8. Regla de la cadena

Problema 6

Siguin la funció $g \in C^2(\mathbb{R})$, el conjunt $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, g(x + yz) > 0\right\}$ i $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x, y, z) = \ln(g(x + yz))$. Calculeu $x^2 D_{xx} f + 2xy D_{xy} f + y^2 D_{yy} f$.

Solució

◀ Per poder calcular l'expressió que ens demana el problema, necessitem les derivades parcials de la funció f. Com que es veu que aquesta és una funció composta, caldrà aplicar la *regla de la cadena*.

Així, primer de tot, definexio, al conjunt A, la funció $h(x, y, z) = x + yz$. Aleshores f estarà ben definida en A i serà de fet la composició de ln, g i h, o sigui $f = \ln \circ g \circ h$. Com que totes tres funcions són diferenciables als seus respectius dominis; puc aplicar la regla de la cadena per a obtenir la matriu de derivades (i. e. la *matru jacobiana*) de f, la qual denotarem per Df. Fem doncs això i tindrem:

$$Df = D(\ln \circ g \circ h) = [D(\ln \circ g) \circ h] \cdot Dh, \tag{1}$$

(on el punt $(\cdot)$ indica el producte de matrius). Derivant h es comprova d'immediat que la seva jacobiana és: $Dh(x, y, z) = (1 \;\, z \;\, y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (i en particular, per a qualsevol punt (x, y, z) d'A). A continuació tornem a aplicar la regla de la cadena per derivar la composició $\ln \circ g$ que apareix a (1) i es té:

$$D(\ln \circ g) = \frac{g'}{g}, \tag{2}$$

(recordem que ln i g són funcions de només una variable). Substituint (2) en (1), queda

$$\begin{aligned} Df(x, y, z) &= \left(\frac{g'}{g} \circ h\right)(x, y, z) \cdot Dh(x, y, z) \\ &= \frac{g'(x + yz)}{g(x + yz)} \left(1 \;\, z \;\, y\right), \end{aligned}$$

i es veu que les components de la matriu de derivades Df (és a dir, les derivades parcials de f són):

$$\begin{aligned} D_x f(x,y,z) &= \frac{g'(x+yz)}{g(x+yz)}, \\ D_y f(x,y,z) &= z D_x f(x,y,z), \\ D_z f(x,y,z) &= y D_y f(x,y,z). \end{aligned} \tag{3}$$

Ara ja tenim les derivades parcials primeres. Ens calen però les parcials segones de f. Per exemple, podem tornar a derivar la primera de les parcials de les equacions d'adalt[1]. O sigui: derivem la funció $D_x f$, la qual cosa porta a (posem tots els passos),

$$D\left(D_x f\right) = D\left(\frac{g'}{g} \circ h\right) = \left(D\left(\frac{g'}{g}\right) \circ h\right) \cdot Dh.$$

$D(g/g')$ és la derivada de un quocient de funcions d'1 variable i la matriu Dh ja l'hem calculada. Per tant, d'aquesta última equació, s'obté:

$$D\left(D_x f\right)(x,y,z) = \left(\frac{gg'' - (g')^2}{g^2} \circ h\right)(x,y,z) \cdot (1 \ z \ y).$$

Com abans, tenint en compte que $D\left(D_x f\right) = (D_{xx} f \ D_{xy} f \ D_{xz} f)$ i identificant components (tan sols ens interessen les dues primeres) n'obtenim:

$$D_{xx} f = \frac{g(x+yz)g''(x+yz) - (g'(xyz))^2}{(g(x+yz))^2}, \tag{4}$$

$$D_{xy} f = z D_{xx} f, \tag{5}$$

amb $(x,y,z) \in A$. La parcial que ens falta, $D_{yy} f$, la podem trobar derivant la segona de (3) amb respecte la variable y. Això ens dóna $D_{yy} f = z D_{xy} f$ i amb (5) queda:

$$D_{yy} f = z^2 D_{xx} f. \tag{6}$$

(definida al meteix conjunt A). Com que ja tenim les derivades segones de f —equacions (4), (5) i (6)—, podrem expressar $x^2 D_{xx} f + 2xy D_{xy} f + y^2 D_{yy} f$

[1]Veiem que és un quocient de funcions diferenciables en A. En efecte, g és dos cops derivable amb derivada segona contínua a tot $\mathbb{R}$. Així g' serà també derivable amb continuïtat i llavors diferenciable (de fet, com que és funció d'1 variable només li cal derivabilitat per ésser diferenciable). D'altra banda $x + yz$ és un polinomi en $\mathbb{R}^3$, per tant derivable amb continuïtat tantes vegades com calgui. D'aquí es dedueix que les composicions $g(x+yz)$ i $g'(x+yx)$ ho són de funcions diferenciables. Com a més $g(x+yz) > 0$ si $(x,y,z) \in A$, tindrem que el denominador no s'anul·la mai en A. Conclusió: els *criteris de generació* ens asseguren que la funció $g'(x+yz)/g(x+yz)$ és diferenciable en A.

en termes de g. Fent els calculs s'arriba a:

$$\begin{aligned}
&x^2 D_{xx} f + 2xy D_{xy} f + y^2 D_{yy} f = \\
&\quad = \left(x^2 + 2xyz + y^2 z^2\right) D_{xx} f \\
&\quad = \left(x^2 + 2xyz + y^2 z^2\right) \frac{g(x+yz) g''(x+yz) - (g'(x+yz))^2}{(g(x+yz))^2}.
\end{aligned}$$

que és el que volíem trobar. ▶

Problema 7

Sigui $f \in C^2(\mathbb{R})$. Suposem $f''(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Sigui g una funció de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ admetent en cada punt de $\mathbb{R}^2$ derivades parcials de segon ordre. Se suposa que g és harmònica, és a dir, $D_{xx} g + D_{yy} g = 0$. Demostreu que la funció $F = f \circ g$ és harmònica si i només si la funció g és constant.

Solució

◀ Suposarem primer que F és harmònica, això és, que $D_{xx} F + D_{yy} F = 0$. Donat que $F = f \circ g$, és una funció composta; aplicant la regla de la cadena, tenim que:

$$D_x F = \left(f' \circ g\right) D_x g \tag{7}$$
$$D_y F = \left(f' \circ g\right) D_y g \tag{8}$$

Com que necessitem les derivades parcials segones, tornem a derivar, amb les regles de la derivada d'un producte i la de la cadena:

$$D_{xx} F = \left(f'' \circ g\right) (D_x g)^2 + \left(f' \circ g\right) D_{xx} g \tag{9}$$
$$D_{yy} F = \left(f'' \circ g\right) (D_y g)^2 + \left(f' \circ g\right) D_{yy} g. \tag{10}$$

A continuació sumem (9) i (10) i un cop agrupat tot queda:

$$D_{xx} F + D_{yy} F = \left(f' \circ g\right) (D_{xx} g + D_{yy} g) + \left(f'' \circ g\right) \left((D_x g)^2 + (D_y g)^2\right).$$

Aquesta suma ha de valdre zero, car hem suposat que F és harmònica. El primer terme de la dreta és clar que ho és, perquè l'enunciat estableix que g és harmònica. Del segon terme sabem que el factor $(f'' \circ g)$ és diferent de zero ($f'' \neq 0$ per hipòtesi). Aleshores s'ha de satisfer:

$$(D_x g)^2 + (D_y g)^2 = 0,$$

la qual cosa implica: $D_x g = 0$ i $D_y g = 0$ a tot $\mathbb{R}^2$. D'aquí se'n dedueix, usant la *fórmula dels increments finits*[2] que g ha de ser una funció constant. El recíproc és immediat i es deixa al lector. ▶

[2] Veure, per exemple, la versió d'aquesta que es dóna a: Ferrer, J.; Puerta, F.: *Càlcul Diferencial*. EDICIONS UPC, Col·lecció Aula ETSEIB **1**. Barcelona 1993. pàg. 175.

Nota: En aquest problema, hem hagut de derivar la funció composta $f \circ g$ on sabem que g és derivable però en principi, no té perquè ser diferenciable. Això és possible donat que $f \in C^2$ i, en particular doncs, és derivable amb derivada contínua. Per a les derivades segones s'aplica el mateix raonament, ara amb la continuïtat de f'. Estem aplicant, de fet, una versió de la regla de la cadena "per derivades", que requereix condicions més "febles" sobre la primera de les funcions que la corresponent regla de la cadena "per diferencials".[3]

[3] Podeu consultar: Ferrer, J.; Puerta, F.; op. cit. pàg. 163.