes de l'hidrògen, molt inflamable). Un cop acabat el conflicte, dirigí les seves investigacions cap a aplicacions civils, proposant models matemàtics per descriure la dinàmica poblacional dels ecosistemes marins. Així el sistema (6) vingué motivat per la necessitat d'explicar les fluctuacions periòdiques de la població piscícola a l'Adriàtic. En aquestes equacions, $X(t)$ representa la població de preses i $Y(t)$ la de depredadors. S'assumeix, a més, que l'espècie X té al seu abast una font externa —i sense restriccions en el medi— d'alimentació (per exemple, la vegetació) mentre que la espècie Y s'alimenta exclusivament de X . α , β , a , b són constants (positives) del model.

Si en (6) re-escalem les variables:

$$X = \frac{b}{d}x, \quad Y = \frac{a}{c}y, \quad t = \frac{1}{d}\tau$$

i definim $\gamma := a/b$, el sistema es transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \gamma x(1 - y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= -y(1 - x), \end{aligned} \tag{7}$$

on hem posat: $\gamma = a/b$. A la figura 2(a) es dibuixen diverses òrbites del sistema (7), mentre que a les figures 2(b) i 2(c) es representen l'evolució de la població de preses i dels depredadors en funció del temps respectivament. Es veu doncs que el model reproduïx les variacions cícliques de les poblacions a què fèiem referència dalt. Els anomenats *cicles de Volterra* [els de la figura 2(a)] s'expliquen qualitativament de la forma següent. Suposem que inicialment hi ha un nombre relativament petit de depredadors —per fixar idees posem-ne, taurons—, mentre que les aigües estan infestades de preses —gambes, per exemple¹. En disposar de molt menjar, el nombre de taurons creix ràpidament, esquilant la població de gambes. Aviat hi ha massa taurons que ja no tenen prou menjar i així la seva població comença a minvar. A mesura que la població de depredadors decreix, les gambes es reproduïxen més ràpidament i el seu nombre augmenta. A partir d'aquest punt, el cicle es pot tornar a repetir vegada rera vegada.

DEFINICIÓ 1.6 (El problema de Cauchy). O *problema s valors inicials*, PVI, es formula en termes d'una EDO —o un sistema d'EDOs, com (4)— i una *condició inicial*:

$$\begin{aligned} Y' &= F(x, Y) \\ Y(x_0) &= Y_0 \end{aligned} \tag{8}$$

on $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, essent Ω una regió (i. e., un conjunt obert i connex) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i $(x_0, Y_0) \in \Omega$ donat. La segona equació és la *condició inicial*. Així, resoldre el problema de Cauchy (8) consistirà en trobar una funció $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, I interval de \mathbb{R} amb $x_0 \in I$ tal que:

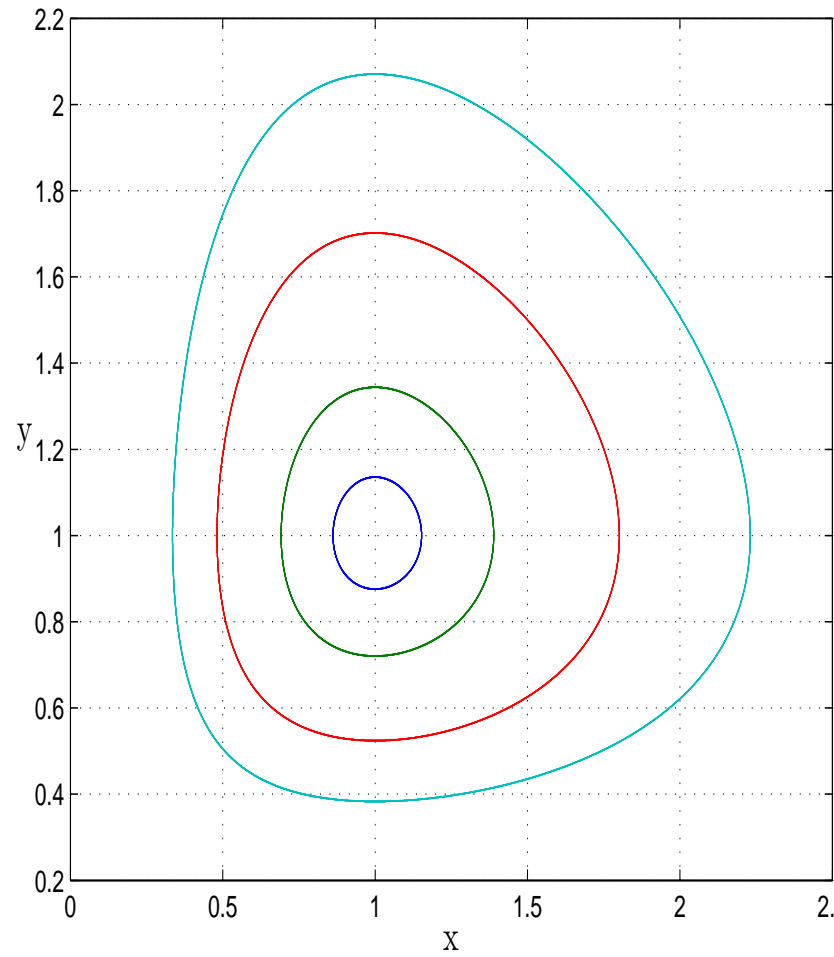
- C1) $(x, Y(x)) \in \Omega$, per tot $x \in I$,
- C2) $Y \in C^1(I)$,
- C3) $Y'(x) = F(x, Y(x))$, per tot $x \in I$,
- C4) $Y(x_0) = Y_0$.

C1)–C3) indiquen que Y és solució de l'equació diferencial i per C4), que aquesta solució satisfà la condició inicial. Breument doncs, caldrà trobar una solució del sistema —de l'EDO— que passi (la seva corba integral!) pel punt (x_0, Y_0) .

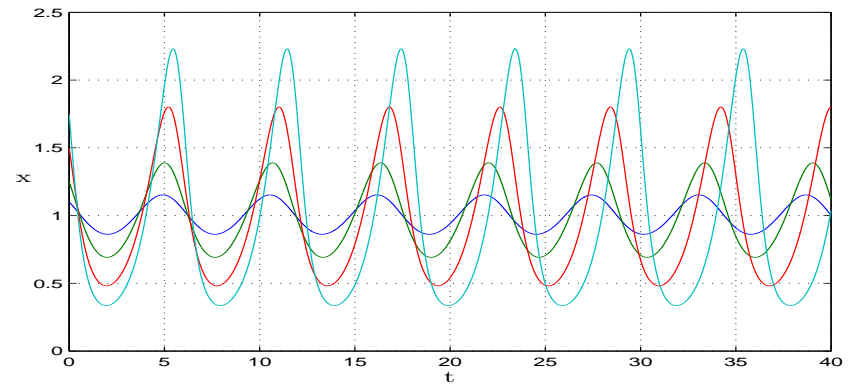
EXEMPLE 1.4. Es comprova d'immediat que la solució del PVI: $y' = y$, $y(0) = 1$ vé donada per $y(x) = e^x$. En efecte: $y'(x) = e^x = y(x)$ i $y(0) = e^0 = 1$. És, per tant, una solució que “passa” pel punt $(0, 1)$.

Voldrem trobar condicions sobre F per tal que el PVI (8) tingui solució i aquesta sigui única. Això es discutirà amb detall a la secció 6 d'aquest mateix capítol, on desenvoluparem mètodes constructius per obtenir solucions *locals*. Abans però, ens mirarem els sistemes des d'un punt de vista geomètric: tota EDO —o sistema d'EDOs—, té un *camp de direccions* associat, que és el que “segueixen” les seves solucions. Això tindrà

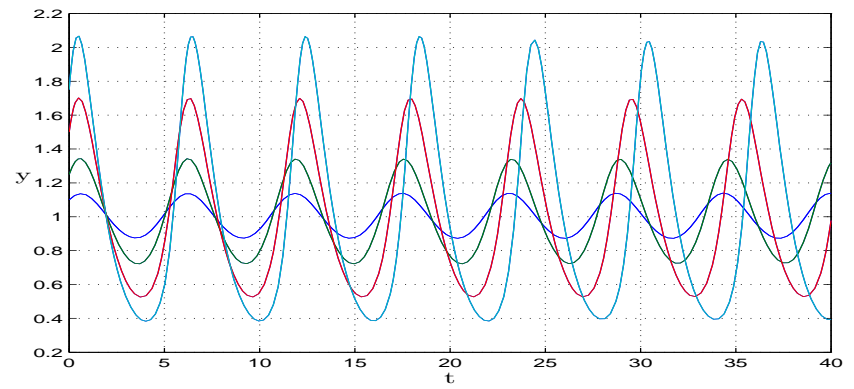
¹Ho estic explicant tal com apareix en [8]. No sé si els taurons (*sharks*) mengen gambes (*shrimps*). Però això, aquí, és irrellevant!



(a)



(b)



(c)

Figura 2: (a) Òrbites de les equacions de Lotka-Volterra (7) per $\gamma = 1.25$. A les gràfiques (b) i (c) es representa, per a les mateixes òrbites, l'evolució de la població preses i de depredadors respectivament.

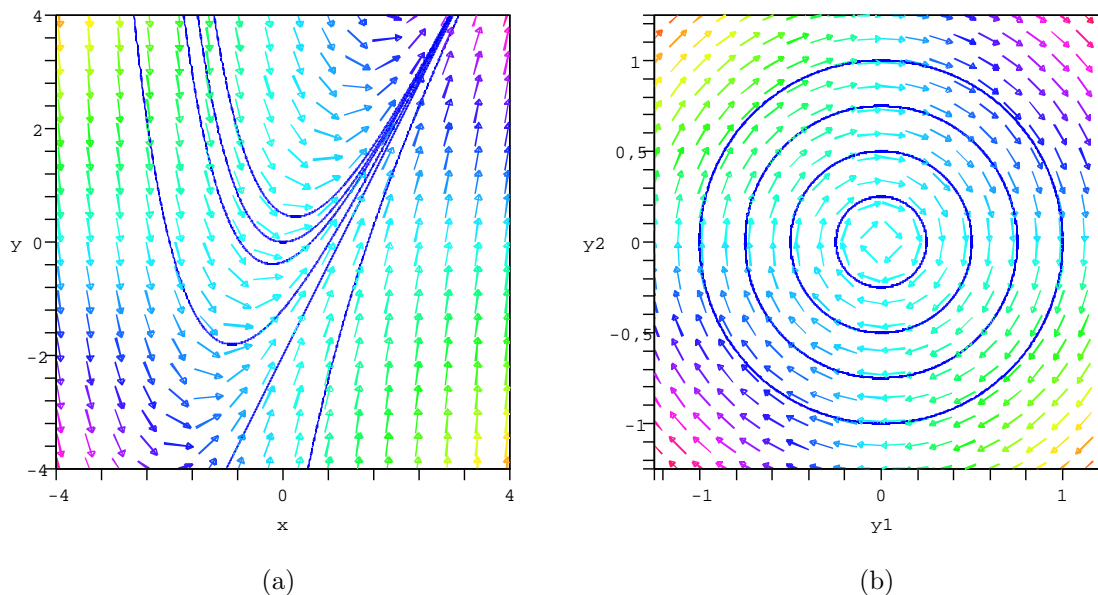


Figura 3: Camp de direccions de l'equació $y' = 2x - y$ (a) i del sistema autònom $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1$ (b). En ambdós casos s'han dibuixat també, en blau, algunes solucions —corbes integrals en el primer i trajectòries en el segon—.

important conseqüències pràctiques: d'una banda ens permetrà visualitzar les trajectòries del sistema i de l'altra aproximar numèricament les seves solucions.

2. Camps de direccions

Comencem considerant equacions diferencials de primer ordre (o escalars) de la forma

$$y' = f(x, y) \quad (9)$$

on, suposarem que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Sigui $y(x)$ una solució, definida en un cert interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Això vol dir que satisfà idènticament l'equació de dalt en aquest interval. És a dir:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad (10)$$

per tot $x \in I$. Sigui $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ un punt de la gràfica de $y(x)$, i. e.: $y_0 = y(x_0)$. Llavors, posant $x = x_0$ en (10):

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0).$$

Veiem doncs que, per trobar el pendent de la solució que passa per un punt $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ no cal pas conèixer explícitament la solució sinó només avaluar $f(x, y)$ en aquest punt, i. e.: $f(x_0, y_0)$. Si es fa això amb tots els punts de $I \times \mathbb{R}$ tenim els pendents de les solucions que passen per cadascun d'ells. A la pràctica, és impossible fer això per tots els punts de $I \times \mathbb{R}$, més aviat es selecciona un nombre suficient i es dibuixa, a cada punt triat, un petit segment amb la inclinació determinada pel pendent de la solució que passa per aquell punt, indicant la seva direcció. S'obté d'aquesta manera el que s'anomena *camp de direccions*. A la figura 3(a) es representa el camp de direccions de l'equació diferencial $y' = 2x - y$ i algunes de les seves corbes integrals.

2.1. Camp de direccions per sistemes al pla. Suposem a continuació que tenim un sistema autònom al pla, com ara:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{11}$$

essent $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, funcions contínues amb $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ obert. Sigui $x(t), y(t)$ una solució definida en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ i considerem la corresponent trajectòria, que serà la corba parametritzada $(x(t), y(t))$. Si (x_0, y_0) és un punt d'aquesta trajectòria corresponent a un valor $t_0 \in I$ del paràmetre, i. e., $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, el vector tangent en aquest punt a la trajectòria (vector velocitat) és:

$$(x'(t_0), y'(t_0)) = (f(x_0, y_0), g(x_0, y_0))$$

De la mateixa manera que abans, podem aprofitar aquest fet per dibuixar un nombre suficient de petits segments (o de fletxetes) que ens ajudaran a visualitzar les trajectòries. A tall d'exemple, a la figura 3(b) s'ha dibuixat el camp de direccions i les òrbites del sistema $y'_1 = y_2, y'_2 = -y_1$ (veure també la figura 1).

Podem estendre aquestes idees i parlar de camps de direccions per sistemes definits en espais de fase de dimensió més gran (tot i que, evidentment, la representació gràfica d'aquests camps esdevé inviable per $n > 2$ en el cas no autònom i $n > 3$ en el cas autònom). La idea però, és que tot sistema d'equacions defineix un camp continu (si F ho és) de direccions, que és en cada punt tangent a la corba integral [en el cas no autònom (4)] o a la trajectòria [en el cas autònom (5)] que passa per aquell punt.

Els teoremes d'existència i unicitat estableixen que, recíprocament, tot camp prou regular² de direccions a l'espai $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ defineix, al menys localment al voltant de cada punt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un *flux*, i. e., una aplicació

$$\psi : [t_0 - \tau_{t_0}, t_0 + \tau_{t_0}] \times V_{(t_0, x_0)} \longrightarrow U_{(t_0, x_0)},$$

$\tau_{t_0} > 0$, $V_{(t_0, x_0)}$ i $U_{(t_0, x_0)}$ entorns de x_0 en \mathbb{R}^n ; tal que:

F1) Per tot $(t, x) \in [t_0 - \tau_{t_0}, t_0 + \tau_{t_0}] \times V_{(t_0, x_0)}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = F(t, \psi(t, x)),$$

F2) $\psi(t_0, x_0) = x_0$.

Observem llavors que $Y(t) = \psi(t, x)$ amb $x \in V_{(t_0, x_0)}$, $|t - t_0| < \tau_{t_0}$ és solució (local) del problema de Cauchy:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= F(t, Y), \\ Y(t_0) &= x.\end{aligned}$$

A continuació, veurem com les idees geomètriques introduïdes en aquesta secció es poden fer servir per trobar aproximacions numèriques de les solucions d'un problema de Cauchy donat.

²hi ha prou amb que sigui *localment Lipschitz* (veure secció 6).

3. El mètode d'Euler

Considerem el problema de Cauchy (8). Busquem un *algorisme* per calcular valors *aproximat*s $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \dots$ de la solució en els punts $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots$. Observem que d'aquesta manera, en comptes d'una funció $Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$, tindrem una *taula de valors* com la taula 1 on $y_{k;0} = y_k(x_0)$ per $k = 1, 2, \dots, n$ —i. e., l'expressió en components de les condicions inicials: $Y(x_0) = Y_0$ —, però $y_{k;j} \approx y_k(x_j)$ per $k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$.

x	y_1	y_2	\dots	y_n
x_0	$y_{1;0}$	$y_{2;0}$	\dots	$y_{n;0}$
x_1	$y_{1;1}$	$y_{2;1}$	\dots	$y_{n;1}$
x_2	$y_{1;2}$	$y_{2;2}$	\dots	$y_{n;2}$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
x_m	$y_{1;m}$	$y_{2;m}$	\dots	$y_{n;m}$

Taula 1: Valors aproximats de la solució del PVI (8).

Seguint el conveni de la taula de dalt, denotarem per $Y(x_k)$ i Y_k als valors exacte i aproximat respectivament de la solució del PVI (8) al punt $x = x_k$, $k = 1, 2, \dots$. A partir de la condició inicial, sabem que $Y(x_0) = Y_0$, però (en general) $Y(x_k) \neq Y_k$ per $k \geq 1$ i de manera semblant per les derivades, és a dir: $Y'(x_0) = F(x_0, Y(x_0)) = F(x_0, Y_0)$ però (en general) $Y'(x_k) = F(x_k, Y(x_k)) \neq F(x_k, Y_k)$ per $k \geq 1$. A més, suposarem que els punts $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ són *equiespaiats* sobre la recta real amb un pas h , i. e.: $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_k = x_0 + kh, \dots$

Cap al 1768 el matemàtic suís L. Euler va introduir el que ell anomenà *mètode de les tangents* i que avui coneixem com *mètode d'Euler*, el qual consisteix en lo següent: com que x_0, Y_0 són valors coneguts a partir de les condicions inicials del PVI (8), la derivada de la solució en $x = x_0$ vé donada per $Y'(x_0) = F(x_0, Y(x_0)) = F(x_0, Y_0)$. Llavors podrem agafar, a l'interval $[x_0, x_1]$, el desenvolupament de Taylor de primer ordre en $x = x_0$ com aproximació de la solució $Y(x)$ al mateix interval, i. e. $Y(x) \approx \tilde{Y}_1(x)$ per $x_0 \leq x \leq x_1$, on es defineix:

$$\tilde{Y}_1(x) := Y_0 + (x - x_0)F(x_0, Y_0), \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

A continuació, a l'interval $[x_1, x_2]$, aproximem també la solució $Y(x)$ pel seu desenvolupament de Taylor a primer ordre, ara al punt $x = x_1$:

$$Y(x) \approx Y(x_1) + (x - x_1)Y'(x_1)$$

però en aquest punt no coneixem $Y(x_1)$ ni $Y'(x_1)$! És per això que ens cal alguna aproximació addicional. De fet, el mètode d'Euler rau en agafar:

$$Y(x_1) \approx Y_1 := \tilde{Y}_1(x_1), \quad Y'(x_1) = F(x_1, Y(x_1)) \approx F(x_1, Y_1)$$

i es pren $Y(x) \approx \tilde{Y}_2(x)$ per $x_1 \leq x \leq x_2$ on

$$\tilde{Y}_2(x) = Y_1 + (x - x_1)F(x_1, Y_1), \quad x_1 \leq x \leq x_2.$$

Aquest últim pas el podem repetir i calcular recursivament³ les aproximacions $\tilde{Y}_3(x), \tilde{Y}_4, \dots, \tilde{Y}_k(x), \dots$ de $Y(x)$ als respectius intervals $[x_2, x_3], [x_3, x_4], \dots, [x_{k-1}, x_k], \dots$. Així

³Hom se'n adona fàcilment [veure (12)] que a cada pas es necessiten les aproximacions a la solució obtinguda al pas anterior.

doncs tindrem, per $k = 2, 3, 4, \dots$,

$$Y(x) \approx Y(x_{k-1}) + (x - x_{k-1})Y'(x_{k-1}) \approx Y_{k-1} + (x - x_{k-1})F(x_{k-1}, Y_{k-1})$$

per $x_{k-1} \leq x < x_k, k = 2, 3, 4, \dots$. Com abans per $k = 2$, s'agafa

$$\tilde{Y}_k(x) = Y_{k-1} + (x - x_{k-1})F(x_{k-1}, Y_{k-1}), \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k. \quad (12)$$

com aproximació de $Y(x)$ en l'interval $[x_{k-1}, x_k]$: i. e. $Y(x) \approx \tilde{Y}_k(x)$ per $x_{k-1} \leq x \leq x_k$. Igualment, en comptes de $Y(x_{k-1})$ i $Y'(x_{k-1})$ —desconeguts!—, es prenen les aproximacions d'aquestes quantitats que produeix el pas anterior, i. e.:

- E1) $Y(x_{k-1}) \approx Y_{k-1} := \tilde{Y}_{k-1}(x_{k-1})$,
 E2) $Y'(x_{k-1}) = F(x_{k-1}, Y(x_{k-1})) \approx F(x_{k-1}, Y_{k-1})$.

DEFINICIÓ 1.7. S'anomena *poligonal d'Euler* de la solució $Y(x)$ del problema de Cauchy (8), a la funció definida “a trossos” per:

$$\tilde{Y}(x) := \tilde{Y}_k(x), \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad (13)$$

$k = 1, 2, \dots$ i on $\tilde{Y}_k(x)$, donat per (8) és costat k -èsim de la poligonal d'Euler.

A partir de (12), de 1 per $x = x_k$ i tenint en compta que $h = x_k - x_{k-1}$ per $k = 1, 2, 3, \dots$ s'arriba a l'*algorisme d'Euler*

$$\begin{aligned} Y_0 &= Y(x_0), \\ Y_k &= Y_{k-1} + hF(x_{k-1}, Y_{k-1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

el qual dóna valors aproximats $Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \dots$ de la solució $Y(x)$ respectivament als punts $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ i. e., posarem: $Y_k \approx Y(x_k)$ als punts $x_k = x_0 + kh$, per $k = 1, 2, \dots$

A la l'algorisme 1 es troba una implementació de (14) amb el lleguatge de programació del MATLAB. Als problemes resolts que vénen a continuació farem servir aquesta funció per comprovar els resultats.

4. Exercicis

En els problemes següents escriu l'algorisme d'Euler, doneu la taula de valors aproximats i dibuixeu la poligonal d'Euler associada.

Problema 4-1. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$, $x \in (0, 1)$ per un pas $h = 0.25$.

◁ **Solució.** Aplicant (14) per $x_0 = 0$, $Y_0 = 1$, $F(x, y) = x^2 - y^2$ s'obté:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(x_0) = y(0) = 1, \\ y_n &= y_{n-1} + h(x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2) = y_{n-1} + h((n-1)^2 h^2 - y_{n-1}^2), \quad n = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

on s'ha fet servir que $x_n = x_0 + nh = 0 + nh$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Aleshores l'algorisme es pot posar com la relació de recurrència següent:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y_n &= (1 - hy_{n-1})y_{n-1} + (n-1)^2 h^3, \quad n = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (15)$$

Fent els càlculs explícitament per $n = 1, 2, 3, 4$ i $h = 0.25$ tenim,

$$n = 1: \quad x_1 = 0.25, \quad y_1 = (1 - 0.25y_0)y_0 + (1-1)h^3 = 1 - 0.25 = \boxed{0.75}$$

$$\begin{aligned} n = 2: \quad x_2 = 0.50, \quad y_2 &= (1 - 0.25y_1)y_1 + (2-1)^2 \cdot 0.015625 = (1 - 0.25 \cdot 0.75) \cdot 0.75 \\ &\quad + 1 \cdot 0.015625 = \boxed{0.625} \end{aligned}$$

Algorisme 1 Mètode d'Euler amb MATLAB

```

% Euler.m
%
%           [t, x] = Euler(F,tspan,x0,h)
%
% INPUT
%   F : és la funció que conté el camp, la capçalera haurà de ser
%       de la forma:
%
%       function dxdt = F(t,x)
%
%
%   tspan : tspan = [t_inicial, t_final]
%   x0: valor inicial de la variable dependent.
%   h : tamany del pas.
%
% OUTPUT
%   t : vector que conte les abscisses on es calcularan els valors
%       aproximats de les solucions: t(n) = tspan(1)+ n * h, on
%       n= 1,2,...,N = (tspan(2) - tspan(1)) / h.
%   x : x(n,:), n=1,...,N aproximació de la solució a temps t(i).

function [t,x] = Euler(F,tspan,x0,h)

x(1,:) = x0';
t = tspan(1):h:tspan(2);

for K = 1:length(t)-1,
    dxdt = feval(F,t(K),x(K,:));
    x(K+1,:) = x(K,:) + h .* dxdt';
end;

```

$$n = 3: \quad x_3 = 0.75, \quad y_3 = (1 - 0.25y_2)y_2 + (3 - 2)^2 \cdot 0.015625 = (1 - 0.25 \cdot 0.625) \cdot 0.625 + 4 \cdot 0.015625 = \boxed{0.58984375}$$

$$n = 4: \quad x_4 = 1.00, \quad y_4 = (1 - 0.25y_3)y_3 + (4 - 1)^2 \cdot 0.015625 = (1 - 0.25 \cdot 0.58984375) \cdot 0.58984375 + 9 \cdot 0.015625 = \boxed{0.643489837}$$

Els resultats d'aquests càlculs es recullen la taula 2 on, a la darrera columna de la dreta s'han escrit els valors aproximats de la solució als mateixos punts però obtinguts a partir del mètode Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 7 i 8 amb control del pas, —[RK78] a partir d'ara. No comentarem aquí en què consisteix aquest mètode (vegeu l'apèndix, per una descripció més detallada dels mètodes de Runge-Kutta) però assenyalarem que l'esmentat “control del pas” consisteix en ajustar, a cada pas, el seu tamany h de manera que l'error de l'aproximació calculada no sigui més gran que una certa tolerància, ε_{TL} , fixada. A aquest control de l'error, s'afegeix al fet de què es tracta d'un mètode d'ordre elevat. Tot això fa que el [RK78] es consideri un mètode prou acurat —de lluny molt més que mètode

n	x_n	y_n [EULER]	y_n [RK78]
0	0,000	1,000 000 000 0	1,000 000 000 000 00
1	0,250	0,750 000 000 0	0,804 707 564 801 89
2	0,500	0,625 000 000 0	0,701 768 384 456 89
3	0,750	0,589 843 750 0	0,683 250 775 970 04
4	1,000	0,643 489 837 6	0,750 015 702 847 29

Taula 2: Solució del PVI 3-1 problema pel mètode d'Euler. La darrera columna de la dreta correspon a la integració amb RK78 i $\varepsilon_{TL} < 1,0 \cdot 10^{-15}$.

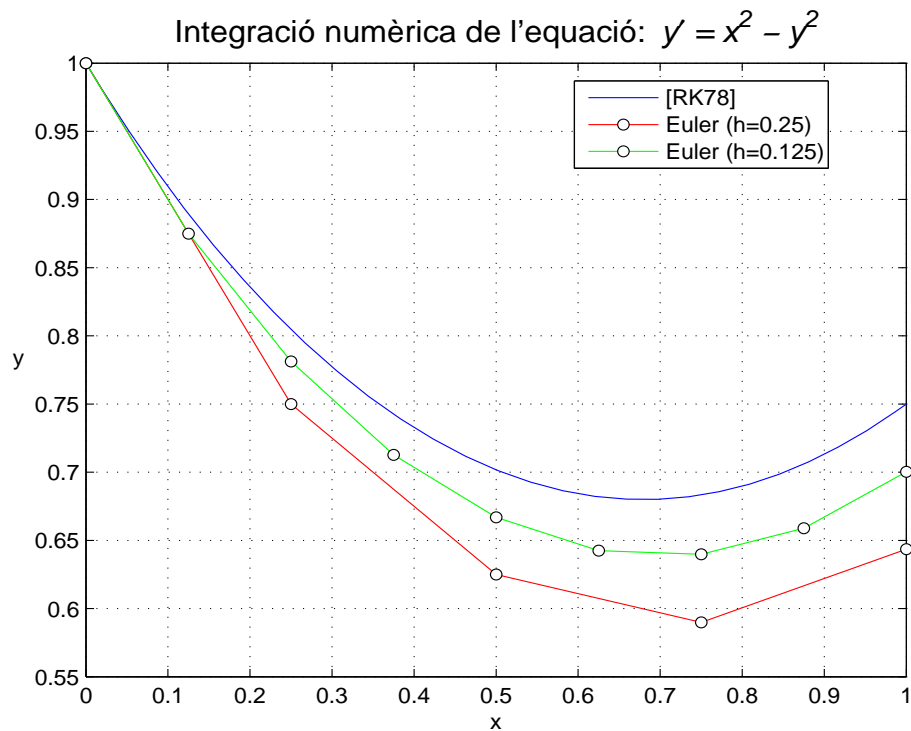


Figura 4: La corba contínua (en blau) correspon a la integració del PVI 3-1 amb RK78 i $\varepsilon_{LT} < 1,0 \cdot 10^{-15}$.

d'Euler— per resoldre numèricament problemes a valors inicials: especialment si el camp de direccions és prou regular (prou “smooth”) i l'interval d'integració no és massa llarg. Així, a la figura 4 la corba integral (la gràfica “contínua” en blau) ha estat obtinguda amb el mètode [RK78], calculant un nombre prou elevat de punts. La poligonal d'Euler corresponent a $h = 0.25$ es dibuixa en vermell, on els punts marcats són els de la taula 2. Tot i que s'aprecien desviacions notables entre totes dues —especialment a mesura que x augmenta—, la poligonal “segueix” la corba integral prou bé...

Problema 4-2. $y'' = 1 - y^2$, $y(0) = y'(0) = 0$, $x \in (0, 1)$ per un pas $h = 0.25$.

◁ **Solució.** Introduint $z(x) := y'(x)$, obtenim el sistema equivalent de primer ordre:

$$\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= 1 - y^2, \end{aligned} \tag{16}$$

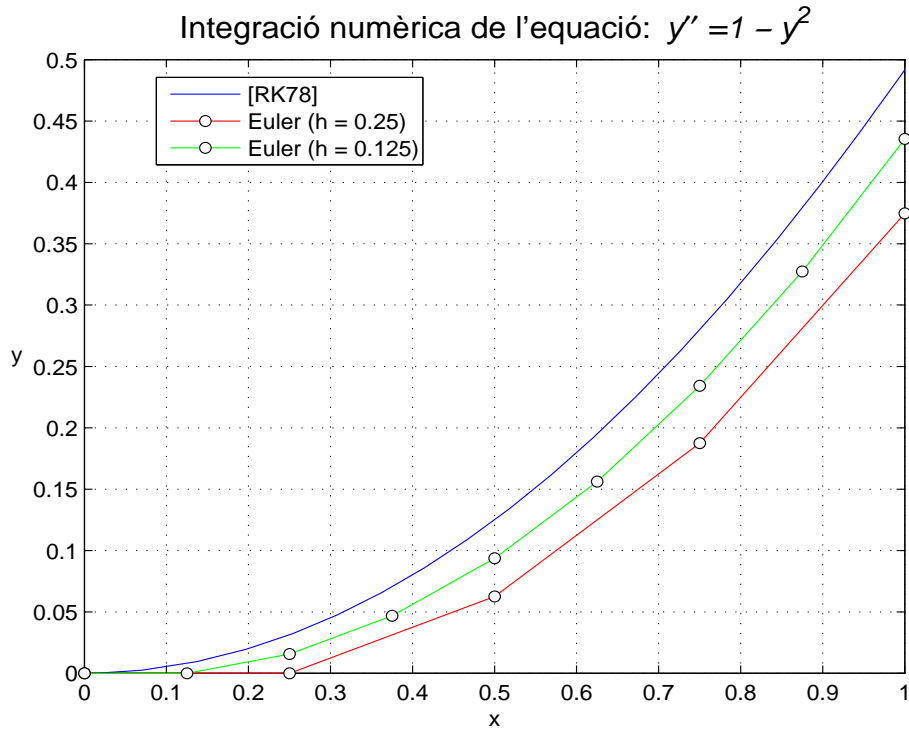


Figura 5: Les poligonals (en vermell i en verd) corresponen a tamanys del pas $h = 0.25$ ($N = 4$) i 0.125 ($N = 8$) respectivament. La corba contínua (en blau) correspon a la integració del PVI 5-1 amb [RK78] i $\varepsilon_{LT} < 1,0 \cdot 10^{-15}$.

amb les corresponents condicions inicials:

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) = 0, \\ z_0 &= z(0) = y'(0) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Ara, l'algorisme d'Euler corresponent a aquest PVI queda:

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + h z_{n-1}, \\ z_n &= z_{n-1} + h(1 - y_{n-1}^2), \end{aligned} \tag{18}$$

on y_n, z_n són respectivament, les aproximacions de les components $y(x_n), z(x_n)$ de la solució als punts $x_n = x_0 + nh$ per $n = 1, 2, \dots, N$. Posant $x_0 = 0, h = 0.25$ i $N = 4$ (dedes de l'enunciat), l'algorisme 18 produeix la taula 4. La poligonal d'Euler i la corba integral són les representades a la figura 5.▷

n	x_n	y_n	y_n [RK78]	z_n	z_n [RK78]
0	0,000	0,000 000 000 0	0,000 000 000 0	0,000 000 000 0	0,000 000 000 0
1	0,250	0,000 000 000 0	0,031 247 965 6	0,250 000 000 0	0,249 951 175 4
2	0,500	0,062 500 000 0	0,124 869 882 0	0,500 000 000 0	0,498 439 306 9
3	0,750	0,187 500 000 0	0,279 772 044 1	0,749 023 437 5	0,738 203 993 4
4	1,000	0,374 755 859 4	0,491 758 376 8	0,990 234 375 0	0,950 913 603 2

Taula 3: Solució del sistema (16) amb les c. i. (17). S'ha agafat una tolerància $\varepsilon_{TL} < 1,0 \cdot 10^{-14}$ al mètode [RK78].

5. Errors en els mètodes numèrics

Quan es fan servir mètodes numèrics per fer càlculs, com ara l'algorisme d'Euler (14) per resoldre el problema de Cauchy (8), el que s'acaba obtenint són *aproximacions* de les quantitats *exactes*. Així, abans de donar per bona una solució numèrica s'han d'examinar diversos aspectes dels mètodes emprats. Un d'aquests és la *convergència*: és cert que a mida que el pas h tendeix cap a zero, tendeixen els valors de la solució numèrica $Y_1, Y_2, \dots, Y_k, \dots$ cap als respectius valors $Y(x_1), Y(x_2), \dots, Y(x_k), \dots$ de la solució exacta? si fos així: com de ràpida és aquesta convergència? o, en termes quantitatius: donada una precisió, quin tamany del pas h s'hauria d'agafar per garantir aquesta precisió? De fet, caldrà treballar amb un tamany del pas prou petit per assolir la apreciació demanada però tampoc massa petit, perquè això podria donar lloc a la relentització dels càlculs i fins i tot a la pèrdua de precisió, debut l'acumulació d'errors *d'arrodoniment*.

En efecte, en resoldre numèricament un PVI hi ha dues fonts d'error. En primer lloc, si es suposa que la computadora amb què treballem és capaç d'efectuar tots els càlculs de manera exacta —fent servir “infinites” xifres decimals—, la diferència ε_k entre la solució exacta i la solució aproximada:

$$\varepsilon_k := \|Y(x_k) - Y_k\|, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

es coneix com *error global de truncament*. Aquest error és debut, d'una banda, a que cada pas s'aplica una fórmula aproximada per determinar Y_{n+1} , i de l'altra, a que les dades “d'entrada” a cada pas difereixen de la solució exacta, ja que en general, $Y_k \neq Y(x_k)$. Si aquest últim efecte no es té en compte, i. e., si es suposa que les dades d'entrada són correctes, llavors l'únic error en avançar un pas és debut només a l'ús d'una fórmula aproximada (concretament, a un desenvolupament de Taylor a ordre finit). Aquest error es coneix com *error local de truncament*, ε_k , $k = 0, 1, 2, \dots$.

En segon lloc, debut a les limitacions dels ordinadors, a la pràctica és impossible calcular de manera exacta Y_{k+1} a partir de la fórmula donada. Per tant es té un *error d'arrodoniment* debut a la manca d'exactitud dels càlculs. L'*error global d'arrodoniment* es defineix com:

$$r_k = \|Y_k - Y_k^*\|, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

on Y_k^* és el valor calculat realment per mitjà del mètode numèric emprat, per exemple el mètode d'Euler (14). El mòdul de l'error total en calcular $Y(x_k)$ vindrà donat per:

$$\begin{aligned} \|Y(x_k) - Y_k\| &= \|Y(x_k) - Y_k + Y_k - Y_k^*\| \\ &\leq \|Y(x_k) - Y_k\| + \|Y_k - Y_k^*\| \\ &= \varepsilon_k + r_k. \end{aligned} \quad (20)$$

Pels mètodes numèrics d'un pas (entre els quals es troba el mètode d'Euler) és possible obtenir estimacions efectives de l'error de truncament. En canvi, l'error d'arrodoniment és de naturalesa més aleatòria; depèn del tipus de computadora que es faci servir, del ordre al qual es portin els càlculs, del mètode d'arrodoniment, etc. i el seu estudi ultrapassa l'àmbit d'aquestes notes. Una bona referència per aquests aspectes són els títols [4], [3] de la bibliografia.

5.1. Error de truncament en el mètode d'Euler. A continuació analitzarem l'error de truncament en el cas del mètode d'Euler. De fet, el que s'obtindrà seran acotacions d'aquest error de truncament. El resultat principal és el que vé formulat a la proposició següent:

PROPOSICIÓ 1.1. *Sigui $Y(x)$ solució del problema del PVI (8) amb $F \in C^1(\Omega)$ i $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a < b$. Supposem: $[a, b] \subseteq I$; $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convex i contenint els vèrtexs de la*

poligonal d'Euler, i. e.: $(x_k, Y_k) \in \Omega$ per $k = 1, 2, \dots, N$ amb: $x_0 = a$, $x_k = x_0 + kh$, $h = (b - a)/N$ i Y_k donat per (14). Si existeixen L, M donades per:

$$L = \max \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y) \right\| : (x, Y) \in \bar{\Omega} \right\}, \quad (21)$$

$$M = \max \left\{ \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(x, Y) \right\| + \left\| \frac{\partial F}{\partial Y}(x, Y)F(x, Y) \right\| : (x, Y) \in \bar{\Omega} \right\}; \quad (22)$$

llavors, els errors local y global de truncament $\epsilon_k, \varepsilon_k$ (veure (19)) admeten les fites següents:

$$\epsilon_k \leq \frac{h^2 M}{2}, \quad (23)$$

$$\varepsilon_k \leq \frac{Mh}{2L} (e^{(b-a)L} - 1) \quad (24)$$

per tot $k = 0, 1, 2, \dots, N$.

REMARCA 1.2. En (21) la norma es pren sobre una matriu. Donada una norma vectorial $\|\cdot\|$ en \mathbb{C}^n es defineix la seva *norma matricial compatible* mitjançant:

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \neq 0 \right\}$$

essent A una matriu complexa qualsevol. Sovint a la pràctica, el càlcul de (21) ó (22) pot ser complicat o força feixuc i s'haurà de substituir aquestes quantitats per fites superiors triades convenientment. Per exemple, es pot fer servir

$$L' := n \sup_{1 \leq i, j \leq n} \left\{ \left| \frac{\partial F_i}{\partial Y_j}(x, Y) \right| : (x, Y) \in \bar{\Omega} \right\} \geq L$$

en comptes de L .

DEMOSTRACIÓ. Primer calcularem l'error local de truncament ϵ_n . Desenvolupant per Taylor $Y(x_{n+1}) = Y(x_n + h)$ en $x = x_n$ i tenint en compte (14),

$$Y(x_{n+1}) - Y_{n+1} = Y(x_n) - Y_n + h(F(x_n, Y(x_n)) - F(x_n, Y_n)) + \frac{h^2}{2} Y''(\tilde{x}_n), \quad (25)$$

$\tilde{x}_n \in (x_n, x_n + h)$. Ara, derivant respecte de x a totes dues bandes de $Y'(x) = F(x, Y(x))$ i substituint $x = \tilde{x}_n$ s'obté

$$Y''(\tilde{x}_n) = \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n)) + \frac{\partial F}{\partial Y}(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n))F(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n)).$$

A continuació, substituint a (25), prenent la norma a totes dues bandes i teneint present (22), s'arriba a:

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} &= \|Y(x_{n+1}) - Y_{n+1}\| \\ &= \frac{h^2}{2} \left\| \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n)) + \frac{\partial F}{\partial Y}(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n))F(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n)) \right\| \\ &\leq \frac{h^2}{2} \left(\left\| \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n)) \right\| + \left\| \frac{\partial F}{\partial Y}(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n))F(\tilde{x}_n, Y(\tilde{x}_n)) \right\| \right) \\ &\leq \frac{h^2 M}{2}, \end{aligned}$$

per $k = 0, 1, 2, \dots$, on remarquem que en el càlcul de l'error *local* de truncament es suposa $Y_n = Y(x_n)$ (i. e., que les dades "d'entrada" són exactes) i per tant el primer i segon termes

a la dreta de la igualtat en (25) són zero, i. e.:

$$Y(x_n) - Y_n = 0, \quad F(x_n, Y(x_n)) - F(x_n, Y_n) = 0.$$

Per acotar l'error de truncament global es procedeix a partir igualment a partir de (25) tenint en compte que les desigualtats de dalt ara no són zero. De fet, la primera és, segons la definició (19), ε_n mentre que, pel teorema del valor mitjà (veure [1], secció 12.11):

$$\begin{aligned} \|F(x_n, Y(x_n)) - F(x_n, Y_n)\| &\leq \left\| \frac{\partial F}{\partial Y}(x_n, \tilde{Y}_n) (Y(x_n) - Y_n) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{\partial F}{\partial Y}(x_n, \tilde{Y}_n) \right\| \|Y(x_n) - Y_n\| \\ &\leq L \|Y(x_n) - Y_n\| \end{aligned}$$

on \tilde{Y} és un punt intermig del segment que uneix (x_n, Y_n) amb $(x_n, Y(x_n))$. La última desigualtat és conseqüència de (21). Combinant-ho tot, a partir de (25) s'obté:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= \|Y(x_{n+1}) - Y_{n+1}\| \\ &\leq \|Y(x_n) - Y_n\| + h\|F(x_n, Y(x_n)) - F(x_n, Y_n)\| + \varepsilon_{n+1} \\ &\leq \|Y(x_n) - Y_n\| + hL\|Y(x_n) - Y_n\| + \frac{h^2}{2}M, \\ &= \varepsilon_n + hL\varepsilon_n + \frac{h^2M}{2} \end{aligned}$$

és a dir, la relació:

$$\varepsilon_{n+1} \leq (1 + hL)\varepsilon_n + \frac{h^2M}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

I com que $\varepsilon_0 := \|Y(x_0) - Y_0\| = 0$, aplicant (26) recursivament:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\leq (1 + hL)\varepsilon_0 + \frac{h^2M}{2} \\ &= \frac{h^2M}{2}, \\ \varepsilon_2 &\leq (1 + hL)\varepsilon_1 + \frac{h^2M}{2} \leq (1 + hL)\frac{h^2M}{2} + \frac{h^2M}{2} \\ &= (1 + (1 + hL))\frac{h^2M}{2}, \\ \varepsilon_3 &\leq (1 + hL)\varepsilon_2 + \frac{h^2M}{2} \leq (1 + hL)(1 + (1 + hL))\frac{h^2M}{2} + \frac{h^2M}{2}, \\ &= (1 + (1 + hL) + (1 + hL)^2)\frac{h^2M}{2}, \dots \end{aligned}$$

Per inducció es comprova que,

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &\leq (1 + (1 + hL) + \dots + (1 + hL)^{n-1})\frac{h^2M}{2} \\ &= \frac{(1 + hL)^n - 1}{1 + hL - 1} \times \frac{h^2M}{2} \\ &= hM \frac{(1 + hL)^n - 1}{2L}, \quad \text{per tot } n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

a partir d'aquí, la fita (24) es dedueix de les desigualtats

$$(1 + hL)^n \leq e^{nhL}, \quad \text{per tot } n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

$$nh = \frac{b-a}{N} \leq (b-a), \quad \text{per tot } n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (28)$$

La segona és evident mentre que per demostrar (27) considerarem la funció

$$h(x) = \ln(1+x) - x, \quad \text{per } x \geq 0.$$

En efecte, com que $h(x)$ és monòtona decreixent per $x > 0$ (ja que la seva derivada $h'(x) = -x/(1+x)$ és negativa per $x > 0$) i $h(0) = 0$ es té llavors: $h(x) \leq 0$ per tot $x \geq 0$, la qual cosa implica que $\ln(1+x)^n \leq nx$, per tot $x \geq 0$ i per tot $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. D'aquí (27) surt agafant $x = hL$. \square

REMARCA 1.3. Observem que Per un punt fixat, $\hat{x} = x + Nh$, i. e., amb Nh constant, llavors $Nh = \hat{x} - x_0$. Substituint això en (24), veiem que

$$\varepsilon_k \leq hM \frac{e^{L(\hat{x}-x_0)} - 1}{2L} \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

quan $h \rightarrow 0$ (llavors però es necessiten un nombre infinit de passos per arribar a \hat{x} , i. e., llavors $N \rightarrow \infty$). Així doncs el mètode d'Euler és convergent, donat que l'error global de truncament tendeix a zero quan el pas tendeix cap a zero.

6. Existència i unicitat de solucions del problema de Cauchy

A la definició 1.6 es va introduir el problema de Cauchy o de valors inicials (PVI). Suposarem ara que F és almenys contínua en Ω . En aquesta secció estudiarem sota quines condicions existeix i és única la solució *local* del problema de Cauchy (8). Abans però, cal definir què s'entèn per solució local.

DEFINICIÓ 1.8. Anomenarem *solució local* de (8) a l'interval $[x_0 - a, x_0 + a]$ a una funció $Y : [x_0 - a, x_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfà:

SL-1) $(x, Y(x)) \in \Omega$ per tot $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

SL-2) $Y \in C^1([x_0 - a, x_0 + a]) \cap C^0([x_0 - a, x_0 + a])$.

SL-3) $Y'(x) = F(x, Y(x))$ per tot $x \in]x_0 - a, x_0 + a[$ i $Y(x_0) = Y_0$.

REMARCA 1.4. Notem que per tal de que $Y \in C^1([x_0 - a, x_0 + a])$, cal que F sigui almenys contínua. Si no és així (8) pot no admetre ni tan sols una solució diferenciable. L'exemple següent Il·lustra aquest fet.

EXEMPLE 1.5. Sigui el PVI:

$$y' = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

$$y(0) = y_0.$$

Si la solució d'aquest problema existís, tenint en compte que haurà de ser contínua en $x = 0$, aquesta vindrà donada per $y(x) = x + y_0$, si $x \leq 0$ i $y(x) = y_0$, si $x > 0$. Però en aquest cas $y'(0^+) = 0 \neq y'(0^-) = 1$. Per tant $y(x)$ no és diferenciable en $x = 0$ i el problema de Cauchy no té solució.

Es pot comprovar, però que la continuïtat de F no tan sols és necessària sinó que és també *suficient* per garantir l'existència. En canvi, per assegurar la *unicitat* de la solució del problema local caldrà més regularitat.

EXEMPLE 1.6. El PVI:

$$\begin{aligned}y' &= y^{1/3}, \\y(0) &= 0,\end{aligned}$$

admet com solució $y_1(x) \equiv 0$, però també:

$$y_2(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Observem doncs que existex solució (F és contínua) però aquesta no és única. El problema rau en la manca de regularitat de $f(x, y) = y^{1/3}$ (no és, per exemple, de classe C^1 a l'origen).

REMARCA 1.5 (Notació). D'ara endavant, $D_r(x_0, Y_0)$ denotarà la bola tancada amb centre $(x_0, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i radi $r > 0$, i. e.:

$$D_r(x_0, Y_0) = \{(x, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \|(x - x_0, Y - Y_0)\| \leq r\} = \overline{B_r(x_0, Y_0)}.$$

DEFINICIÓ 1.9. Sigui la funció $f : S \rightarrow \mathbb{R}^p$, on S és un obert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ ($x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$). Direm que f és *localment Lipschitz* en $(x_0, y_0) \in S$, si existeixen $r, L > 0$ tals que $D_r(x_0, y_0) \subset S$ i

$$\|f(x, y) - f(x, y')\| \leq L\|y - y'\|$$

per tot $(x, y), (x, y') \in S$. L reb el nom de constant (local) de Lipschitz.

REMARCA 1.6. Per exemple, si $f \in C^1(S)$, llavors a partir del teorema del valor mitjà i de les propietats de les normes matricials és immediat comprovar que f és localment Lipschitz respecte y en qualsevol punt (x_0, y_0) amb constant de Lipschitz (local) donada per

$$L = \max \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right\| : (x, y) \in D_r(x_0, y_0) \right\}$$

El teorema (clàssic) que estableix l'existència i unicitat de solucions al Problema de Cauchy pot formular-se de la manera següent.

TEOREMA 1.7 (Existència i unicitat de solucions). *Sigui el problema a valors inicials:*

$$\begin{aligned}Y' &= F(x, Y), \\Y(x_0) &= Y_0,\end{aligned}\tag{29}$$

on $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, essent Ω una regió (i. e., un conjunt obert i connex) de $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ($x \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}^n$), amb $(x_0, Y_0) \in \Omega$. Supposem que F és contínua en Ω i existeixen $r, L > 0$ tals que $D_r(x_0, Y_0) \subset \Omega$ i:

$$\|F(x, Y) - F(x, Y')\| \leq L\|Y - Y'\|$$

per $(x, Y) \in \Omega$, $(x, Y') \in \Omega$ qualssevol; i. e., F és localment Lipschitz respecte Y en (x_0, Y_0) amb constant de Lipschitz L —veure definició 1.9—. Sigui M donada per:

$$M = \max \{ \|F(x, Y)\| : (x, Y) \in D_r(x_0, Y_0) \}.\tag{30}$$

Aleshores, si

$$0 < a \leq \min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{r}{2M} \right\},\tag{31}$$

existeix una única solució local —en el sentit de la definició 1.8— definida a l'interval $I_{x_0} = [x_0 - a, x_0 + a]$.

Per abordar la demostració d'aquest teorema necessitem prèviament un conjunt de conceptes i resultats de l'anàlisi que detallem a continuació.

6.1. Successions funcionals: alguns conceptes i propietats. Entendrem per *successió funcional* una col·lecció numerada de funcions $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = \{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$ definides al mateix interval I de la recta real i prenent valors en \mathbb{R}^n , i. e., $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

DEFINICIÓ 1.10. Direm que una successió funcional, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ com la descrita dalt, convergeix *uniformement* sobre l'interval I (o a l'interval I) a una funció $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si, per qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix un índex $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \tag{32}$$

per tot $n \geq N$ i per tot $x \in I$.

Altra caracterització alternativa de la convergència uniforme és la següent: $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ convergeix uniformement a f sobre I si $\sup_{x \in I} \|f(x) - f_n(x)\|$ tendeix a zero quan n tendeix a infinit. Intuïtivament, la convergència uniforme és una convergència “per tubs”. Així, donada $\varepsilon > 0$, les gràfiques de f_n es troben dintre d'un tub de radi ε al voltant de la gràfica de f per a tota n suficientment gran (veure figura 6).

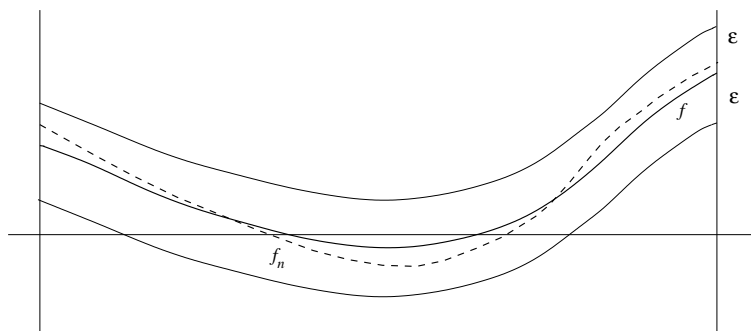


Figura 6: Convergència uniforme: per n suficientment gran les funcions f_n es troben dintre d'un “tub” de radi ε centrat a la funció límit f .

Taquigràficament, s'escriurà $f_n \rightarrow f$ sobre I , o $f_n(x) \rightarrow f(x)$ sobre I . D'altra banda, caldrà distingir la convergència uniforme de la convergència *puntual*.

DEFINICIÓ 1.11. Una successió de funcions $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, convergeix *puntualment* sobre l'interval I cap a la funció $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ per tot $x \in I$. En altres paraules si, per cada x de l'interval I , la successió *numèrica* $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$ convergeix cap al corresponent valor de f al mateix punt, $f(x)$. Escriurem $f_n \rightarrow f$ a (o sobre) I , ó $f_n(x) \rightarrow f(x)$ a (o sobre) I , etc.

REMARCA 1.8. A partir de les dues definicions, és immediat que la convergència uniforme és més “forta” que la convergència puntual, en el sentit que la primera implica necessàriament la segona. De manera més precisa:

$$f_n \rightarrow f \text{ sobre } I \implies f_n \rightarrow f \text{ sobre } I .$$

EXEMPLE 1.7. La successió de funcions $f_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ convergeix uniformement cap a $f(x) \equiv 0$ sobre qualsevol interval $[0, b]$ amb $0 < b < 1$. En efecte, ja que, per qualsevol $\varepsilon > 0$:

$$|x^n - 0| \leq b^n < \varepsilon, \text{ per } N \in \mathbb{N} \text{ amb } N > \frac{\log \varepsilon}{\log b}$$

i per tot $0 \leq x \leq b$. En canvi $\{x^n\}_{n=0,1,2,\dots}$ no convergeix uniformement a l'interval $[0, 1]$ (veure la remarca 1.9).

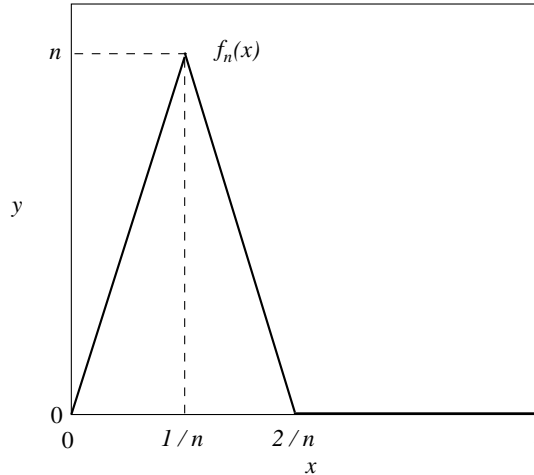


Figura 7: Representació gràfica de la funció $f_n(x)$ donada per (33).

EXEMPLE 1.8. Sigui la successió de funcional:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in [0, 1/n] \\ 2n - n^2x, & x \in [1/n, 2/n] \\ 0, & x \in [2/n, 1]. \end{cases} \quad (33)$$

Puntualment $f_n(x) \rightarrow 0$ per tota $x \in I = [0, 1]$. En canvi és evident (figura 6.1) que $\sup_{x \in [0, 1]} f_n(x) = n$ amb la qual cosa $\sup_{x \in [0, 1]} \{f_n(x)\} \rightarrow \infty$ y llavors $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no pot ser absolutament convergent.

PROPOSICIÓ 1.9. *El límit uniforme $f(x)$ d'una successió $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$ de funcions contínues definides en un mateix interval I de \mathbb{R} i amb valors en \mathbb{R}^n , és una funció contínua sobre el mateix interval.*

DEMOSTRACIÓ. Considerem $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ funcions contínues per tot $n = 0, 1, 2, \dots$; $I \subseteq \mathbb{R}$ interval i suposem que $f_n \rightarrow f$ sobre I . Per cada $\hat{x} \in I$ fixat, acotem la diferència $\|f(x) - f(\hat{x})\|$, $x \in I$, utilitzant la desigualtat triangular:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(\hat{x})\| &= \|f(x) - f_n(x) + f_n(\hat{x}) - f(\hat{x}) + f_n(x) - f_n(\hat{x})\| \\ &\leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(\hat{x}) - f(\hat{x})\| + \|f_n(x) - f_n(\hat{x})\|. \end{aligned}$$

Debut a la convergència uniforme, per un $\varepsilon > 0$ donat, existeix $N \in \mathbb{N}$: $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon/2$ per tot $n \geq N$ i per tot $x \in I$. Aleshores, amb $n \geq N$ fixat, de la desigualtat de dalt es dedueix que:

$$0 \leq \|f(x) - f(\hat{x})\| < \|f_n(x) - f_n(\hat{x})\| + \varepsilon \quad (34)$$

per tot $x \in I$. A continuació, prenent límits quan $x \rightarrow \hat{x}$ a totes dues bandes

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \|f(x) - f(\hat{x})\| \leq \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \|f_n(x) - f_n(\hat{x})\| + \varepsilon = \varepsilon,$$

ja que, debut a la continuïtat de les funcions f_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ de la successió a l'interval I és $\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \|f_n(x) - f_n(\hat{x})\| = 0$. Per tant:

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \hat{x}} \|f(x) - f(\hat{x})\| \leq \varepsilon \quad (35)$$

però com que de fet $\varepsilon > 0$ és arbitrària, (35) implica:

$$\lim_{x \rightarrow \hat{x}} \|f(x) - f(\hat{x})\| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \hat{x}} f(x) = f(\hat{x})$$

per cada $\hat{x} \in I$; d'on es conclou la continuïtat de f a l'interval I . \square

REMARCA 1.10. Fent servir aquesta propietat es veu clar que la successió $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de l'exemple 1.7 no pot convergir uniformement a l'interval $[0, 1]$, perquè, com ja hem vist, la funció límit és $f(x) \equiv 0$ a qualsevol interval compacte contingut a $[0, 1]$, mentre que $f(1) = 1$ (puix $f_n(1) = 1$ per tot $n = 0, 1, 2, \dots$). En altres paraules, la funció límit no seria contínua a l'interval $[0, 1]$; la qual cosa contradiu la proposició 1.9.

La definició 1.10 no és massa pràctica per comprovar la convergència uniforme de $f_n(x)$, debut a que hom té que “endivinar” la funció límit $f(x)$ abans de poder comprovar la desigualtat (32). Com al cas de les successions numèriques, hi ha l'anomenat *criteri de Cauchy* per la convergència uniforme.

PROPOSICIÓ 1.11 (Criteri de Cauchy de convergència uniforme). *La successió $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de funcions $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ definides sobre un interval comú $I \subseteq \mathbb{R}$, convergeix uniformement a una funció f , definida al mateix interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si, donat $\varepsilon > 0$ qualsevol, existeix $N \in \mathbb{N}$ de manera que:*

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon, \quad (36)$$

per tot $m, n \geq N$ i per tot $x \in I$.

REMARCA 1.12. És clar que aquest criteri no dóna elements per deduir la funció límit, però permet garantir la seva existència i la seva unicitat.

DEMOSTRACIÓ. Primer de tot (36) assegura la convergència *puntual*, car fixada $t \in I$, la successió (numèrica) $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ és una successió de Cauchy i aleshores convergent cap a un límit que anomenarem $f(t)$. Si això ho fem per a cada $x \in I$, tindrem definida una funció $x \in I \mapsto f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. S'haurà de comprovar que aquesta funció $f(x)$ definida com el límit puntual per cada $x \in I$, és també el límit uniforme de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. Procedirem de la manera següent: fixat $\varepsilon > 0$ arbitrari, triem $N \in \mathbb{N}$ de manera que es satisfaci (36); a continuació, amb $n \geq N$, prenem límit quan $m \rightarrow \infty$,

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$$

i com que això val de fet per tot $n \geq N$ i per tot $x \in I$, la proposició 1.11 queda demostrada. \square

Exercici 1.1. Demostreu el recíproc, i. e., que si la successió és un uniformement convergent, llavors es satisfà la condició de Cauchy (36).

Tanmateix es farà servir la propietat següent.

PROPOSICIÓ 1.13. *Sigui $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ una successió de funcions contínues definides en un mateix interval $I \subseteq \mathbb{R}$ i amb valors en \mathbb{R}^n (veure definició 1.11). Si $f_n \rightarrow f$ sobre I , llavors per $x_0, x_1 \in I$ qualsevol es satisfà:*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{x_1} f_n(x) \, dx.$$

En altres paraules: la convergència uniforme commuta amb la integració.

DEMOSTRACIÓ. Com que les funcions f_n són contínues en I estaran definides cadascuna de les integrals $\int_{x_0}^{x_1} f_n(x) \, dx$ per $n = 0, 1, 2, \dots$. D'altra banda, segons la proposició 1.9, f serà contínua i aleshores també estarà definida la integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x) \, dx$. A més, com que

per tota $\varepsilon > 0$ podem fer $\sup_{x \in [x_0, x_1]} \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ prenent n més gran que un cert índex N , resulta

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{x_0}^{x_1} f(x) \, dx - \int_{x_0}^{x_1} f_n(x) \, dx \right\| \\ &= \left\| \int_{x_0}^{x_1} (f(x) - f_n(x)) \, dx \right\| \leq \left| \int_{x_0}^{x_1} \|f(x) - f_n(x)\| \, dx \right| \leq \varepsilon |x_1 - x_0|, \end{aligned} \quad (37)$$

la qual cosa prova que $\int_{x_0}^{x_1} f_n(x) \, dx \rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x) \, dx$. \square

Notem que en aquesta última demostració, per establir (37) s'ha fet servir una desigualtat bàsica del càlcul integral:

LEMA 1.14. *donada una funció vectorial $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ amb valors en \mathbb{R}^m , contínua a l'interval $[a, b]$; la integral vectorial $\mathfrak{J} = \int_a^b f(t) \, dt \in \mathbb{R}^m$ satisfà:*

$$\left\| \int_a^b f(t) \, dt \right\| \leq \left| \int_a^b \|f(t)\| \, dt \right|.$$

DEMOSTRACIÓ. Només cal comparar les sumes mitjançant la desigualtat triangular

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta x_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_i)\| |\Delta x_i|,$$

($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$) i prendre límits quan $n \rightarrow \infty$. \square

6.2. Mètode de Picard i demostració del teorema d'existència i unicitat.

La resolució del PVI (29) és equivalent a la de l'equació integral

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x F(s, Y(s)) \, ds, \quad x \in I_{x_0} = [x_0 - a, x_0 + a] \quad (38)$$

en el sentit següent; sigui $Y : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ solució —segons la definició 1.8—, del problema de Cauchy (29). Aleshores $Y'(x) = F(x, Y(x))$ per $x \in \overset{\circ}{I}_{x_0} =]x_0 - a, x_0 + a[$ i integrant a l'interval $[x_0, x]$ amb $|x - x_0| < a$, a totes dues bandes: $Y(x) - Y(x_0) = \int_{x_0}^x F(s, Y(s)) \, ds$ des d'on substituint la condició inicial: $Y(x_0) = Y_0$ es conclou que Y satisfà l'equació integral (38) en I_{x_0} .

Recíprocament, si $Y(x)$, funció contínua en I_{x_0} amb $(x, Y(x)) \in \Omega$ per tot $x \in I_{x_0}$, és una solució de (38), llavors és també solució del PVI (29); ja que la regla de la cadena garanteix que la funció $x \in I_{x_0} \mapsto (x, Y(x)) \in \Omega \mapsto F(x, Y(x)) \in \mathbb{R}^n$ és també contínua i aleshores, pel teorema fonamental del càlcul, Y és C^0 a I_{x_0} i C^1 a $\overset{\circ}{I}_{x_0}$ amb $Y'(x) = F(x, Y(x))$. D'altra banda, Y satisfà la condició inicial del PVI (29): $Y(x_0) = Y_0$, com es comprova d'immmediat substituint $x = x_0$ en (38).

DEFINICIÓ 1.12 (Algorisme de Picard). Sigui $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, amb Ω un obert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ i $(x_0, Y_0) \in \Omega$. Es defineix l'algorisme de Picard a un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, mitjançant:

$$\begin{aligned} Y_0(x) &\equiv Y_0, \\ Y_n(x) &= Y_0 + \int_{x_0}^x F(s, Y_{n-1}(s)) \, ds, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (39)$$

per $x \in I$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Les funcions Y_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ donades per aquest algorisme s'anomenen *iterats de Picard*.

REMARCA 1.15. Convé precisar que, perquè l'algorisme (39) estigui *ben definit* cal $(x, Y_n(x)) \in \Omega$ per qualsevol $x \in I$ (ja que s'ha de verificar $(s, Y(s)) \in \Omega$ per $s : |s - x_0| \leq |x - x_0|$ amb $x \in I$) i tota $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Aquesta condició es comprovarà explícitament a la demostració del teorema 1.7 que donem a continuació.

DEMOSTRACIÓ (DEL TEOREMA D'EXISTÈNCIA I UNICITAT DE SOLUCIONS LOCALS). Estructurarem la prova del teorema 1.7 en tres passos:

- (1) L'algorisme (39) està ben definit, segons es precisa a la remarca 1.15 de dalt. De manera més precisa, comprovarem que cadascuna de les funcions Y_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ donades per (39) està definida i és contínua en $I_{x_0} = [x_0 - a, x_0 + a]$ i que per tot x en aquest interval i tota $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, és: $(x, Y_n(x)) \in D_r(x_0, Y_0)$.
- (2) Que $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ convergeix uniformement sobre I_{x_0} a una solució, Y , definida en el mateix interval, de l'equació integral (38).
- (3) Que la solució (local) obtinguda d'aquesta manera és única: en altres paraules, que si $\tilde{Y}(x)$ és una altra solució de (38) en I_a , llavors necessàriament $\tilde{Y}(x) = Y(x)$, per tot $x \in I_{x_0}$.

El primer punt el provarem per inducció: és cert per $n = 0$, doncs $(x, Y_0(x)) = (x, Y_0)$ $x \in I_{x_0} \Rightarrow \|(x - x_0, Y_0(x) - Y_0)\| = \|(x - x_0, 0)\| = |x - x_0| \leq a \leq r/2 \leq r$. Ara, si suposem que es satisfà per $n > 0$ enter arbitrari:

$$\|Y_{n+1}(x) - Y_0\| = \left\| \int_{x_0}^x F(s, Y_n(x)) ds \right\| \leq \left| \int_{x_0}^x \|F(s, Y_n(x))\| ds \right| \leq M|x - x_0|$$

i segons es van definir a i I_{x_0} a l'enunciat del teorema 1.7: $x \in I_{x_0}$ implica $|x - x_0| \leq a \leq \min \left\{ \frac{r}{2}, \frac{r}{2M} \right\}$, d'on:

$$\begin{aligned} \|(x - x_0, Y_{n+1}(x) - Y_0)\| &\leq |x - x_0| + \|Y_{n+1} - Y_0\| \\ &\leq |x - x_0| + M|x - x_0| \leq \frac{r}{2} + M \frac{r}{2M} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \end{aligned}$$

□

Equacions amb Coeficients Variables

En parlar de les equacions lineals i homogènies, ja vàrem apuntar que no hi ha cap mètode general que ens permeti trobar les seves solucions en termes de funcions elementals o d'integrals de funcions elementals. Això només el podíem fer si ens restringíem al cas de coeficients constants, o bé per alguns tipus molt específics d'equacions a coeficients variables, com són ara les de Cauchy–Euler. En aquest capítol estudiarem les equacions lineals de segon ordre homogènies:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (40)$$

i buscarem les seves solucions en forma de sèries de potències (s. d. p.)

1. Solucions al voltant d'un punt ordinari

Suposarem que ens interessin les solucions al voltant d'un punt $x = x_0$, on les funcions $P(x)$ i $Q(x)$ de l'equació (40) són analítiques. Això vol dir, desenvolupables en sèries enteres de potències en $x = x_0$,

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n. \quad (41)$$

Podem intentar llavors trobar solucions $y(x)$ que siguin també analítiques en el mateix punt, i. e.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (42)$$

i trobar els coeficients a_n derivant la sèrie (42) i substituint-la a l'equació, comprovant, a posteriori que el seu radi de convergència és no nul. Mostrarem aquest procés amb un parell d'exemples:

EXEMPLE 4.1. Trobeu les solucions, per desenvolupament en s. d. p. a l'origen, de l'equació diferencial

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0 \quad (43)$$

(equació d'Hermite d'ordre α).

◁ **Solució.** Cerquem solucions de la forma (42) amb $x_0 = 0$. Si derivem la sèrie i la substituïm a (43):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\ & = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 2 \cdot \alpha \cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(\alpha - n)a_n] x^n = 0. \end{aligned}$$

I de la unicitat dels desenvolupaments en sèrie de potències se'n dedueixen les condicions:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\alpha a_0 \\ a_{n+2} &= -\frac{2(\alpha - n)}{(n+2)(n+1)} a_n \end{aligned} \quad (44)$$

(a_1, a_0 arbitraris, $n = 1, 2, 3, \dots$). Hem així arribat a una relació de recurrència, la qual ens forneix a_n un cop fixats a_0 i a_1 . A continuació escrivim els primers:

$$\begin{aligned} a_3 &= -2 \frac{(\alpha - 1)}{3 \cdot 2} a_1 \\ a_4 &= -2 \frac{(\alpha - 2)}{4 \cdot 3} a_2 = 2^2 \frac{\alpha(\alpha - 2)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a_0 \\ a_5 &= -2 \frac{(\alpha - 3)}{5 \cdot 4} a_3 = 2^2 \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 3)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a_1 \\ a_6 &= -2 \frac{(\alpha - 4)}{6 \cdot 5} a_4 = -2^3 \frac{\alpha(\alpha - 2)(\alpha - 4)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a_0 \\ a_7 &= -2 \frac{(\alpha - 5)}{7 \cdot 6} a_5 = -2^3 \frac{(\alpha - 5)(\alpha - 3)(\alpha - 1)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a_1 \\ a_8 &= -2 \frac{(\alpha - 6)}{8 \cdot 7} a_6 = 2^4 \frac{\alpha(\alpha - 2)(\alpha - 4)(\alpha - 6)}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a_0. \end{aligned}$$

D'on es segueix (inspecció més inducció) que:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^n \frac{2^n \alpha(\alpha - 2)(\alpha - 4) \cdots (\alpha - 2n + 2)}{(2n)!} a_0 \\ a_{2n+1} &= (-1)^n \frac{2^n (\alpha - 1)(\alpha - 3)(\alpha - 5) \cdots (\alpha - 2n + 1)}{(2n+1)!} a_1, \end{aligned}$$

amb $n = 1, 2, \dots$. Ara, si prenem $a_0 = 1, a_1 = 0$ o bé $a_0 = 0, a_1 = 1$, arribarem a un parell de solucions independents:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n \frac{\alpha(\alpha - 2)(\alpha - 4) \cdots (\alpha - 2n + 2)}{(2n)!} x^{2n} \\ y_2 &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 3)(\alpha - 5) \cdots (\alpha - 2n + 1)}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned} \quad (45)$$

A més, aquestes solucions no són només formals, donat que és fàcil comprovar que ambdues sèries són convergents per a tot $x \in \mathbb{R}$. Defineixen doncs, en tot \mathbb{R} un parell de funcions (les seves funcions suma), que són solucions independents de l'equació diferencial (44).

Quan α és un enter positiu, y_1 serà un polinomi de grau α si α és parell; mentre que si és senar, tots els coeficients dels termes de y_2 de grau més gran que α seran nuls, i y_2 quedarà reduïda a un polinomi de grau α . Es defineixen els *polinomis d'Hermite* de grau n , com la solució polinòmica de l'equació d'Hermite de d'ordre n (n enter), multiplicada per una constant que faci que el coeficient de x^n sigui 2^n . Es donen a la taula 1 els vuit primers polinomis d'Hermite. \triangleright

EXEMPLE 4.2. Busqueu les solucions, per desenvolupament en s. d. p. a $x = 0$, de l'equació:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \quad (46)$$

(equació de Legendre d'ordre α).

Polinomis d'Hermite	
$H_0(x) = 1$	$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$
$H_1(x) = 2x$	$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$
$H_2(x) = 4x^2 - 2$	$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$	$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$

Taula 1: vuit 1^{ers} polinomis d'Hermite

◁ **Solució.** L'equació de Legendre es presenta a l'estudi de fenòmens amb simetria esfèrica. Com abans, busquem solucions en forma de s. d. p. (42) en $x = 0$. Després de derivar, substituir a l'equació (46) i agrupar termes s'obté:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \\
& + \alpha(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \\
& - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \alpha(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\
& = \alpha(\alpha+1)a_0 + 2a_2 + [6a_3 + (\alpha-1)(\alpha+2)a_1] x + \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-\alpha)(n+\alpha+1)a_n] x^n = 0,
\end{aligned}$$

d'on resulten les condicions:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} a_0 \\
a_3 &= -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!} a_1 \\
a_{n+2} &= -\frac{(\alpha-n)(n+\alpha+1)}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad (n \geq 2)
\end{aligned} \tag{47}$$

l'última de les quals dóna la recurrència per a trobar tots els coeficients de la sèrie en funció de a_0 i a_1 . A tall d'exemple, escriurem fins al de grau set:

$$\begin{aligned}
a_4 &= -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a_0 \\
a_5 &= -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a_1 \\
a_6 &= -\frac{(\alpha-4)(\alpha+5)}{6 \cdot 5} a_4 = -\frac{(\alpha-4)(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a_0 \\
a_7 &= -\frac{(\alpha-5)(\alpha+6)}{7 \cdot 6} a_5 = -\frac{(\alpha-5)(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} a_1.
\end{aligned}$$

Els termes generals (com es pot provar per inducció) són:

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{(\alpha - 2n + 2)(\alpha - 2n + 4) \cdots \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + 2n - 1)}{(2n)!}$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(\alpha - 2n + 1)(\alpha - 2n + 3) \cdots (\alpha - 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + 2n)}{(2n + 1)!}.$$

Com exercici podeu comprovar que les dues sèries:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha - 2n + 2)(\alpha - 2n + 4) \cdots (\alpha + 2n - 1)}{(2n)!} x^{2n}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\alpha - 2n + 1)(\alpha - 2n + 3) \cdots (\alpha + 2n)}{(2n + 1)!} x^{2n+1},$$
(48)

(obtingudes fixant $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ i $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ respectivament), són convergents a l'interval $-1 < x < 1$. Com que a més, una d'elles és parella i l'altra senar, les seves funcions suma seran linealment independents; i ja hem arribat a les solucions que buscàvem.

Tanmateix, a partir de (48) ens adonem de què si l'ordre de l'equació de Legendre, α , és nul, positiu parell o negatiu senar, $y_1(x)$ es redueix a un polinomi, i si α és positiu senar o negatiu parell és un polinomi $y_2(x)$. Per a valors enters positius de α , si agafem a_0 i a_1 de manera convenient per tal que resultin $y_1(1) = 1$ i $y_2(1) = 1$, obtenim els *polinomis de Legendre*, alguns dels quals han estat escrits a la taula 2. \triangleright

Polinomis de Legendre	
$P_0(x) = 1$	$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_1(x) = x$	$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$

Taula 2: vuit 1^{ers} polinomis Legendre

DEFINICIÓ 4.1. Sigui l'equació diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{49}$$

$x = x_0$ és un **punt ordinari** de (49) si $P(x)$ i $Q(x)$ són analítiques en $x = x_0$. En altre cas direm que x_0 és un **punt singular** de l'equació diferencial.

TEOREMA 4.1. *Sigui $x = x_0$ un punt ordinari de l'equació diferencial (49). Aleshores aquesta té dues solucions linealment independents de la forma:*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{50}$$

essent el radi de convergència d'aquestes sèries no més petit que la distància de x_0 al punt singular **real o complex** més proper de l'equació diferencial. Els coeficients de les sèries (50) es poden determinar per substitució a l'equació (49).

EXEMPLE 4.3. Per a cadascuna de les funcions següents, determineu un valor mínim del radi de convergència d'una solució en sèrie de potències en torn als punts $x_0 = 0$ i $x_0 = 1$

- a. $2y'' + xy' + y = 0$
- b. $(1 + x^2)y'' - y' + y = 0$.

◁ **Solució.** Tot i que només ens interessen les solucions reals, debut a que el teorema diu que s'han de mirar les singularitats tant reals com complexes de l'equació, resulta molt útil considerar les funcions $P(x)$ i $Q(x)$ com definides al camp complex ($z \mapsto P(z)$, $z \mapsto Q(z)$ amb $z \in \mathbb{C}$). Així al primer apartat: $P(z) = z/2$, $Q(z) = 1/2$, que són funcions elementalment derivables a tot el pla complex. L'equació diferencial no té doncs cap singularitat i les seves solucions en s. d. p. tant a $x_0 = 0$ com a $x_0 = 1$, seran convergents $\forall z \in \mathbb{C}$ i en conseqüència a tot \mathbb{R} . Al segon apartat però, les funcions $P(z) = -(1 + z^2)^{-1}$ i $Q(z) = (1 + z^2)^{-1}$ deixen de ser regulars a $z = \pm\sqrt{-1}$. Llavors, pels radis de convergència ρ_0, ρ_1 de les solucions al voltant de $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$ tindrem: $\rho_0 \geq 1$ i $\rho_1 \geq \sqrt{2}$. ▷

EXEMPLE 4.4. Busqueu les solucions, pel mètode dels desenvolupaments en sèrie a l'origen de l'equació diferencial,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad \nu > 0 \quad (51)$$

(equació diferencial de Bessel d'ordre ν).

◁ **Solució.** Fent com als exemples anteriors, suposant una solució en s. d. p. a $x = 0$, de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, derivant i substituint a (51) s'obté, un cop agrupats els termes:

$$-\nu^2 a_0 + (1 - \nu^2) a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2 - \nu^2) a_n + a_{n-2}] x^n = 0,$$

d'on, per la condició d'igualtat de sèries caldrà:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_n = \frac{a_{n-2}}{n^2 - \nu^2}. \quad (52)$$

Però aquestes tres relacions porten recursivament a $a_n = 0$ per $n = 0, 1, 2, \dots$. O sigui: $y(x) = 0 \forall x$. És a dir, el mètode del desenvolupament en s. d. p. només duu cap a una solució: la solució trivial! ▷

De fet, observem que per a l'equació (51) és té: $P(x) = 1/x$ i $Q(x) = 1 - \nu^2/x^2$, cap d'elles analítica a $x = 0$. Segons s'ha definit, queda clar que $x = 0$ és un *punt singular* de l'equació de Bessel. Fallen, per tant, les hipòtesis del teorema 4.1. A la secció següent veurem que, si la singularitat no és "massa dolenta", encara es podrà obtenir almenys una solució en s. d. p. (tot i que, en general, ja no serà una serie de potències sencera).

2. Solucions al voltant de punts singulars regulars

Començarem definint què entendrem per *punt singular regular*.

DEFINICIÓ 4.2. El punt $x = x_0$ és un punt **singular regular** de l'equació (49) si les funcions $(x - x_0)P(x)$ i $(x - x_0)^2Q(x)$ són analítiques a $x = x_0$. A qualsevol altre cas direm que el punt singular és **irregular**.

El *mètode de Frobenius* consisteix en buscar solucions de l'equació (49) com sèries de potències de la forma:

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (53)$$

essent x_0 un punt singular regular. Es tractaria de derivar (53) i substituir a (49) per tractar d'obtenir alguna fórmula recursiva que em donés els coeficients; tal com femem al cas dels punts ordinaris. Sorgeix així, de forma ben natural, l'anomenada *equació indicial* o *dels índexs*.

2.1. Equació dels índexs. Sigui x_0 punt singular regular de l'equació (49). Aleshores:

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^{n-1} \\ Q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^{n-2}. \end{aligned} \quad (54)$$

Suposem que una solució de (49) és de la forma (53). Provarem de substituir aquesta i les seves derivades a l'equació, fent el producte de Cauchy a la regió comuna de convergència de les sèries:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)(n + \alpha - 1)a_n (x - x_0)^{n+\alpha-2} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} (k + \alpha)a_k (x - x_0)^{k+\alpha-1} \sum_{m=0}^{\infty} p_m (x - x_0)^{m-1} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} q_m (x - x_0)^{m-2} = \{k + m = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \alpha)(n + \alpha - 1)a_n (x - x_0)^{n+\alpha-2} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n [(k + \alpha)p_{n-k} + q_{n-k}] a_k (x - x_0)^{n+\alpha-2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n + \alpha)(n + \alpha - 1)a_n + \sum_{k=0}^n [(k + \alpha)p_{n-k} + q_{n-k}] a_k \right\} (x - x_0)^{n+\alpha-2}, \end{aligned}$$

i igualant coeficients, hom obté:

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= 0, \\ \Phi(n + \alpha) a_n &= - \sum_{k=0}^{n-1} [(k + \alpha)p_{n-k} + q_{n-k}] a_k, \end{aligned} \quad (55)$$

($n = 1, 2, \dots$). On s'ha definit: $\Phi(\alpha) := \alpha(\alpha - 1) + \alpha p_0 + q_0$. De la primera de les equacions de (55), $\Phi(\alpha) = 0$ —l'equació del índexs—, surten els possibles valors de l'exponent α (veure discussió del teorema 4.2 més avall); mentre que de la segona n'obtenim la relació de recurrència per calcular els coeficients a_1, a_2, \dots

A l'equació de Bessel eren, recoredem-ho $P(x) = 1/x$ i $Q(x) = 1 - \nu^2/x^2$. Així doncs, $x = 0$ és un punt singular regular. Mirem ara de trobar solucions aplicant el mètode de Frobenius. Tenim, per aplicació de (55), que l'equació dels índexs és:

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \nu^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \nu^2 = 0 \quad (56)$$

i també de la segona fórmula de (55):¹

$$\begin{aligned} [(1 + \alpha)^2 - \nu^2] a_1 &= 0, & (n = 1) \\ [(n + \alpha)^2 - \nu^2] a_n &= -a_{n-2} & (n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (57)$$

Les arrels de l'equació dels índexs (56), són $\alpha = \pm\nu$. Si, per exemple, ν no és cap enter, la primera de les equacions d'adalt es satisfà si i només si $a_1 = 0$, en tant que de la segona, es té:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n + \nu)^2 - \nu^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n + 2\nu)}. \quad (58)$$

Per a $n = 2, 3, \dots$. Com sempre, escrivim explícitament els primers termes:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-a_0}{2(2 + 2\nu)} = \frac{-a_0}{2^2 \cdot 1 \cdot (1 + \nu)} \\ a_4 &= \frac{-a_2}{4(4 + 4\nu)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1 + \nu)(2 + \nu)} \\ a_6 &= \frac{-a_4}{6(6 + 2\nu)} = \frac{-a_0}{2^6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1 + \nu)(2 + \nu)(3 + \nu)} \\ a_8 &= \frac{-a_6}{8(8 + 2\nu)} = \frac{a_0}{2^8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1 + \nu)(2 + \nu)(3 + \nu)(4 + \nu)} \end{aligned}$$

(com que a_1 és zero, els coeficients dels termes senars són tots nuls, i ja no els posem). Observant l'aspecte d'aquets primers a_{2n} , es pot inferir que per a qualsevol $n = 1, 2, \dots$ serà:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 3) \cdots (\nu + n)}, \quad (59)$$

com pot, *a posteriori*, comprovar-se per inducció. S'acostuma a agafar: $a_0 = 2^{-\nu}/\Gamma(1 + \nu)$, on la Γ denota la funció gamma d'Euler [5]. La solució en s. d. p. de l'equació de Bessel, que denotarem per $J_\nu(x)$, és doncs:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \quad (60)$$

Si fem a continuació, el mateix però amb l'altra arrel de l'equació dels índexs, $\alpha = -\nu$ agafant ara $a_0 = 2^{-\nu}/\Gamma(-\nu + 1)$, $a_1 = 0$, s'obté una segona solució de l'equació de Bessel, la $J_{-\nu}(x)$:

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(-\nu + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad (61)$$

la qual surt directament —sense necessitat de tornar a fer els càlculs—, substituint ν per $-\nu$ a $J_\nu(x)$. Les funcions suma $J_\nu(x)$ i $J_{-\nu}(x)$ d'adalt s'anomenen *funcions de Bessel de*

¹S'ha de tenir em compte que, en aquest c. p. és: $p_0 = 1$, $p_n = 0$, per a $n = 1, 2, \dots$; $q_0 = \nu^2$, $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ i $q_m = 0$, per a $m = 3, 4, \dots$

primera espècie d'orde ν . Les sèries senceres de (60) i (61) tenen radi de convergència infinit. En efecte, per a la primera sèrie tenim:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} \right| &= \frac{n!\Gamma(\nu+n+1)}{(n+1)!\Gamma(\nu+n+1+1)} = \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{(n+1)(n+\nu+1)\Gamma(n+\nu+1)} = \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+\nu+1)} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quan n tendeix cap a infinit. Anàlogament per a l'altra.

2.2. Observacions.

NOTA 1. Si, com es suposa a l'exemple 4.4, ν no és enter, aleshores cap denominador s'anul·la i, tal com s'ha fet adalt, obtenim dues solucions que seran (proveu-ho com exercici) linealment independents. Per tant, la solució general vindrà donada per una combinació lineal:

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

amb c_1, c_2 constants arbitràries.

NOTA 2. Si $\nu = 0$, totes dues solucions coincideixen:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

(funció de Bessel d'ordre 0).

NOTA 3. Finalment, si ν és enter, existeix una relació molt senzilla entre J_ν i $J_{-\nu}$. En efecte, si escrivim explícitament les relacions de recurrència (57) per a $\alpha = -\nu$, enter negatiu; tindrem, d'una banda, que cal que el coeficient de grau 1, que ara anomeno b_1 , sigui nul ($b_1 = 0$) i —per la segona equació de (57)—, tenim:

$$n(n-2\nu)b_n = -b_{n-2}. \quad (62)$$

Així, tots els coeficients de grau senar seran nuls i a més, per $n = 2\nu$ s'haurà de satisfer:

$$0 \cdot b_{2\nu} = -b_{2\nu-2} \Rightarrow b_{2\nu-2} = b_{2\nu-4} = \dots = b_2 = b_0 = 0,$$

d'on es pot agafar un $b_{2\nu}$ arbitrari. Aleshores, posant $n = 2\nu + k$ amb $k \geq 1$, la recurrència (62) pren la forma:

$$(2\nu+k)k b_{2\nu+k} = -b_{2\nu+k-2}. \quad (63)$$

D'on, d'entrada s'observa que $b_{2\nu+2k+1} = 0$, però (63) és bàsicament la fórmula recursiva (58). Així, com allà, es dedueix d'immediat que:

$$\begin{aligned} b_{2\nu+2k+1} &= 0, \quad (k \geq 0) \\ b_{2\nu+2k} &= \frac{(-1)^k b_{2\nu}}{2^{2k} k! (1+\nu)(2+\nu) \dots (k+\nu)}, \quad (k \geq 1). \end{aligned} \quad (64)$$

Hem arribat a una "segona" solució de l'equació de Bessel que serà:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= b_{2\nu} x^{-\nu} \left(x^{2\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (1+\nu)(2+\nu) \dots (k+\nu)} x^{2\nu+2k} \right) = \\ &= b_{2\nu} \Gamma(1+\nu) 2^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \\ &= b_{2\nu} \Gamma(1+\nu) 2^\nu J_\nu(x), \end{aligned}$$

$\alpha = 3/2$	$\alpha = 0$
$a_2 = -\frac{1}{7 \cdot 2}$	$a_2 = -\frac{1}{2 \cdot 1}$
$a_4 = \frac{1}{11 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}$	$a_4 = \frac{1}{5 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}$
$a_6 = -\frac{1}{15 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}$	$a_6 = -\frac{1}{9 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}$
\vdots	\vdots
$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(4n+3)(4n-1) \cdots 7 \cdot (2n)!!}$	$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(4n-3)(4n-7) \cdots 1 \cdot (2n)!!}$

Taula 3: Primers coeficients i termes generals de l'exemple 4.5, per a $\alpha = 3/2$ i per a $\alpha = 0$, havent agafat $a_0 = 1$ en ambdós casos. Els coeficients senars són tots zero, car $a_1 = 0$.

...per tant, el mètode de Frobenius, quan l'ordre de l'equació de Bessel és enter, només ens proporciona una solució: la corresponent a l'arrel més gran de l'equació dels índexs. L'altra arrel no afegeix cap solució linealment independent amb la primera.

Acavem aquesta secció amb un altre exemple d'aplicació del mètode de Frobenius.

EXEMPLE 4.5 (Problema 4.22). Useu el mètode de Frobenius en el punt $x = 1$ per trobar la solució general de l'equació no homogènia:

$$2(x-1)y'' - y'' + (x-1)y = 1-x$$

◁ **Solució.** Per inspecció es veu de seguida que la funció constant $y(x) \equiv -1$ és una solució particular. Així, només queda per resoldre l'homogènia associada. El punt $x = 1$ és (comproveu-ho), un punt singular regular. Suposarem docs solucions de la forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+\alpha}$. En el nostre cas, com que $p_0 = -1/2$ i $q_0 = 0$, l'equació dels índexs, $\Phi(\alpha) = 0$, queda:

$$\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha = 0$$

que té per arrels $\alpha_1 = 3/2$ i $\alpha = 0$. Aplicant (55), tenim que per a $n = 1$ és:

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)(1+\alpha)a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0,$$

(tant per $\alpha = 3/2$ com per $\alpha = 0$), i quan $n > 1$:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+\alpha)(2n+2\alpha-3)},$$

relació de recurrència amb la qual es calculen els coeficients (veure taula 2.2). Tenim, d'aquesta manera, dues solucions independents de l'homogènia:

$$y_1(x) = (x-1)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(4n-1) \cdots 7 \cdot (2n)!!} (x-1)^{2n} \right]$$

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n-3)(4n-7) \cdots 1 \cdot (2n)!!} (x-1)^{2n}.$$

Com exercici, calculeu els radis de convergència de les s. d. p. a $y_1(x)$, $y_2(x)$ i comproveu que són no nuls. Comproveu també que les dues solucions trobades són linealment independents.

Ara que ja tenim un parell de solucions independents i una solució particular, la solució general podem expressar-la com:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) - 1,$$

(c_1, c_2 constants arbitràries).

Amb aquests dos últims exemples, ha quedat ben palès que el mètode de Frobenius aporta sempre una solució al voltant de punts singulars regulars. Fins i tot en alguns casos (com ara a l'exemple 4.5 o per a l'equació de Bessel quan l'ordre no és enter), també dóna les segones solucions. A la propera secció estudiarem què ens porta cap a una situació (només una solució) o cap a l'altra (totes dues solucions).

3. Anàlisi de les fòrmules de recurrència. Teorema de Fuchs

Siguin α_1, α_2 les dues solucions de l'equació dels índexs amb $\alpha_1 \geq \alpha_2$. hi ha tres casos possibles:

- (1) $s = \alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{N}$
- (2) $s = \alpha_1 - \alpha_2 = 0$
- (3) $s = \alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{N}$.

Al cas 1, si $s = \alpha_1 - \alpha_2$ no és cap enter, veiem a partir de (55) que no hi ha cap a l'hora d'obtenir els coeficients successius de les sèries. En efecte, ja que si triem $\alpha = \alpha_1$ és $\Phi(n + \alpha_1) = n(n + s)$ i si $\alpha = \alpha_2$, $\Phi(n + \alpha_2) = n(n - s)$, que mai no s'anul·len si s no és enter.²

Si, d'altra banda, $\alpha_1 = \alpha_2$ (cas 2), és evident que el mètode de Frobenius només ens podrà proporcionar una solució. L'últim cas, 3, requereix una mica més de discussió: si s és un enter diferent de zero ($s \in \mathbb{N}, s \neq 0$) podem, com abans, calcular tots els coeficients derivats de l'arrel més gran de l'equació dels índexs (α_1), perquè $\Phi(n + \alpha_1) = n(n + s) \neq 0$ per a qualsevol $n = 1, 2, 3, \dots$. Quan intentem, però, el mateix amb l'índex α_2 , ens adonem de què: $\Phi(n + \alpha_2) = n(n - s)$, i això s'anul·la per a $n = s$. Malgrat tot, si encara es satisfà l'equació:

$$\sum_{k=0}^{s-1} [(k + \alpha_2)p_{s-k} + q_{s-k}] a_k \equiv 0, \quad (65)$$

per a $a_0 \neq 0$; tampoc no hi ha cap problema: deixariem a_0 i a_s com constants arbitràries i continuariem calculant els coeficients a_n posteriors a a_s ($\Phi(n + \alpha) = n(n - s)$ no s'anul·la ja mai quan $s > n$).

EXEMPLE 4.6. Determineu les solucions en s. d. p. al voltant de $x = 0$ de

$$x^2 y'' + (6x + x^2) y' + xy = 0$$

◁ **Solució.** El punt $x = 0$ és, com es pot veure, un punt singular regular de l'equació diferencial. Cerquem així solucions en s. d. p. del tipus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$. Aplicant les relacions (55) s'obté primer l'equació dels índexs:

$$\alpha^2 + 5\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = -5$$

²Restarien pendents les qüestions sobre la independència lineal (fàcil) i de la convergència de les sèries —i. e. veure que el radi de convergència de les sèries enteres que aparèixen a $y_1(x), y_2(x)$ és no nul—, aquest últim punt és una mica més difícil de provar. Consulteu, per exemple [9].

i després l'equació que han de satisfer els coeficients de les solucions:

$$(n + \alpha)(n + \alpha + 5)a_n = (n + \alpha)a_{n-1} \quad (66)$$

(amb $n = 1, 2, 3, \dots$). D'aquesta última equació, prenent $\alpha = \alpha_1 = 0$ s'obté la fórmula de recurrència:

$$n(n + 5)a_n = -na_{n-1} \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{n + 5}$$

($n(n + 5)$ no s'anul·la per a cap valor de n). S'obtenen els termes:

$$a_1 = -\frac{a_0}{6}, \quad a_2 = \frac{a_0}{6 \cdot 7}, \quad a_3 = -\frac{a_0}{6 \cdot 7 \cdot 8}, \dots, \quad a_n = (-1)^n \frac{5!a_0}{(n + 5)!}$$

(com es comprova per inducció). Així, si fixem, per exemple $a_0 = 1$, arribem a la solució:

$$y_1(x) = 1 + 120 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + 5)!} x^n$$

Si ara considrem la segona arrel, $\alpha_2 = -5$, la corresponent relació de recurrència veiem que és:

$$n(n - 5)a_n = -(n - 5)a_{n-1},$$

i els cinc primers coeficients seran:

$$a_1 = -a_0, \quad a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_0}{6}, \quad a_4 = \frac{a_0}{24}.$$

Ara bé, per a $n = 5$, és $0 \cdot a_5 = 0$. Podem doncs considerar a_5 com una constant arbitrària (i. e. com a_0), i continuar amb el càlcul dels coeficients...

$$a_6 = -\frac{a_5}{6}, \quad a_7 = -\frac{a_5}{7 \cdot 6}, \quad a_8 = -\frac{a_5}{8 \cdot 7 \cdot 6}, \dots, \quad a_n = (-1)^{n+1} \frac{5!a_5}{n!},$$

per a $n = 6, 7, \dots$. I ja tenim l'altra solució:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0 x^{-5} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) + a_5 x^{-5} \left(x^5 - 120 \sum_{n=6}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) \\ &= a_0 x^{-5} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right) + a_5 \left(1 + 120 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n + 5)!} \right), \end{aligned}$$

$y_2(x)$ depèn de dues constants arbitràries, a_0 i a_5 , de manera que ja és la solució general. En concret, per $a_0 = 0$ i $a_5 = 1$, recuperem la solució $y_1(x)$ d'abans. \triangleright

NOTA 4. De fet, sempre que $\alpha_1 - \alpha_2 = s \in \mathbb{N}$, si a la fórmula (55) prenem $a_0 = 0$ i $a_s \neq 0$ no fem altra cosa que recuperar la primera solució, $y_1(x)$. Per veure-ho, escriurem (55) per a $n = s + k$, amb $k = 1, 2, \dots$

$$(s + k)ka_{s+k} = - \sum_{l=s}^{s+k-1} [(l + \alpha_2)p_{s+k-l} + q_{s+k-l}] a_l,$$

redefinim $b_k = a_{s+k}$ i la fórmula d'adalt, si es té en compte que $\alpha_2 = \alpha_1 - s$ queda:

$$\begin{aligned} (s + k)kb_k &= - \sum_{l=s}^{s+k-1} [(l + \alpha_1 - s)p_{s+k-l} + q_{s+k-l}] b_{l-s} \\ &\stackrel{j=l-s}{=} - \sum_{j=0}^{k-1} [(j + \alpha_1)p_{k-j} + q_{k-j}] b_j. \end{aligned}$$

On, com s'indica, s'ha fet el desplaçament d'índexos: $j = l - s$. Però aquesta no és altra que la mateixa fórmula (55). Això explica el que ens passava en trobar les solucions de l'equació de Bessel per a ν enter i també la "recuperació" de la primera de les solucions a l'últim exemple 4.6.

Si l'equació (65) no se satisfà per a $n = s$, és a dir, si:

$$\sum_{k=0}^{s-1} [(k + \alpha_2)p_{n-k} + q_{n-k}] a_k = 0 \Rightarrow a_0 = 0,$$

no trobarem altra solució més que la ja coneguda (veure nota 4), i així, com al cas d'índexs iguals, haurem de trobar una segona solució linealment independent, per exemple, pel mètode de reducció del l'ordre...

EXEMPLE 4.7. Resoleu $x^2 y'' - xy' + (x^2 - 8)y = 0$ per Frobenius en torn a $x = 0$, calculant la segona solució linealment independent pel mètode de reducció de l'ordre

◁ **Solució.** $x = 0$ és un punt singular regular de l'equació. $P(x) = -1/x$, $Q(x) = 1 - 8/x^2$, així que: $p_0 = -1$, $p_n = 0$ per a $n = 1, 2, \dots$ i $q_0 = -8$, $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, $q_n = 0$ per a $n = 3, 4, \dots$. L'equació dels índexs queda llavors:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0,$$

que té per arrels $\alpha_1 = 4$ i $\alpha_2 = -2$. Per tant: $s = \alpha_1 - \alpha_2 = 6 \in \mathbb{N}$. Es comprova d'immediat, que la segona de les equacions de (55), pren en aquest cas, la forma:

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - 9)a_1 &= 0 \\ [(n + \alpha)(n + \alpha - 2) - 8] a_n &= -a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{67}$$

d'on resulta $a_1 = 0$, i tots els coeficients senars seran nuls. Si agafem l'arrel més gran. $\alpha_1 = 4$, la relació de recurrència que se'n dedueix de la segona de les equacions d'adalt és:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+6)},$$

a partir de la qual es poden calcular els coeficients:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{8 \cdot 2} = \frac{-a_0}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{-6a_0}{2^2 \cdot 4! \cdot 2!} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{10 \cdot 4} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6a_0}{2^4 \cdot 5! \cdot 2!} \\ a_6 &= -\frac{a_4}{12 \cdot 6} = \frac{-a_0}{2^6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{-6a_0}{2^6 \cdot 6! \cdot 3!} \\ a_8 &= -\frac{a_6}{14 \cdot 8} = \frac{a_0}{2^8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6a_0}{2^8 \cdot 7! \cdot 4!} \\ &\vdots \\ a_{2n} &= \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (n+3)!}, \end{aligned}$$

(que efectivament aquest és el terme general, es comprova per inducció). La primera solució de l'equació diferencial serà, prenent $a_0 = 1$,

$$y_1(x) = x^4 \left(1 + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (n+3)!} x^{2n} \right).$$

Per a l'altra arrel de l'equació dels índexs: $\alpha_2 = -2$, la fórmula (67), quan $n = 6 (= s)$, queda: $0 \cdot a_6 = -a_4$ i a_4 no serà nul a menys que $a_0 = 0$. El mètode de Frobenius, en aquest cas, porta només cap a una solució. Per a construir-ne una segona de linealment independent, aplicarem la fórmula de reducció de l'ordre:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp \left\{ - \int P(x) dx \right\}}{y_1^2(x)} dx. \quad (68)$$

Així tindrem, si desenvolupem primer la integral (apuntem explícitament els càlculs):

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^{-8} \exp \left\{ - \int P(x) dx \right\}}{\left(1 - \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{640} - \frac{x^6}{46080} + \frac{x^8}{5160960} - \frac{x^{10}}{825753600} + \frac{x^{12}}{178362777600} - \dots \right)^2} dx = \\ &= \int \frac{x^{-7} dx}{\left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{9x^4}{1280} - \frac{11x^6}{46080} + \frac{143x^8}{25804800} - \frac{13x^{10}}{137625600} + \frac{221x^{12}}{178362777600} - \dots \right)} \\ &= \int x^{-7} \left(1 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{11}{1280}x^4 + \frac{1}{2304}x^6 + \frac{1871}{103219200}x^8 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{551}{825753600}x^{10} + \frac{80303}{356725552000}x^{12} + \dots \right) dx = \\ &= \int \left(x^{-7} + \frac{1}{8}x^{-5} + \frac{11}{1280}x^{-3} + \frac{1}{2304}x^{-1} + \frac{1871}{103219200}x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{551}{825753600}x^3 + \frac{80303}{356725552000}x^5 + \dots \right) dx = \\ &= \frac{\ln x}{2304} - \frac{1}{6}x^{-6} - \frac{1}{32}x^{-4} - \frac{11}{2560}x^{-2} + \frac{1871}{206438400}x^2 + \frac{551}{3303014400}x^4 + \\ &\quad + \frac{80303}{21403533312000}x^6 + \dots \end{aligned}$$

Si ara multipliquem per $y_1(x)$:

$$y_1(x) = x^4 \left(1 - \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{640} - \frac{x^6}{46080} + \frac{x^8}{5160960} - \frac{x^{10}}{825753600} + \frac{x^{12}}{178362777600} - \dots \right),$$

obtenim, finalment, que la segona solució és:

$$y_2(x) = \frac{1}{2304}y_1(x) \ln x + x^{-2} \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{48}x^2 - \frac{1}{384}x^4 + \frac{247}{1105920}x^6 + \dots \right).$$

Notem que és de la forma: $cy_1(x) \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$. Veure el teorema (4.3) més endavant. \triangleright

El següent teorema formalitza part del que hem vist fins ara, alhora que garanteix la convergència de les sèries obtingudes.

TEOREMA 4.2 (Teorema de Fuchs). *Suposem que x_0 és un punt singular regular de l'equació diferencial (49). Sigui ρ el més petit dels radis de convergència de les sèries (54); α_1, α_2 les dues arrels de l'equació dels índexs, $\Phi(\alpha) = 0$, amb $\alpha_1 \geq \alpha_2$ i $s = \alpha_1 - \alpha_2$. Llavors:*

- (1) Per a $x > x_0$ existeix una solució de l'equació (49) de la forma (53) corresponent a l'arrel α_1 .
- (2) Si s no és zero ni cap altre enter, aleshores per $x > x_0$ existeix una segona solució linealment independent del tipus (53) per a $\alpha = \alpha_2$.

Els radis de convergència de les s. d. p. no seran més petits que ρ . Els coeficients d'aquestes sèries es poden determinar derivant i substituint a l'equació diferencial.

NOTA 5. Al llarg d'aquests apunts ens restringirem al cas en què les arrels α_1 i α_2 són reals. En cas de que siguin complexes conjugades, es pot demostrar que també existeixen dues solucions en s. d. p. linealment independents. A més, tant als exemples que el precedeixen com al teorema 4.2, hem considerat solucions només per a $x > x_0$. Un cop s'han obtingudes aquestes, tan sols s'ha de substituir x^{α_i} per $|x - x_0|^{\alpha_i}$ per a obtenir les solucions quan $x < x_0$.

La discussió d'aquells casos especials ($s = \alpha_1 - \alpha_2$ enter), on el mètode de Frobenius només ens forneix d'una solució, és el que es durà a terme a la secció següent.

4. Estudi dels casos especials: $s \in \mathbb{Z}$

Tal com a vàrem fer amb un cas particular a l'exemple 4.7, aplicarem el mètode de reducció de l'ordre per a obtenir segones solucions per a $x > x_0$ quan s és un enter. Recorden que es feia servir la fórmula (68). Abans però, cal desenvolupar en sèrie:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \int P(x) dx \right\} &= \exp \left\{ - \int \left(\frac{p_0}{x - x_0} + p_1 + p_2(x - x_0) + p_3(x - x_0)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + p_4(x - x_0)^4 + \dots + p_n(x - x_0)^n + \dots \right) dx \right\} = \\ &= (x - x_0)^{-p_0} \left\{ 1 + \gamma_1(x - x_0) + \gamma_2(x - x_0)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_3(x - x_0)^3 + \dots + \gamma_n(x - x_0)^n + \dots \right\}, \\ y_1^2(x) &= (x - x_0)^{2\alpha_1} \left[1 + \beta_1(x - x_0) + \beta_2(x - x_0)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \beta_n(x - x_0)^n + \dots \right], \end{aligned}$$

On s'ha suposat que hem pres $a_0 = 1$ en l'obtenció de $y_1(x)$. Per tant:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{(x - x_0)^{-p_0} [1 + \gamma_1(x - x_0) + \dots + \gamma_n(x - x_0)^n + \dots]}{(x - x_0)^{2\alpha_1} [1 + \beta_1(x - x_0) + \dots + \beta_n(x - x_0)^n + \dots]} dx$$

i tenint en compte que $-p_0 - 2\alpha_1 = -s - 1$ per què? ³, queda:

$$y_2(x) = y_1(x) \int (x - x_0)^{-s-1} (1 + \sigma_1(x - x_0) + \dots + \sigma_n(x - x_0)^n + \dots) dx, \quad (69)$$

per $x > x_0$, on s'ha fet servir el fet de que la inversa quant el producte d'una funció analítica és una funció analítica als punts on la funció no s'anul·la i que la composició de

³ $\alpha_1 - \alpha_2 = s$ i com que l'equació dels índexs és: $\alpha^2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0 = 0$, tinc: $\alpha_1 + \alpha_2 = -p_0 + 1$ de les dues equacions aïllant s , es té que $s = 2\alpha_1 + p_0 - 1$

funcions analítiques també és una funció analítica. Si s és enter i $s \neq 0$, de (69):

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x) \int \left[\frac{1}{(x-x_0)^{s+1}} + \frac{\sigma_1}{(x-x_0)^s} + \frac{\sigma_2}{(x-x_0)^{s-1}} + \dots \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma_s}{x-x_0} + \sigma_{s+1} + \sigma_{s+2}(x-x_0) + \dots + \sigma_{s+k}(x-x_0)^{k-1} + \dots \right] dx = \\
&= \sigma_s y_1(x) \ln(x-x_0) + y_1(x) \left\{ \frac{(x-x_0)^{-s}}{-s} + \sigma_1 \frac{(x-x_0)^{-s+1}}{-s+1} + \dots \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{s+k} \frac{(x-x_0)^k}{k} + \dots \right\} = \\
&= \sigma_s y_1(x) \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{\alpha_1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right\} (x-x_0)^{-s} \times \\
&\quad \times \left\{ -\frac{1}{s} + \sigma_1 \frac{x-x_0}{-s+1} + \dots \right\} = \\
&= \sigma_s y_1(x) \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n,
\end{aligned}$$

(ja que $\alpha_1 - s = \alpha_2$. Resumint, la forma general de la segona solució serà:

$$y_2(x) = \sigma y_1(x) \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n. \quad (70)$$

En el cas en què $\alpha_1 = \alpha_2$ raonant de manera semblant a partir de (69), es veu que ara, la forma de $y_2(x)$ vindrà donada per:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{\alpha_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n. \quad (71)$$

NOTA 6. En el nostre càlcul de les solucions (70) i (71) no hem dit res del radi de convergència de les s. d. p. que hi intervenen. Com a la nota 5, al final del teorema 4.2 (pàg. 39), enfaitzarem el fet de que $y_2(x)$ ha estat trobada per a $x > x_0$. Un cop obtinguda, només cal reemplaçar $(x-x_0)^{\alpha_2}$ per $|x-x_0|^{\alpha_2}$ i $\ln(x-x_0)$ per $\ln|x-x_0|$, per a obtenir les solucions corresponents a $x < x_0$.

El teorema que donem a continuació sense demostrar, resumeix l'anàlisi feta fins ara, a la vegada que estableix una acotació inferior per als radis de convergència.

TEOREMA 4.3. *Sigui $x = x_0$ un punt singular regular de l'equació (49). Anomenarem ρ al més petit dels radis de convergència de les sèries (54). Siguin α_1, α_2 , amb $\alpha_1 \geq \alpha_2$ les dues arrels de l'equació dels índexs, $\Phi(\alpha) = 0$. Aleshores:*

(1) *Si $\alpha_1 = \alpha_2$, llavors (49) té dues solucions, $y_1(x)$ i $y_2(x)$ de la forma:*

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= (x-x_0)^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad (a_0 \neq 0) \\
y_2(x) &= y_1(x) \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{\alpha_2+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n,
\end{aligned} \quad (72)$$

per a $x > x_0$.

(2) Si $\alpha_1 - \alpha_2 = N$ enter positiu, (49) té dues solucions $y_1(x)$, $y_2(x)$, les quals vénen donades per:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (x - x_0)^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (a_0 \neq 0) \\ y_2(x) &= \sigma y_1(x) \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \end{aligned} \quad (73)$$

per a $x > x_0$.

A la segona fórmula de (73), $b_0 \neq 0$, però σ pot ser igual a zero, de manera que el logaritme pot no aparèixer. El radi de convergència de les s. d. p. no serà més petit que ρ . Els coeficients de les sèries i la constant σ es poden determinar per substitució directa de les sèries a l'equació (49). Pel que fa a les solucions per a $x < x_0$, veieu la nota 6 d'adalt.

Il·lustrarem el cas $\alpha_1 = \alpha_2$ del teorema 4.3, trobant una segona solució de l'equació Bessel d'ordre zero [$\nu = 0$ a (51)].

EXEMPLE 4.8. Trobeu les solucions de l'equació diferencial:

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0, \quad (74)$$

al voltant de $x = 0$.

◁ **Solució.** La primera solució s'obté de (60), posant $\nu = 0$:

$$y_1(x) = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}.$$

Seguint el teorema 4.3, per a $x > 0$, buscarem una segona solució del tipus:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1}. \quad (75)$$

Derivem dos cops:

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= y_1'(x) \ln x + \frac{y_1(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^n \\ y_2''(x) &= y_1''(x) \ln x + \frac{2y_1'(x)}{x} - \frac{y_1(x)}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) n b_n x^{n-1} \end{aligned}$$

i substituïm $y_2(x)$ i les seves derivades a l'equació (74):

$$\begin{aligned}
& x^2 y_1'' \ln x + 2xy_1' - y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)nb_n x^{n+1} + xy_1' \ln x + y_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_n x^{n+1} \\
& + x^2 y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+3} = \\
& = (x^2 y_1'' + xy_1' + x^2 y_1) \ln x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)nb_n x^{n+1} \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)b_n x^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^{n+1} = \\
& = b_0 x + (4b_1 - 1)x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)^2 b_n + b_{n-2}] x^{n+1} \\
& = b_0 x + (4b_1 - 1)x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} [(2n-1)^2 b_{2n-2} + b_{2n-4}] x^{2n-1} + \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(2n)^2 b_{2n-1} + b_{2n-3} + \frac{(-1)^n 2^{2n} n}{2^{2n} (n!)^2} \right] x^{2n-1} = 0.
\end{aligned}$$

D'on es segueix que $b_0 = 0$, $b_1 = 1/4$ i que per a $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
(2n-1)^2 b_{2n-2} + b_{2n-4} & = 0 \\
(2n)^2 b_{2n-1} + b_{2n+3} + \frac{(-1)^n 2^{2n} n}{2^{2n} (n!)^2} & = 0.
\end{aligned} \tag{76}$$

De la primera tindrem que: $b_{2n} = 0$ per a $n = 0, 1, 2, \dots$, mentre que la segona ens proporcionarà, els coeficients de grau senar.

Relacions de recurrència no homogènies com la que apareix a (76) són típiques d'aquests casos "especials" del mètode de Frobenius. En general no es poden resoldre (en el sentit de trobar una expressió tancada que ens doni el coeficient b_n en funció de n). Tot i encara, provarem una expressió per a b_{2n-1} que sigui del tipus:

$$b_{2n-1} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} c_n,$$

substituïrem i tractarem "d'ajustar" c_n . Fent-ho queda:

$$\frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} c_n + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2 2^{2n-2} [(n-1)!]^2} c_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n 2^{2n} (n!)^2} = 0.$$

I després d'agrupar i simplificar es té:

$$c_n - c_{n-1} = -\frac{1}{n} \Rightarrow c_n = -\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right\}.$$

Així:

$$b_{2n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n} (n!)^2} \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De manera que com a segona solució de l'equació de Bessel, linealment independent amb $J_0(x)$, es pot prendre:

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right\} x^{2n}. \quad (77)$$

Com exercici, es pot comprovar que la sèrie de potències de (77) convergeix a tot \mathbb{R} . \triangleright

NOTA 7. La segona solució que s'acostuma a utilitzar és:

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \frac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2)y_1 + \frac{2}{\pi}y_2 \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right\} x^{2n}, \end{aligned}$$

om γ denota la constant d'Euler:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) - \ln n \right] = 0.57722\dots$$

Si, de manera semblant a com s'ha fet a l'exemple 4.8, busquem segones solucions de l'equació de Bessel quan l'ordre ν és un enter positiu, arribarem a les *funcions de Bessel de segona espècie*, l'expressió general de les quals vé donada per:

$$\begin{aligned} Y_\nu &= \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) J_\nu(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{\Gamma(\nu - n)}{\Gamma(n + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{-\nu+2n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\nu + n + 1)} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n + \nu} \right\} \left(\frac{x}{2} \right)^{\nu+2n}, \end{aligned}$$

on la gamma minúscula que hi apareix és la constant gamma d'Euler que ja ha estat definida al final de la nota 7, i la primera part del claudàtor $\{\dots\}$, $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ s'ha de suposar nul·la per a $n = 0$. A l'exemple 4.8, havíem calculat doncs, tret de constants, la funció de Bessel de segona espècie d'ordre zero.

Bibliografía

- [1] T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, 1991². Reverté. Barcelona.
- [2] V. I. Arnold, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, 1994. Rubiños, Madrid.
- [3] P. Henrici, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, 1962. John Wiley. New York.
- [4] E. Isaacson, H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, 1966. John Wiley & Sons. New York.
- [5] A. Nikiforov, V. Ouvarov, *Éléments de la théorie des fonctions spéciales*, 1976. Mir, Moscou.
- [6] S. Novo, R. Obaya, J. Rojo, *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales*, 1995. McGraw-Hill, Madrid.
- [7] J. Sotomayor, *Llições de Equações Diferenciais Ordinárias*, 1974. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil.
- [8] I. Stewart, *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*, 1997². Penguin, London.
- [9] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 1927. Cambridge University Press. Cambridge.