Càlcul Infinitesimal II/Càlcul II
Integració amb MATLAB

1. Objectiu de la pràctica

Donades les funcions:

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sin x, \qquad g(x) = \mathrm{e}^{x^2} \sin x^2,$$

a) Usant la regla de Barrow, calculeu $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x$.

b) Usant el mètode dels trapezis $T(h)$, amb $N = 10$ subdivisions (és a dir $h = \frac{\pi/2-0}{10}$), calculeu aproximadament la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} g(x)\mathrm{d}x$.

c) Usant el mètode de Simpson, $S(h) = T(h) + \dfrac{T(h) - T(2h)}{3}$, amb $N = 20$ subdivisions (és a dir $h = \frac{\pi/2-0}{20}$), calculeu aproximadament la integral de l'apartat b).

d) Usant quadratura adaptativa, calculeu la integral de l'apartat b) amb un error $< 10^{-12}$.

2. Desenvolupament

Als apartats b), c), d) s'han de fer servir els mètodes d'integració numèrica indicats per aproximar la integral,

$$I_2 := \int_0^{\pi/2} g(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{x^2} \sin x^2 \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

En canvi, a l'apartat a) el càlcul *exacte* de la integral,

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{x} \sin x \, \mathrm{d}x \tag{2}$$

es farà primitivitzant i aplicant la regla de Barrow, o sigui, fent ús de les capacitats de càlcul simbòlic del **MATLAB**.

A la secció 3, explicarem els apartats b), c), d) mentre que l'apartat a) s'explica a la secció 4.

3. Integració numèrica: trapezis, Simpson i quadratura adaptativa

Com a pas previ per fer els apartats b), c), d) cal escriure un fitxer amb extensió `.m` (un *M-file*) on declararem la funció g. Podem crear un nou *M-file* des de la finestra del *Current Directory* fent servir els menús desplegables o, alternativament, invocant l'editor des de la mateixa línia de comandes amb la instrucció `edit` seguida del nom del fitxer. Així per crear el fitxer `g.m` faríem:

```
>> edit g.m;
```

```
function y = g ( x )
% FUNCTION G
% declara la funció g(x) = exp(x^2) * sin(x^2)

y = exp( x .^ 2) .* sin(x .^ 2);
```

Llistat 3.1: *M-file* g.m per definir la funció $g(x) = e^{x^2} \sin x^2$.

i escriuríem la funció g d'acord amb la sintaxi pròpia del MATLAB tal com s'especifica al llistat 3. Recordem que cal posar punts davant dels operadors `.*, .^, ./` perquè quan l'argument `x` que passem sigui un vector, la funció torni un vector, `y`, amb les seves components donades pel valor de la funció g a cadascuna de les components de `x`. A continuació guardem les modificacions fetes i tornem a la finestra de comandes.

Remarca 3.1. Per tal de que **MATLAB** reconegui a quina funció correspon el *M-file* que hem creat, **cal guardar el fitxer amb el mateix nom que la funció**, amb l'extensió `.m`.

Ara, comprovem que hem definit correctament la funció g:

```
>> x=rand(1,5); % això crea un vector amb cinc components aleatòries
x =

   0.915553   0.146670   0.125391   0.859525   0.098018

>> y=g(x)       % avaluem la funció g a cadascuna de les components de x
y =

   1.7191059   0.0219781   0.0159715   1.4096635   0.0097001
```

(el text que apareix a la dreta del signe `%` són comentaris, i no cal escriure'l), on les components de y corresponen al valor de la funció g a cadascuna de les components de x. En efecte, si avaluem g component a component:

```
>> for i=1:5,exp(x(i)^2)*sin(x(i)^2); fprintf('y(%d)= %f\n',i,ans),end
y(1)= 1.719106
y(2)= 0.021978
y(3)= 0.015971
y(4)= 1.409663
y(5)= 0.009700
```

(aquí hem fet servir un bucle `for` per fer aquest càlcul i la comanda `frprintf` per imprimir els resultats, però no entrarem en els detalls d'això). Ara ja podem fer els apartats b), c) i d).

La fórmula dels trapezis —apartat b)—, ve implementada en **MATLAB** per la funció `trapz` i el mètode de quadratura adaptativa —apartat d)— per la funció `quad`. Per entendre com funcionen, podeu accedir a la seva descripció fent: `help trapz` i `help quad` respectivament a la línia de comandes. Llegiu la informació que apareix per familiaritzar-vos amb el seu ús.

Així, a l'apartat b), una manera de procedir seria,

```
>> format long                % volem 15 xifres significatives
>> a=0,b=pi/2,N=10,h=(b-a)/N
a = 0
b = 1.57079632679490
N = 10
h = 0.157079632679490
>> x=a:h:b;                   % Creem un vector x amb N+1 punts equiespaiats
>> y=g(x);                    % Avaluem la funció g a cadascun d'aquest punts
>> T=trapz(x,y)               % apliquem la fórmula dels trapezis
T =  3.50545308659108
```

i el valor aproximat de la integral (1) pel mètode dels trapezis amb $N = 10$ subdivisions és doncs:

$$I_2 \approx T(h) = 3.50545308659108, \qquad \text{amb} \;\; h = \frac{\pi/2 - 0}{10} = 0.157079632679490.$$

D'altra banda, **MATLAB** no té cap funció intrínseca pel mètode de Simpson. Per tant, per calcular l'aproximació per aquest mètode, aplicarem dos cops la fórmula dels trapezis amb h i $2h$ i la fórmula d'extrapolació segons se'ns indica a l'apartat c)

```
>> N=20,h=(b-a)/N               % cal que N sigui parell!
N = 20
h = 0.0785398163397448
>> x=a:h:b;                     % xarxa de N+1 punts equiespaiats una amplada h
>> y=g(x);                      % avaluem g a cadascun dels N+1 punts
>> Th=trapz(x,y);               % trapezis amb pas h
>> x=a:2*h:b;                   % xarxa de N/2+1 punts equiespaiats una amplada 2*h
>> y=g(x);                      % avaluem g a cadascun del N/2+1 punts
>> T2h=trapz(x,y);              % trapezis amb pas 2*h
>> S=Th+(Th-T2h)/3              % fórmula d'extrapolació
S = 3.51596944159974
```

(els extrems de l'interval d'integració són els mateixos $a = 0$, $b = \pi/2$, no cal que els tornem a introduir). D'aquesta manera tenim que l'aproximació per Simpson de la integral I_2 amb $N = 20$ subdivisions val:

$$I_2 \approx S(h) = 3.51596944159974, \qquad \text{amb} \;\; h = \frac{\pi/2 - 0}{20} = 0.0785398163397448.$$

A l'apartat d) s'ha d'utilitzar el mètode de quadratura adaptativa, imposant un error $< 10^{-12}$. Com ja hem esmentat dalt, la funció que fa això en **MATLAB** és la funció `quad`. Li hem de passar la funció (veure remarca 3.2 a sota), els extrems de l'interval d'integració i la tolerància o l'error màxim permès, així:

```
>> tol=1.e-12                   % fixem la tolerància a 10^(-12)
tol =  1.00000000000000e-12
>> Q=quad(@g,a,b,tol)           % cridem la funció quad
Q = 3.51625652490250
```

Remarca 3.2. Notem que quan es passa una funció definida en un *M-file* com argument d'una altra funció, cal posar un *handle*, i. e., el signe `@` davant del nom de la funció. És per això que escrivim `Q=quad(@g,a,b,tol)` en lloc de `Q=quad(g,a,b,tol)`.

Finalment, l'aproximació de la integral (1) que ens dóna aquest últim mètode és:

$$I_2 \approx Q = 3.51625652490250, \qquad \text{amb un error } \epsilon < 10^{-12}.$$

4. Integració simbòlica amb MATLAB

Per fer l'apartat a), el primer pas és declarar `x` com una variable simbòlica, la qual cosa s'aconsegueix amb la comanda `syms`

```
>> syms x;
```

després, introduïm la funció $f(x) = e^x \sin x$ de l'apartat a) com una funció (simbòlica), `f`, de la variable `x`. Això és fa escrivint la funció **directament a la línia de comandes** —ara no cal cap *M-file*!—, amb la sintaxi del **MATLAB**, i. e.

```
>> f=exp(x)*sin(x)
f = exp(x)*sin(x)
```

D'aquesta manera, hem introduït la variable `x` i la funció `f` com dos objectes *simbòlics*. Verifique-lo a la finestra del *Workspace*.

Remarca 4.1. Quan es declara una funció com un objecte *simbòlic* **no cal posar el . davant dels operadors *, ^, /** com passava quan la definíem *numèricament* per exemple, mitjançant un*M-file*.

MATLAB té una funció, `int`, que integra les funcions definides simbòlicament. Cal passar-li com arguments el nom de la funció —ara tampoc no cal posar-li el *handle* `@` davant—, la variable de què depèn i l'interval d'integració. En aquest exemple:

```
>> I=int(f,x,a,b)              % I és ara una variable simbòlica
I = 1/2+1/2*exp(1/2*pi)
```

Observem que el que ens surt és una expressió analítica, com si haguéssim primitivitzat i aplicat la rega de Barrow "a mà", és a dir:

$$I = \int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \left[(\sin x - \cos x)\,\frac{\mathrm{e}^x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\mathrm{e}^{\pi/2}}{2} + \frac{1}{2},$$

(comproveu-ho!). Cal doncs, avaluar aquesta expressió (avaluar la variable *simbòlica* `I`). Això ho podem aconseguir amb la funció `subs`:

```
>> I1=subs(I)
I1 = 2.905238690482676
```

I obtenim així el resultat numèric (que de fet, és el que ens demanaran). Aleshores, el resultat de la integral (2) de l'apartat a) és:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\pi/2}}{2} + \frac{1}{2} = 2.905238690482676.$$