Capítol 4

Equacions amb Coeficients Variables

En parlar de les equacions lineals i homogènies, ja vàrem apuntar que no hi ha cap mètode general que ens permeti trobar les seves solucions en termes de funcions elementals o d'integrals de funcions elementals. Això només el podíem fer si ens restringíem al cas de coeficients constants, o bé per alguns tipus molt específics d'equacions a coeficients variables, com són ara les de Cauchy–Euler. En aquest capítol estudiarem les equacions lineals de segon ordre homogènies:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{4.1}$$

i buscarem les seves solucions en forma de sèries de potències (s. d. p.)

4.1 Solucions al voltant d'un punt ordinari

Suposarem que ens interessen les solucions al voltant d'un punt $x = x_0$, on les funcions $P(x)$ i $Q(x)$ de l'equació (4.1) són analítiques. Això vol dir, desenvolupables en sèries enteres de potències en $x = x_0$,

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(x - x_0\right)^n, \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \left(x - x_0\right)^n. \tag{4.2}$$

Podem intentar llavors trobar solucions $y(x)$ que siguin també analítiques en el mateix punt, i. e.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n \tag{4.3}$$

i trobar els coeficients a_n derivant la sèrie (4.3) i substuint-la a l'equació, comprovant, a posteriori que el seu radi de convergència és no nul. Mostrarem aquest procès amb un parell d'exemples:

Exemple 1. *Trobeu les solucions, per desenvolupament en s. d. p. a l'origen, de l'equació diferencial*

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0 \tag{4.4}$$

(equació d'Hermite d'ordre α).

◁ **Solució**. Cerquem solucions de la forma (4.3) amb $x_0 = 0$. Si derivem la sèrie i la subtituïm a (4.4):

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2\alpha\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\
&= 2\cdot 1\cdot a_2 + 2\cdot\alpha\cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(\alpha-n)a_n\right]x^n = 0.
\end{aligned}$$

I de la unicitat dels desenvolupaments en sèrie de potències se'n dedueixen les condicions:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\alpha a_0 \\
a_{n+2} &= -\frac{2(\alpha-n)}{(n+2)(n+1)}a_n
\end{aligned} \tag{4.5}$$

(a_1, a_0 arbitaris, $n = 1, 2, 3, \ldots$). Hem així arribat a una relació de recurrència, la qual ens forneix a_n un cop fixats a_0 i a_1. A continuació escrivim els primers:

$$\begin{aligned}
a_3 &= -2\,\frac{(\alpha-1)}{3\cdot 2}\,a_1 \\
a_4 &= -2\,\frac{(\alpha-2)}{4\cdot 3}\,a_2 = 2^2\,\frac{\alpha(\alpha-2)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,a_0 \\
a_5 &= -2\,\frac{(\alpha-3)}{5\cdot 4}\,a_3 = 2^2\,\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,a_1 \\
a_6 &= -2\,\frac{(\alpha-4)}{6\cdot 5}\,a_4 = -2^3\,\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,a_0 \\
a_7 &= -2\,\frac{(\alpha-5)}{7\cdot 6}\,a_5 = -2^3\,\frac{(\alpha-5)(\alpha-3)(\alpha-1)}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,a_1 \\
a_8 &= -2\,\frac{(\alpha-6)}{8\cdot 7}\,a_6 = 2^4\,\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)(\alpha-6)}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,a_0.
\end{aligned}$$

D'on es segueix (inspecció més inducció) que:

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= (-1)^n\,\frac{2^n\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\cdots(\alpha-2n+2)}{(2n)!}\,a_0 \\
a_{2n+1} &= (-1)^n\,\frac{2^n(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-5)\cdots(\alpha-2n+1)}{(2n+1)!}\,a_1,
\end{aligned}$$

amb $n = 1, 2\ldots$ Ara, si prenem $a_0 = 1, a_1 = 0$ o bé $a_0 = 0, a_1 = 1$, arribarem a un parell de solucions independents:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n\,\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\cdots(\alpha-2n+2)}{(2n)!}x^{2n} \\
y_2 &= x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n\,\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-5)\cdots(\alpha-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

A més, aquestes solucions no són només formals, donat que és fàcil comprovar que ambdues sèries són convergents per a tot $x \in \mathbb{R}$. Defineixen doncs, en tot $\mathbb{R}$ un parell de funcions (les seves funcions suma), que són solucions independents de l'equació difrencial (4.5).

Quan α és un enter positiu, y_1 serà un polinomi de grau α si α és parell; mentre que si és senar, tots els coeficients dels termes de y_2 de grau més gran que α seran nuls, i y_2 quedarà reduïda a un polinomi de grau α. Es defineixen els *polinomis d'Hermite* de grau n, com la solució polinómica de l'equació d'Hermite de d'ordre n (n enter), multiplicada per una constant que faci que el coeficient de x^n sigui 2^n. Es donen a la taula 4.1 els vuit primers polinomis d'Hermite. $\triangleright$

Polinomis d'Hermite	
$H_0(x) = 1$	$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$
$H_1(x) = 2x$	$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$
$H_2(x) = 4x^2 - 2$	$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$	$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$

Taula 4.1: vuit 1^{ers} polinomis d'Hermite

Exemple 2. *Busqueu les solucions, per desenvoupament en s. d. p. a $x = 0$, de l'equació:*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \tag{4.7}$$

(equació de Legendre d'ordre α).

$\triangleleft$ **Solució**. L'equació de Legendre es presenta a l'estudi de fenòmens amb simetria esfèrica. Com abans, busquem solucions en forma de s. d. p. (4.3) en $x = 0$. Després de derivar, subsituir a l'equació (4.7) i agrupar termes s'obté:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \\
+ \quad & \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \\
- \quad & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n + \alpha(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\
= \quad & \alpha(\alpha+1)a_0 + 2a_2 + \left[6a_3 + (\alpha-1)(\alpha+2)a_1\right]x + \\
+ \quad & \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-\alpha)(n+\alpha+1)a_n\right]x^n = 0,
\end{aligned}$$

d'on resulten les condicions:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}\,a_0 \\
a_3 &= -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}\,a_1 \\
a_{n+2} &= -\frac{(\alpha-n)(n+\alpha+1)}{(n+2)(n+1)}\,a_n, \quad (n \geq 2)
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

l'última de les quals dóna la recurrència per a trobar tots els coeficients de la sèrie en funció de a_0 i a_1. A tall d'exemple, escriurem fins al de grau set:

$$
\begin{aligned}
a_4 &= -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{4\cdot 3}\,a_2 = \frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,a_0 \\
a_5 &= -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{5\cdot 4}\,a_3 = \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,a_1 \\
a_6 &= -\frac{(\alpha-4)(\alpha+5)}{6\cdot 5}\,a_4 = -\frac{(\alpha-4)(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,a_0 \\
a_7 &= -\frac{(\alpha-5)(\alpha+6)}{7\cdot 6}\,a_5 = -\frac{(\alpha-5)(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,a_1.
\end{aligned}
$$

Els termes generals (com es pot provar per inducció) són:

$$
\begin{aligned}
a_{2n} &= (-1)^n\,\frac{(\alpha-2n+2)(\alpha-2n+4)\cdots\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+2n-1)}{(2n)!} \\
a_{2n+1} &= (-1)^n\,\frac{(\alpha-2n+1)(\alpha-2n+3)\cdots(\alpha-1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+2n)}{(2n+1)!}.
\end{aligned}
$$

Com exercici podeu comprovar que les dues sèries:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(\alpha-2n+2)(\alpha-2n+4)\cdots(\alpha+2n-1)}{(2n)!}x^{2n} \\
y_2(x) &= x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(\alpha-2n+1)(\alpha-2n+3)\cdots(\alpha+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1},
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

(obtingudes fixant $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ i $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ respectivament), són convergents a l'interval $-1 < x < 1$. Com que a més, una de elles és parella i l'altra senar, les seves funcions suma serán linealment independents; i ja hem arribat a les solucions que buscàvem.

Tanmateix, a partir de (4.9) ens adonem de què si l'ordre de l'equació de Legendre, α, és nul, positiu parell o negatiu senar, $y_1(x)$ es redueix a un polinomi, i si α és positiu senar o negatiu parell és un polinomi $y_2(x)$. Per a valors enters positius de α, si agafem a_0 i a_1 de manera convenient per tal que resultin $y_1(1) = 1$ i $y_2(1) = 1$, obtenim els *polinomis de Legendre*, alguns dels quals han estat escrits a la taula 4.2. $\triangleright$

Polinomis de Legendre	
$P_0(x) = 1$	$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$
$P_1(x) = x$	$P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$
$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$	$P_6(x) = \frac{1}{16}\left(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5\right)$
$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$	$P_7(x) = \frac{1}{16}\left(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x\right)$

Taula 4.2: vuit 1^{ers} polinomis Legendre

Definició 1. *Sigui l'equació diferencial*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{4.10}$$

*$x = x_0$ és un **punt ordinari** de (4.10) si $P(x)$ i $Q(x)$ són analítiques en $x = x_0$. En altre cas direm que x_0 é un **punt singular** de l'equació diferencial.*

Teorema 1. *Sigui $x = x_0$ un punt ordinari de l'equació diferencial (4.10). Aleshores aquesta té dues solucions linealment independents de la forma:*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n \tag{4.11}$$

*essent el radi de convergència d'aquestes sèries no més petit que la distància de x_0 al punt singular **real o complex** més proper de l'equació diferencial. Els coeficients de les sèries (4.11) es poden determnar per substitució a l'equació (4.10).*

Exemple 3. *Per a cadascuna de les funcions següents, determineu un valor mínim del radi de convergència d'una solució en sèrie de potències en torn als punts $x_0 = 0$ i $x_0 = 1$*

a. $2y'' + xy' + y = 0$

b. $(1 + x^2)y'' - y' + y = 0.$

$\triangleleft$ **Solució**. Tot i que només ens interessen les solucions reals, debut a que el teorema diu que s'han de mirar les singularitats tant reals com complexes de l'equació, resulta molt útil considerar les funcions $P(x)$ i $Q(x)$ com definides al camp complex ($z \mapsto P(z)$, $z \mapsto Q(z)$ amb $z \in \mathbb{C}$). Així al primer apartat: $P(z) = z/2$, $Q(z) = 1/2$, que són funcions elementalment derivables a tot el pla complex. L'equació diferencial no té doncs cap singularitat i les seves solucions en s. d. p. tant a $x_0 = 0$ com a $x_0 = 1$, seran convergents $\forall z \in \mathbb{C}$ i en conseqüència a tot $\mathbb{R}$. Al segon apartat però, les funcions $P(z) = -(1 + z^2)^{-1}$ i $Q(z) = (1 + z^2)^{-1}$ deixen de ser regulars a $z = \pm\sqrt{-1}$. Llavors, pels radis de converència ρ_0, ρ_1 de les solucions al voltant de $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$ tindrem: $\rho_0 \geq 1$ i $\rho_1 \geq \sqrt{2}$. $\triangleright$

Exemple 4. *Busqueu les solucions, pel mètode dels desenvolupaments en sèrie a l'origen de l'equació diferencial,*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) = 0 \qquad \nu > 0 \tag{4.12}$$

(equació diferencial de Bessel d'ore ν).

$\triangleleft$ **Solució**. Fent com als exemples anteriors, suposant una solució en s. d. p. a $x = 0$, de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, derivant i substituint a (4.12) s'obté, un cop agrupats els termes:

$$-\nu^2 a_0 + \left(1 - \nu^2\right) a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(n^2 - \nu^2\right) a_n + a_{n-2}\right] x^n = 0,$$

d'on, per la condició d'igualtat de sèries caldrà:

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 0, \qquad a_n = \frac{a_{n-2}}{n^2 - \nu^2}. \tag{4.13}$$

Però aquestes tres relacions porten recursivament a $a_n = 0$ per $n = 0, 1, 2 \ldots$ O sigui: $y(x) = 0\, \forall x$. És a dir, el mètode del desenvolupament en s. d. p. només duu cap a una solució: la solució trivial! $\triangleright$

De fet, observem que per a l'equació (4.12) és té: $P(x) = 1/x$ i $Q(x) = 1 - \nu^2/x^2$, cap d'elles analítica a $x = 0$. Segons s'ha definit, queda clar que $x = 0$ és un *punt singular* de l'equació de Bessel. Fallen, per tant, les hipòtesis del teorema 1. A la secció següent veurem que, si la singularitat no és "massa dolenta", encara es podrà obtenir almenys una solució en s. d. p. (tot i que, en general, ja no serà una serie de potències sencera).

4.2 Solucions al voltant de punts singulars regulars: mètode de Frobenius

Començarem definint què entendrem per *punt singular regular.*

Definició 2. *El punt $x = x_0$ és un punt* ***singular regular*** *de lequació (4.10 si les funcions $(x - x_0)P(x)$ i $(x - x_0)^2 Q(x)$ són analítiques a $x = x_0$. A qualsevol altre cas direm que el punt singular és* ***irregular****.*

El *mètode de Frobenius* consisteix en buscar solucions de l'equació (4.10) com sèries de potències de la forma:

$$y(x) = (x - x_0)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{4.14}$$

essent x_0 un punt singular regular. Es tractaria de derivar (4.14) i substituir a (4.10) per d'obtenir alguna fòrmula recursiva que em donés els coeficients; tal com fèiem al cas dels punts ordinaris. Sorgeix així, de forma ben natural, l'anomenada *equació indicial* o *dels índexs.*

4.2.1 Equació dels índexs

Sigui x_0 punt singular regular de l'equació (4.10). Aleshores:

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^{n-1} \\ Q(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^{n-2}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Suposem que una solució de (4.10) és de la forma (4.14). Provarem de substituir aquesta i les seves derivades a l'equació, fent el producte de Cauchy a la regió comuna de convergència de les sèries:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{n=0}^{\infty} &(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n\,(x-x_0)^{n+\alpha-2} + \\ + &\sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)a_k\,(x-x_0)^{k+\alpha-1}\sum_{m=0}^{\infty} p_m\,(x-x_0)^{m-1} + \\ + &\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^{k+\alpha}\sum_{m=0}^{\infty} q_m\,(x-x_0)^{m-2} = \{k+m=n\} \\ = &\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n\,(x-x_0)^{n+\alpha-2} + \\ + &\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+\alpha)p_{n-k}+q_{n-k}\right]a_k\,(x-x_0)^{n+\alpha-2} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} &\left\{(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}\left[(k+\alpha)p_{n-k}+q_{n-k}\right]a_k\right\}(x-x_0)^{n+\alpha-2}, \end{aligned}$$

i igualant coeficients, hom obté:

$$\begin{aligned} &\Phi(\alpha) = 0, \\ &\Phi(n+\alpha)\,a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+\alpha)p_{n-k}+q_{n-k}\right]a_k, \end{aligned} \tag{4.16}$$

$(n = 1, 2, \dots)$. On s'ha definit: $\Phi(\alpha) := \alpha(\alpha-1) + \alpha p_0 + q_0$. De la primera de les equacions de (4.16), $\Phi(\alpha) = 0$ —l'anomenada **equació del índexs**—, surten els possibles valors de l'exponent α (veure discussió del teorema 2 més avall); mentre que de la segona n'obtenim la relació de recurrència per calcular els coeficients $a_1, a_2, \dots$

A l'equació de Bessel eren, recoredem-ho $P(x) = 1/x$ i $Q(x) = 1 - \nu^2/x^2$. Així doncs, $x = 0$ és un punt singular regular. Mirem ara de trobar solucions aplicant el mètode de Frobenius. Tenim, per aplicació de (4.16), que l'equació dels índexs és:

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - \nu^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \nu^2 = 0 \tag{4.17}$$

i també de la segona fòrmula de (4.16):[1]

$$\begin{aligned} \left[(1+\alpha)^2-\nu^2\right] a_1 &= 0, \qquad &(n=1) \\ \left[(n+\alpha)^2-\nu^2\right] a_n &= -a_{n-2} \qquad &(n=2,3,\dots) \end{aligned} \tag{4.18}$$

Les arrels de l'equació dels índexs (4.17), són $\alpha = \pm\nu$. Si, per exemple, ν *no és cap enter*, la primera de les equacions d'adalt es satisfà si i només si $a_1 = 0$, en tant que de la segona, es té:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+\nu)^2-\nu^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}. \tag{4.19}$$

Per a $n = 2,3,\dots$ Com sempre, escrivim explícitament els primers termes:

$$a_2 = \frac{-\,a_0}{2(2+2\nu)} = \frac{-\,a_0}{2^2\cdot 1\cdot(1+\nu)}$$

$$a_4 = \frac{-\,a_2}{4(4+4\nu)} = \frac{a_0}{2^4\cdot 2\cdot 1\cdot(1+\nu)(2+\nu)}$$

$$a_6 = \frac{-\,a_4}{6(6+2\nu)} = \frac{-\,a_0}{2^6\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}$$

$$a_8 = \frac{-\,a_6}{8(8+2\nu)} = \frac{a_0}{2^8\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)(4+\nu)}$$

(com que a_1 és zero, els coeficients dels termes senars són tots nuls, i ja no els posem). Observant l'aspecte d'aquets primers a_{2n}, es pot inferir que per a qualsevol $n = 1,2,\dots$ serà:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n\, a_0}{2^{2n} n!(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\cdots(\nu+n)}, \tag{4.20}$$

com pot, *a posteriori* comprovar-se per inducció. S'acostuma a agafar: $a_0 = 2^{-\nu}/\Gamma(1+\nu)$, on la Γ denota la funció gamma d'Euler [Ni 74]. La solució en s. d. p. de l'equació de Bessel, que denotarem per $J_\nu(x)$, és doncs:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \tag{4.21}$$

Si fem a continuació, el mateix però amb l'altra arrel de l'equació dels índexs, $\alpha = -\nu$ agafant ara $a_0 = 2^{-\nu}/\Gamma(-\nu+1)$, $a_1 = 0$, s'obté una segona solució de l'equació de Bessel, la $J_{-\nu}(x)$:

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-\nu+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \tag{4.22}$$

la qual surt directament —sense necessitat de tornar a fer els càlculs—, substituint ν per $-\nu$ a $J_\nu(x)$. Les funcions suma $J_\nu(x)$ i $J_{-\nu}(x)$ d'adalt sánomenen *funcions de Bessel de primera espècie* d'orde ν. Les sèries senceres de (4.21)

[1] S'ha de tenir em compte que, en aquest c. p. és: $p_0 = 1$, $p_n = 0$, per a $n = 1,2,\dots$; $q_0 = \nu^2$, $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ i $q_m = 0$, per a $m = 3,4,\dots$

i (4.22) tenen radi de convergència infinit. En efecte, per a la primera sèrie tenim:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| &= \frac{n!\Gamma(\nu+n+1)}{(n+1)!\Gamma(\nu+n+1+1)} = \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{(n+1)(n+\nu+1)\Gamma(n+\nu+1)} = \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+\nu+1)} \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

quan n tendeix cap a infinit. Anàlogament per a l'altra.

4.2.2 Observacions

Nota 1. Si, com es suposa a l'exemple 4, ν no és enter, aleshores cap denominador s'anul·la i, tal com s'ha fet adalt, obtenim dues solucions que seran (proveu-ho com exercici) linealment independents. Per tant, la solució general vindrà donada per una combinació lineal:

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

amb c_1, c_2 constants arbitràries.

Nota 2. Si $\nu = 0$, totes dues solucions coincideixen:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots$$

(funció de Bessel d'ordre 0).

Nota 3. Finalment, si ν és enter, existeix una relació molt senzilla entre J_ν i $J_{-\nu}$. En efecte, si escrivim explícitament les relacions de recurrència (4.18) per a $\alpha = -\nu$, enter negatiu; tindrem, d'una banda, que cal que el coeficient de grau 1, que ara anomeno b_1, sigui nul ($b_1 = 0$) i —per la segona equació de (4.18)—, tenim:

$$n(n-2\nu)b_n = -b_{n-2}. \tag{4.23}$$

Així, tots els coeficients de grau senar seran nuls i a més, per $n = 2\nu$ s'haurà de satisfer:

$$0 \cdot b_{2\nu} = -b_{2\nu-2} \Rightarrow b_{2\nu-2} = b_{2\nu-4} = \cdots = b_2 = b_0 = 0,$$

d'on es pot agafar un $b_{2\nu}$ arbitrari. Aleshores, posant $n = 2\nu + k$ amb $k \geq 1$, la recurrència (4.23) pren la forma:

$$(2\nu + k)kb_{2\nu+k} = -b_{2\nu+k-2}. \tag{4.24}$$

D'on, d'entrada s'observa que $b_{2\nu+2k+1} = 0$, però (4.24) és bàsicament la fórmula recursiva (4.19). Així, com allà, es dedueix d'inmediat que:

$$\begin{aligned} b_{2\nu+2k+1} &= 0, \quad (k \geq 0) \\ b_{2\nu+2k} &= \frac{(-1)^k b_{2\nu}}{2^{2k}k!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(k+\nu)}, \quad (k \geq 1). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Hem arribat a una "segona" solució de l'equació de Bessel que serà:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= b_{2\nu}x^{-\nu}\left(x^{2\nu}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(1+\nu)(2+\nu)\cdots(k+\nu)}x^{2\nu+2k}\right)= \\
&= b_{2\nu}\Gamma(1+\nu)2^{\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}= \\
&= b_{2\nu}\Gamma(1+\nu)2^{\nu}J_{\nu}(x),
\end{aligned}$$

...per tant, el mètode de Frobenius, quan l'ordre de l'equació de Bessel és enter, només ens proporciona una solució: la corresponent a l'arrel més gran de l'equació dels índexs. L'altra arrel no afegeix cap solició linealment independent amb la primera.

Acavem aquesta secció amb un altre exemple d'aplicació del mètode de Frobenius.

Exemple 5 (Problema 4.22). *Useu el mètode de Frobenius en el punt $x = 1$ per trobar la solució general de l'equació no homogènia:*

$$2(x-1)y'' - y'' + (x-1)y = 1 - x$$

$\lhd$ **Solució**. Per inspecció es veu de seguida que la funció constant $y(x) \equiv -1$ és una solució particular. Així, només queda per resoldre l'homogènia associada. El punt $x = 1$ és (comproveu-ho), un punt singular regular. Suposarem docs solucions de la forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+\alpha}$. En el nostre cas, com que $p_0 = -1/2$ i $q_0 = 0$, l'equació dels índexs, $\Phi(\alpha) = 0$, queda:

$$\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha = 0$$

que té per arrels $\alpha_1 = 3/2$ i $\alpha = 0$. Aplicant (4.16), tenim que per a $n = 1$ és:

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)(1+\alpha)\,a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0,$$

(tant per $\alpha = 3/2$ com per $\alpha = 0$), i quan $n > 1$:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+\alpha)(2n+2\alpha-3)},$$

relació de recurrència amb la qual es calculen els coeficients (veure taula 4.2.2). Tenim, d'aquesta manera, dues solucions independents de l'homogènia:

$$y_1(x) = (x-1)^{\frac{3}{2}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+3)(4n-1)\cdots 7\cdot(2n)!!}(x-1)^{2n}\right]$$

$$y_2(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n-3)(4n-7)\cdots 1\cdot(2n)!!}(x-1)^{2n}.$$

$\alpha = 3/2$	$\alpha = 0$
$a_2 = -\dfrac{1}{7\cdot 2}$	$a_2 = -\dfrac{1}{2\cdot 1}$
$a_4 = \dfrac{1}{11\cdot 7\cdot 4\cdot 2\cdot 1}$	$a_4 = \dfrac{1}{5\cdot 1\cdot 4\cdot 2\cdot 1}$
$a_6 = -\dfrac{1}{15\cdot 11\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot 1}$	$a_6 = -\dfrac{1}{9\cdot 5\cdot 1\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot 1}$
$\vdots$	$\vdots$
$a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{(4n+3)(4n-1)\cdots 7\cdot (2n)!!}$	$a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{(4n-3)(4n-7)\cdots 1\cdot (2n)!!}$

Taula 4.3: Primers coeficients i termes generals de l'exemple 5, per a $\alpha = 3/2$ i per a $\alpha = 0$, havent agafat $a_0 = 1$ en ambdòs casos. Els coeficients senars són tots zero, car $a_1 = 0$.

Com exercici, calculeu els radis de convergència de les s. d. p. a $y_1(x)$, $y_2(x)$ i comproveu que són no nuls. Comproveu també que les dues solucions trobades són linealment independents.

Ara que ja tenim un parell de solucions independents i una solució particular, la solució general podrem expressar-la com:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) - 1,$$

(c_1, c_2 constants arbitràries).

Amb aquests dos últims exemples, ha quedat ben palès que el mètode de Frobenius aporta sempre una solució al voltant de punts singulars regulars. Fins i tot en alguns casos (com ara a l'exemple 5 o per a l'equació de Bessel quan l'ordre no és enter), també dóna les segones solucions. A la propera secció estudiarem què ens porta cap a una situació (només una solució) o cap a l'altra (totes dues solucions).

4.3 Anàlisi de les fòrmules de recurrència. Teorema de Fuchs

Siguin α_1, α_2 les dues solucions de l'equació dels índexs amb $\alpha_1 \geq \alpha_2$. hi ha tres casos possibles:

1. $s = \alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{N}$
2. $s = \alpha_1 - \alpha_2 = 0$
3. $s = \alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{N}$.

Al cas 1, si $s = \alpha_1 - \alpha_2$ no és cap enter, veiem a partir de (4.16) que no hi ha cap a l'hora d'obtenir els coeficients successius de les sèries. En efecte, ja que si triem $\alpha = \alpha_1$ és $\Phi(n + \alpha_1) = n(n + s)$ i si $\alpha = \alpha_2$, $\Phi(n + \alpha_2) = n(n - s)$, que mai no s'anul·len si s no és enter.[2]

Si, d'altra banda, $\alpha_1 = \alpha_2$ (cas 2), és evident que el mètode de Frobenius només ens podrà proporcionar una solució. L'últim cas, 3, requereix una mica més de discussió: si s és un enter diferent de zero ($s \in \mathbb{N}, s \neq 0$) podrem, com abans, calcular tots els coeficients derivats de l'arrel més gran de l'equació dels índexs (α_1), perquè $\Phi(n + \alpha_1) = n(n + s) \neq 0$ per a qualsevol $n = 1, 2, 3, \ldots$. Quan intentem, però, el mateix amb l'índex α_2, ens adonem de què: $\Phi(n+\alpha_2) = n(n - s)$, i això s'anul·la per a $n = s$. Malgrat tot, si encara es satisfà l'equació:

$$\sum_{k=0}^{s-1} \left[(k + \alpha_2)p_{s-k} + q_{s-k}\right] a_k \equiv 0, \tag{4.26}$$

per a $a_0 \neq 0$; tampoc no hi ha cap problema: deixaríem a_0 i a_s com constants arbitràries i continuaríem calculant els coeficients a_n posteriors a a_s ($\Phi(n+\alpha) = n(n - s)$ no s'anul·la ja mai quan $s > n$).

Exemple 6. *Determineu les solucions en s. d. p. al voltant de $x = 0$ de*

$$x^2y'' + (6x + x^2)y' + xy = 0$$

$\lhd$ **Solució**. El punt $x = 0$ és, com es pot veure, un punt singular regular de l'equaió diferencial. Cerquem així solucions en s. d. p. del tipus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$. Aplicant les relacions (4.16) s'obté primer l'equació dels índexs:

$$\alpha^2 + 5\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -5$$

i després l'equació que han de satisfer els coeficients de les solucions:

$$(n + \alpha)(n + \alpha + 5)a_n = (n + \alpha)a_{n-1} \tag{4.27}$$

(amb $n = 1, 2, 3, \ldots$). D'aquesta última equació, prenent $\alpha = \alpha_1 = 0$ sóbté la fòrmula de recurrència:

$$n(n + 5)a_n = -na_{n-1} \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{n + 5}$$

($n(n + 5)$ no s'anul·la per a cap valor de n). S'obtenen els termes:

$$a_1 = -\frac{a_0}{6}, \quad a_2 = \frac{a_0}{6 \cdot 7}, \quad a_3 = -\frac{a_0}{6 \cdot 7 \cdot 8}, \ldots, a_n = (-1)^n \frac{5!a_0}{(n + 5)!}$$

(com es comprova per inducció). Així, si fixem, per exemple $a_0 = 1$, arribem a la solució:

$$y_1(x) = 1 + 120 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n + 5)!} x^n$$

Si ara considrem la segona arrel, $\alpha_2 = -5$, la corresponent relació de recurrència veiem que és:

$$n(n - 5)a_n = -(n - 5)a_{n-1},$$

[2] Restarien pendents les qüestions sobre la independència lineal (fàcil) i de la convergència de les sèries —i. e. veure que el radi de convergència de les sèries enteres que apareixen a $y_1(x)$, $y_2(x)$ és no nul—, aquest últim punt és una mica més difícil de provar. Consulteu, per exemple [Whi 27].

i els cinc primers coeficients seran:

$$a_1 = -a_0, \quad a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = -\frac{a_0}{6}, \quad a_4 = \frac{a_0}{24}.$$

Ara bé, per a $n = 5$, és $0 \cdot a_5 = 0$. Podem doncs considerar a_5 com una constant arbitr'aria (i. e. com a_0), i continuar amb el càlcul dels coeficients...

$$a_6 = -\frac{a_5}{6}, \quad a_7 = -\frac{a_5}{7 \cdot 6}, \quad a_8 = -\frac{a_5}{8 \cdot 7 \cdot 6}, \dots, a_n = (-1)^{n+1}\frac{5!a_5}{n!},$$

per a $n = 6, 7, \dots$ I ja tenim l'altra solució:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= a_0x^{-5}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + a_5x^{-5}\left(x^5 - 120\sum_{n=6}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) \\ &= a_0x^{-5}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\frac{x^4}{24}\right) + a_5\left(1 + 120\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+5)!}\right), \end{aligned}$$

$y_2(x)$ depèn de dues constants arbitràries, a_0 i a_5, de manera que ja és la solució general. En concret, per $a_0 = 0$ i $a_5 = 1$, recuperem la solució $y_1(x)$ d'abans. ▷

Nota 4. De fet, sempre que $\alpha_1 - \alpha_2 = s \in \mathbb{N}$, si a la fòrmula (4.16) prenem $a_0 = 0$ i $a_s \neq 0$ no fem altra cosa que recuperar la primera solució, $y_1(x)$. Per veure-ho, escriurem (4.16) per a $n = s + k$, amb $k = 1, 2, \dots$

$$(s + k)ka_{s+k} = -\sum_{l=s}^{s+k-1}\left[(l + \alpha_2)p_{s+k-l} + q_{s+k-l}\right]a_l,$$

redefinim $b_k = a_{s+k}$ i la fòrmula d'adalt, si es té en compte que $\alpha_2 = \alpha_1 - s$ queda:

$$\begin{aligned} (s + k)kb_k &= -\sum_{l=s}^{s+k-1}\left[(l + \alpha_1 - s)p_{s+k-l} + q_{s+k-l}\right]b_{l-s} \\ &\overset{j=l-s}{=} -\sum_{j=0}^{k-1}\left[(j + \alpha_1)p_{k-j} + q_{k-j}\right]b_j. \end{aligned}$$

On, com s'indica, s'ha fet el desplaçament d'índexos: $j = l - s$. Però aquesta no és altra que la mateixa fòrmula (4.16). Això explica el que ens passava en trobar les solucions de l'equació de Bessel per a ν enter i també la "recuperació" de la primera de les solucions a l'últim exemple 6.

Si l'equació (4.26) no se satisfà per a $n = s$, és a dir, si:

$$\sum_{k=0}^{s-1}\left[(k + \alpha_2)p_{n-k} + q_{n-k}\right]a_k = 0 \Rightarrow a_0 = 0,$$

no trobarem altra solució més que la ja coneguda (veure nota 4), i així, com al cas d'índexs iguals, haurem de trobar una segona solució linealment independent, per exemple, pel mètode de reducció del l'ordre...

Exemple 7. *Resoleu $x^2y'' - xy' + (x^2 - 8)y = 0$ per Frobenius en torn a $x = 0$, calculant la segona solució linealment independent pel mètode de reducció de l'ordre*

◁ **Solució**. $x = 0$ és un punt singular regular de l'equació. $P(x) = -1/x$, $Q(x) = 1 - 8/x^2$, així que: $p_0 = -1$, $p_n = 0$ per a $n = 1, 2, \ldots$ i $q_0 = -8$, $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, $q_n = 0$ per a $n = 3, 4, \ldots$ L'equació dels índexs queda llavors:

$$\alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0,$$

que té per arrels $\alpha_1 = 4$ i $\alpha_2 = -2$. Per tant: $s = \alpha_1 - \alpha_2 = 6 \in \mathbb{N}$. Es comprova d'inmediat, que la segona de les equacions de (4.16), pren en aquest cas, la forma:

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - 9)a_1 &= 0 \\ [(n+\alpha)(n+\alpha-2) - 8]\, a_n &= -a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{4.28}$$

d'on resulta $a_1 = 0$, i tots els coeficients senars seran nuls. Si agafem l'arrel més gran. $\alpha_1 = 4$, la relació de recurreència que se'n dedueix de la segona de les equacions d'adalt és:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+6)},$$

a partir de la qual es poden calcular els coeficients:

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{8 \cdot 2} = \frac{-\,a_0}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{-\,6a_0}{2^2 \cdot 4! \cdot 2!} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{10 \cdot 4} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6a_0}{2^4 \cdot 5! \cdot 2!} \\ a_6 &= -\frac{a_4}{12 \cdot 6} = \frac{-\,a_0}{2^6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{-\,6a_0}{2^6 \cdot 6! \cdot 3!} \\ a_8 &= -\frac{a_6}{14 \cdot 8} = \frac{a_0}{2^8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6a_0}{2^8 \cdot 7! \cdot 4!} \\ &\vdots \\ a_{2n} &= \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n! (n+3)!}, \end{aligned}$$

(que efectivament aquest és el terme general, es comprova per inducció). La primera solució de l'equació diferencial serà, prenent $a_0 = 1$,

$$y_1(x) = x^4 \left(1 + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! (n+3)!} x^{2n} \right).$$

Per a l'altra arrel de l'equació dels índexs: $\alpha_2 = -2$, la fòrmula (4.28), quan $n = 6 (= s)$, queda: $0 \cdot a_6 = -a_4$ i a_4 no serà nul a menys que $a_0 = 0$. El mètode de Frobenius, en aquest cas, porta només cap a una solució. Per a construir-ne una segona de linealment independent, aplicarem la fòrmula de reducció de l'ordre:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp\left\{-\int P(x)\, dx\right\}}{y_1^2(x)}\, dx. \tag{4.29}$$

Així tindrem, si desenvolupem primer la integral (apuntem explícitament els càlculs):

$$\int \frac{x^{-8}\exp\left\{-\int P(x)\,dx\right\}}{\left(1-\frac{x^2}{16}+\frac{x^4}{640}-\frac{x^6}{46080}+\frac{x^8}{5160960}-\frac{x^{10}}{825753600}+\frac{x^{12}}{178362777600}-\cdots\right)^2}\,dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{x^{-7}\,dx}{\left(1-\frac{x^2}{8}+\frac{9x^4}{1280}-\frac{11x^6}{46080}+\frac{143x^8}{25804800}-\frac{13x^{10}}{137625600}+\frac{221x^{12}}{178362777600}-\cdots\right)}\\
&= \int x^{-7}\left(1+\frac{1}{8}x^2+\frac{11}{1280}x^4+\frac{1}{2304}x^6+\frac{1871}{103219200}x^8+\right.\\
&\qquad \left.+\frac{551}{825753600}x^{10}+\frac{80303}{3567255552000}x^{12}+\cdots\right)dx =\\
&= \int \left(x^{-7}+\frac{1}{8}x^{-5}+\frac{11}{1280}x^{-3}+\frac{1}{2304}x^{-1}+\frac{1871}{103219200}x+\right.\\
&\qquad \left.+\frac{551}{825753600}x^{3}+\frac{80303}{3567255552000}x^{5}+\cdots\right)dx =\\
&= \frac{\ln x}{2304}-\frac{1}{6}x^{-6}-\frac{1}{32}x^{-4}-\frac{11}{2560}x^{-2}+\frac{1871}{206438400}x^2+\frac{551}{3303014400}x^4+\\
&\qquad +\frac{80303}{21403533312000}x^6+\cdots
\end{aligned}$$

Si ara multipliquem per $y_1(x)$:

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= x^4\left(1-\frac{x^2}{16}+\frac{x^4}{640}-\frac{x^6}{46080}+\frac{x^8}{5160960}-\frac{x^{10}}{825753600}+\right.\\
&\qquad \left.+\frac{x^{12}}{178362777600}-\cdots\right),
\end{aligned}$$

obtenim, finalment, que la segona solució és:

$$y_2(x)=\frac{1}{2304}y_1(x)\ln x+x^{-2}\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{48}x^2-\frac{1}{384}x^4+\frac{247}{1105920}x^6+\cdots\right).$$

Notem que és de la forma: $cy_1(x)\ln(x-x_0)+(x-x_0)^{\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$. Veure el teorema (3) més endavant. $\triangleright$

El següent teorema formalitza part del que hem vist fins ara, alhora que garanteix la convergència de les sèries obtingudes.

Teorema 2 (Teorema de Fuchs). *Suposem que x_0 és un punt singular regular de l'equació diferencial (4.10). Sigui ρ el més petit dels radis de convergència de les sèries (4.15); α_1, α_2 les dues arrels de l'equació dels índexs, $\Phi(\alpha)=0$, amb $\alpha_1 \geq \alpha_2$ i $s=\alpha_1-\alpha_2$. Llavors:*

1. *Per a $x > x_0$ existeix una solució de l'equacio (4.10) de la forma (4.14) correspoent a l'arrel α_1.*

2. *Si s no és zero ni cap altre enter, aleshores per $x > x_0$ existeix una segona solució linealment independent del tipus (4.14) per a $\alpha = \alpha_2$.*

Els radis de convergència de les s. d. p. no seran més petits que ρ. Els coeficients d'aquestes sèries es poden determinar derivant i substituint a l'equació diferencial.

Nota 5. Al llarg d'aquests apunts ens restringirem al cas en què les arrels α_1 i α_2 són reals. En cas de que siguin complexes conjugades, es pot demostar que també existeixen dues solucions en s. d. p. linealment independents. A més, tant als exemples que el precedeixen com al teorema 2, hem considerat solucions només per a $x > x_0$. Un cop s'han obtingudes aquestes, tan sols s'ha de substituir x^{α_i} per $|x - x_0|^{\alpha_i}$ per a obtenir les solicions quan $x < x_0$.

La discussió d'aquells casos especials ($s = \alpha_1 - \alpha_2$ enter), on el mètode de Frobenius només ens forneix d'una solució, és el que es durà a terme a la secció següent.

4.4 Estudi dels casos especials: $s \in \mathbb{Z}$

Tal com a vàrem fer amb un cas particular a l'exemple 7, aplicarem el mètode de reducció de l'ordre per a obtenir segones solucions per a $x > x_0$ quan s és un enter. Recorden que es feia servir la fòrmula (4.29). Abans però, cal desenvolupar en sèrie:

$$\begin{aligned}
\exp\left\{\int P(x)\,dx\right\} &= \exp\left\{-\int\left(\frac{p_0}{x-x_0} + p_1 + p_2(x-x_0) + p_3(x-x_0)^2 + \right.\right.\\
&\quad \left.\left. + \, p_4(x-x_0)^4 + \cdots + p_n(x-x_0)^n + \cdots\right)dx\right\} = \\
&= (x-x_0)^{-p_0}\left\{1 + \gamma_1(x-x_0) + \gamma_2(x-x_0)^2 + \right.\\
&\quad \left. + \, \gamma_3(x-x_0)^3 + \cdots + \gamma_n(x-x_0)^n + \cdots\right\},\\
y_1^2(x) &= (x-x_0)^{2\alpha_1}\left[1 + \beta_1(x-x_0) + \beta_2(x-x_0)^2 + \cdots\right.\\
&\quad \left. + \, \beta_n(x-x_0)^n + \cdots\right],
\end{aligned}$$

On s'ha suposat que hem prés $a_0 = 1$ en l'obtenció de $y_1(x)$. Per tant:

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{(x-x_0)^{-p_0}\left[1 + \gamma_1(x-x_0) + \cdots + \gamma_n(x-x_0)^n + \cdots\right]}{(x-x_0)^{2\alpha_1}\left[1 + \beta_1(x-x_0) + \cdots + \beta_n(x-x_0)^n + \cdots\right]}\,dx$$

i tenint en compte que $-p_0 - 2\alpha_1 = -s - 1$ per què? [3], queda:

$$y_2(x) = y_1(x)\int (x-x_0)^{-s-1}\left(1 + \sigma_1(x-x_0) + \cdots + \sigma_n(x-x_0)^n + \cdots\right)dx, \tag{4.30}$$

[3] $\alpha_1 - \alpha_2 = s$ i com que l'equació dels índexs és: $\alpha^2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0 = 0$, tinc: $\alpha_1 + \alpha_2 = -p_0 + 1$ de les dues equacions aïllant s, es té que $s = 2\alpha_1 + p_0 - 1$

per $x > x_0$, on s'ha fet servir el fet de que la inversa quant el producte d'una funció analítica és una funció analítica als punts on la funció no s'anul·la i que la composició de funcions analítiques també eś una funció analítica. Si s és enter i $s \neq 0$, de (4.30):

$$\begin{aligned}
y_2(x) = y_1(x) \int \Big[& \frac{1}{(x-x_0)^{s+1}} + \frac{\sigma_1}{(x-x_0)^s} + \frac{\sigma_2}{(x-x_0)^{s-1}} + \cdots \\
& + \frac{\sigma_s}{x-x_0} + \sigma_{s+1} + \sigma_{s+2}(x-x_0) + \cdots + \sigma_{s+k}(x-x_0)^{k-1} + \cdots \Big] \, dx = \\
= \quad & \sigma_s y_1(x) \ln(x-x_0) + y_1(x) \left\{ \frac{(x-x_0)^{-s}}{-s} + \sigma_1 \frac{(x-x_0)^{-s+1}}{-s+1} + \cdots \right. \\
& \left. + \sigma_{s+k} \frac{(x-x_0)^k}{k} + \cdots \right\} = \\
= \quad & \sigma_s y_1(x) \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{\alpha_1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right\} (x-x_0)^{-s} \times \\
& \times \left\{ -\frac{1}{s} + \sigma_1 \frac{x-x_0}{-s+1} + \cdots \right\} = \\
= \quad & \sigma_s y_1(x) \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n,
\end{aligned}$$

(ja que $\alpha_1 - s = \alpha_2$. Resumint, la forma general de la segona solució serà:

$$y_2(x) = \sigma y_1(x) \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n. \tag{4.31}$$

En el cas en què $\alpha_1 = \alpha_2$ raonant de manera semblant a partir de (4.30), es veu que ara, la forma de $y_2(x)$ vindrà donada per:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{\alpha_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n. \tag{4.32}$$

Nota 6. En el nostre càlcul de les solucions (4.31) i (4.32) no hem dit res del radi de convergència de les s. d. p. que hi intervenen. Com a la nota 5, al final del teorema 2 (pàg. 15), enfasitzarem el fet de que $y_2(x)$ ha estat trobada per a $x > x_0$. Un cop obtinguda, només cal reemplaçar $(x-x_0)^{\alpha_2}$ per $|x-x_0|^{\alpha_2}$ i $\ln(x-x_0)$ per $\ln|x-x_0|$, per a obtenir les solucions corresponents a $x < x_0$.

El teorema, que donem a continuació sense demostrar, resumeix l'anàlisi feta fins ara, a la vegada que estableix una acotació inferior per als radis de convergència.

Teorema 3. *Sigui $x = x_0$ un punt singular regular de l'equació (4.10). Anomenarem ρ al més petit dels radis convergència de les sèries (4.15). Siguin α_1, α_2, amb $\alpha_1 \geq \alpha_2$ les dues arrels de l'equació dels índexs, $\Phi(\alpha) = 0$. Aleshores:*

1. *Si* $\alpha_1 = \alpha_2$*, llavors (4.10) té dues solucions,* $y_1(x)$ *i* $y_2(x)$ *de la forma:*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (x - x_0)^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (a_0 \neq 0) \\ y_2(x) &= y_1(x) \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{\alpha_2 + 1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \end{aligned} \tag{4.33}$$

per a $x > x_0$*.*

2. *Si* $\alpha_1 - \alpha_2 = N$ *enter positiu, (4.10) té dues solucions* $y_1(x)$*,* $y_2(x)$*, les quals vénen donades per:*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (x - x_0)^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (a_0 \neq 0) \\ y_2(x) &= \sigma y_1(x) \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \end{aligned} \tag{4.34}$$

per a $x > x_0$*.*

A la segona fòrmula de (4.34), $b_0 \neq 0$*, però* σ *pot ser igual a zero, de manera que el logaritme pot no aparèixer. El radi de convergència de les s. d. p. no serà més petit que* ρ*. Els coeficients de les sèries i la constant* σ *es poden determinar per substitució directa de les sèries a l'equació (4.10). Pel que fa a les solucions per a* $x < x_0$*, veieu la nota 6 d'adalt.*

Il·lustrarem el cas $\alpha_1 = \alpha_2$ del teorema 3, torbant una segona solució de l'equació Bessel d'ordre zero [$\nu = 0$ a (4.12)].

Exemple 8. *Trobeu les solucions de l'equació diferencial:*

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0, \tag{4.35}$$

al voltant de $x = 0$*.*

$\triangleleft$ **Solució**. La primera solució s'obté de (4.21), posant $\nu = 0$:

$$y_1(x) = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n)^2} x^{2n}.$$

Seguint el teorema 3, per a $x > 0$, buscarem una segona solució del tipus:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1}. \tag{4.36}$$

Derivem dos cops:

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= y_1'(x) \ln x + \frac{y_1(x)}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) b_n x^n \\ y_2''(x) &= y_1''(x) \ln x + \frac{2 y_1'(x)}{x} - \frac{y_1(x)}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) n b_n x^{n-1} \end{aligned}$$

i substituïm $y_2(x)$ i les seves derivades a l'equació (4.35):

$$
\begin{aligned}
& x^2 y_1'' \ln x + 2xy_1' - y_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nb_n x^{n+1} + xy_1' \ln x + y_1 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_n x^{n+1} \\
& \qquad + x^2 y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+3} = \\
= \quad & \left(x^2 y_1'' + xy_1' + x^2 y_1\right) \ln x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nb_n x^{n+1} \\
& \qquad + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_n x^{n+1} + \sum_{n=2}^{\infty} b_{n-2} x^{n+1} = \\
= \quad & b_0 x + (4b_1 - 1)\, x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^2 n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1)^2 b_n + b_{n-2}\right] x^{n+1} \\
= \quad & b_0 x + (4b_1 - 1)\, x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(2n-1)^2 b_{2n-2} + b_{2n-4}\right] x^{2n-1} + \\
& \qquad + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(2n)^2 b_{2n-1} + b_{2n-3} + \frac{(-1)^n 2^2 n}{2^{2n}(n!)^2}\right] x^{2n-1} = 0.
\end{aligned}
$$

D'on es segueix que $b_0 = 0$, $b_1 = 1/4$ i que per a $n \geq 2$:

$$
\begin{aligned}
(2n-1)^2 b_{2n-2} + b_{2n-4} &= 0 \\
(2n)^2 b_{2n-1} + b_{2n+3} + \frac{(-1)^n 2^2 n}{2^{2n}(n!)^2} &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

De la primera tindrem que: $b_{2n} = 0$ per a $n = 0, 1, 2, \ldots$, mentre que la segona ens proporcionarà, els coeficients de grau senar.

Relacions de recurrència no homogènies com la que apareix a (4.37) són típiques d'aquests casos "especials" del mètode de Frobenius. En general no es poden resoldre (en el sentit de trobar una expressió tancada que ens doni el coeficient b_n en funció de n). Tot i encara, provarem una expressió per a b_{2n-1} que sigui del tipus:

$$
b_{2n-1} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} c_n,
$$

substituirem i tractarem "d'ajustar" c_n. Fent-ho queda:

$$
\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} c_n + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2 2^{2n-2}\left[(n-1)!\right]^2} c_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n 2^{2n}(n!)^2} = 0.
$$

I després d'agrupar i simplificar es té:

$$
c_n - c_{n-1} = -\frac{1}{n} \Rightarrow c_n = -\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right\}.
$$

Així:

$$b_{2n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}\right\}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

De manera que com a segona solució de l'equació de Bessel, linealment independent amb $J_0(x)$, es pot prendre:

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}x^{2n}. \tag{4.38}$$

Com exercici, es pot comprovar que la sèrie de potències de (4.38) convergeix a tot $\mathbb{R}$. $\triangleright$

Nota 7. La segona solució que s'acostuma a utilitzar és:

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \frac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2)y_1 + \frac{2}{\pi}y_2 \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}x^{2n}, \end{aligned}$$

om γ denota la constant d'Eler:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) - \ln n\right] = 0.57722...$$

Si, de manera semblant a com s'ha fet a l'exemple 8, busquem segones solucions de l'equació de Bessel quan l'ordre ν és un enter positiu, arribarem a les *funcions de Bessel de segona espècie*, l'expressió general de les quals vé donada per:

$$\begin{aligned} Y_\nu &= \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)J_\nu(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\nu-1}\frac{\Gamma(\nu-n)}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n} \\ &-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\right. \\ &\left.+\frac{1}{n+\nu}\right\}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}, \end{aligned}$$

on la gamma minuúscula que hi apareix és la constant gamma d'Euler que ja ha estat definida al final de la nota 7, i la primera part del claudator $\{\ldots\}$, $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ s'ha de suposar nul.la per a $n=0$. A l'exemple 8, havíem calculat doncs, tret de constants, la funció de Bessel de segona espècie d'ordre zero.

Bibliografia

[Ni 74] A. Nikiforov i V. Ouvarov *Éléments de la théorie des fonctions spéciales.* Edicions Mir, Moscou, 1976 (traduït del rus).

[Whi 27] E. T. Whittaker i G. N. Watson *A Course of Modern Analysis.* Cambridge University Press. Cambridge, 1927