

Classe 27-03-2014

Remarca 1. Com es faria el problema 47 a partir de desenvolupaments, a l'origen, de funcions d'1 variable?

(a) Taylor de $f(x,y) = \sin(xy)$ entorn del punt $(1, \frac{\pi}{2})$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sin(xy) = \sin\left((x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin\left((x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}(x-1) + \left(y-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left((x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}(x-1) + \left(y-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &\stackrel{\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots}{=} 1 - \frac{1}{2}\left((x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}(x-1) + \left(y-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + \dots \\ &\stackrel{\frac{t^6}{6!} + \dots}{=} 1 - \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \frac{\pi}{2}(x-1)\left(y-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2 + R_2(x-1, y-\frac{\pi}{2}). \quad \square \end{aligned}$$

(b) $f(x,y) = x^y$ en un entorn del punt $(x,y) = (1,1)$

$$\begin{aligned} &= x \cdot x^{y-1} = (x-1+1) e^{(y-1) \ln(1+(x-1))} = (1+(x-1)) \exp\left((y-1)((x-1)+\dots)\right) \\ &= (1+(x-1)) (1+(x-1)(y-1)+\dots) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + R_2(x-1, y-1). \\ &\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots \quad \square \end{aligned}$$

(c) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ en un entorn del punt $(0,1)$

$$\begin{aligned} &= \exp\left(\frac{x}{y}\right) = \exp\left(\frac{x}{1+(y-1)}\right) = \exp\left(x(1-(y-1)+\dots)\right) \\ &= 1 + x(1-(y-1)+\dots) + \frac{1}{2}\left(x(1-(y-1)+\dots)\right)^2 + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1) + R_2(x, y-1). \end{aligned}$$

(d) Taylor de $f(x,y,z) = e^{-x} \sin(yz)$ entorn del punt $(0,1,\pi)$

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= e^{-x} \sin(yz) \stackrel{(*)}{=} e^{-x} \sin\left((y-1)(z-\pi) + \pi(y-1) + (z-\pi) + \pi\right) \\ &= -e^x \sin\left((y-1)(z-\pi) + \pi(y-1) + z-\pi\right) = \end{aligned}$$

$$(*) (y-1+1)(z-\pi+\pi) = (y-1)(z-\pi) + \pi(y-1) + z-\pi + \pi$$

$$\begin{aligned}
 &= -(1-x+\dots) \left((y-1)(z-\pi) + \pi(y-1) + (z-\pi) + \dots \right) \\
 \text{si } t &= t - \frac{t^3}{3!} + \dots \\
 &= -(y-1)(z-\pi) - \pi(y-1) - (z-\pi) + \pi x(y-1) + x(z-\pi) + \dots \\
 &= -\pi(y-1) - (z-\pi) + \pi x(y-1) + x(z-\pi) - (y-1)(z-\pi) + R_3(x, y-1, z-\pi)
 \end{aligned}$$

Remarca 2. Càlcul de derivades direccionals quan la funció no és C^1 . Exemple
(Parcial 29 oct. 2012).

Considerem la funció $f(x,y) = \frac{xy^2 - 2x^3}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, i $f(0,0) = 0$

a) Calculeu $D_v f(0,0)$ on v és un vector qualsevol de norma 1.

Es pot comprovar que les derivades parcials de f no són contínues al $(0,0)$. Per tant f no és C^1 en cap entorn de l'origen, llavors no podem fer servir la fórmula del gradient per calcular les derivades direccionals ^{al $(0,0)$} i ho hem de fer a partir de la definició, mitjançant el límit. En efecte, sigui $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ amb $\|v\| = 1 \Leftrightarrow v_1^2 + v_2^2 = 1$. Aleshores, per la definició:

$$\begin{aligned}
 D_v f(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+tv_1, 0+tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2 - 2t^3 v_1^3}{t^2(v_1^2 + v_2^2)} = \\
 &= \frac{v_1 v_2^2 - 2v_1^3}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1 v_2^2 - 2v_1^3}{v_1^2 + v_2^2 = 1} = v_1 (v_2^2 - 2v_1^2).
 \end{aligned}$$

52) Troben els candidats a extrems relatius de les funcions següents i classifiquen-los.

$$(a) f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Proposició (extrems relatius, cas particular dimensió 2: $M=2$). Si $f(x,y)$ és una funció definida en un entorn de (x_0, y_0) on és de classe C^2 (i.e., totes les seves derivades parcials existeixen i són contínues en aquest entorn) i $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Aleshores:

(i) Si $f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - f''_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0$, f té un extrem relatiu (o extrem local) en (x_0, y_0) . Aquest extrem relatiu és:

(i.1) Un mínim relatiu si $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ($f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$).

(i.2) Un màxim relatiu si $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ($f''_{yy}(x_0, y_0) < 0$).

(ii) Si $f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - f''_{xy}(x_0, y_0)^2 < 0$ no hi ha extrem en (x_0, y_0) . De fet (x_0, y_0) és un punt de sella de la funció (els VAPs de Hess $f(x_0, y_0)$ tenen signe diferent).

(iii) Si $f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - f''_{xy}(x_0, y_0)^2 = 0$: pot haver o no un extrem de la funció a (x_0, y_0) , però no es pot decidir a partir d'aquest criteri i es requereix un estudi complementari. \square

$$(a) f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

$$f'_x(x,y) = 4x^3 - 4y = 0 \iff y = x^3 \text{ i substituïm a la 2ª equació:}$$

$$f'_y(x,y) = 4y^3 - 4x = 0 \iff x = y^3; \quad x = x^9 \iff x(1-x^8) = 0, \text{ Sols: } x = 0, \pm 1.$$

D'on tenim que els punts crítics són: $(x_0, y_0) = (0, 0), (1, 1), (-1, -1)$.

$$\bullet (0, 0): f''_{xx}(0, 0) = f''_{yy}(0, 0) = 0, f''_{xy}(0, 0) = -4; \quad f''_{xx}(0, 0) \cdot f''_{yy}(0, 0) - f''_{xy}(0, 0)^2 = -16 < 0;$$

$(0, 0)$ és un punt de sella.

$$\bullet (1, 1): f''_{xx}(1, 1) = 12, f''_{xy}(1, 1) = -4, f''_{yy}(1, 1) = 12; \quad f''_{xx}(1, 1) \cdot f''_{yy}(1, 1) - f''_{xy}(1, 1)^2 = 144 - 16 = 128 > 0 \text{ i } f''_{xx}(1, 1) = 12 > 0. \text{ Aleshores } (1, 1) \text{ és un punt de mínim}$$

relativa de la funció, en aquesta val $f(1,1) = -1$.

- $(-1,-1)$: $f_{xx}(-1,-1) = 12$, $f_{xy}(-1,-1) = -4$, $f_{yy}(-1,-1) = 12$: $f_{xx}(-1,-1) \cdot f_{yy}(-1,-1) - f_{xy}(-1,-1)^2 = 128 > 0$. Aleshores $(-1,-1)$ és un punt de mínima relativa de la funció on val $f(-1,-1) = -1$. \square

(B) $f(x,y) = x^2 + xy + y^3 - y^2 - 3x - 2y + 1$

$f_x(x,y) = 2x + y - 3 = 0 \iff y = 3 - 2x$ i substituïnt a la 2^a equació:

$f_y(x,y) = x + 3y^2 - 2y - 2 = 0$; $x + 3(3-2x)^2 - 2(3-2x) - 2 = x + 3(9-12x+4x^2) - 6 + 4x - 2 = 12x^2 - 31x + 19 = 0$

$$x = \frac{31 \pm \sqrt{31^2 - 4 \cdot 12 \cdot 19}}{24} = \frac{31 \pm \sqrt{49}}{24} = \frac{31 \pm 7}{24} = \begin{cases} 19/12 & ; y = 3 - 19/6 = -1/6 \\ 1 & ; y = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

Temem doncs els punts crítics: $(19/12, -1/6)$ i $(1,1)$.

- $(19/12, -1/6)$: $f_{xx}(19/12, -1/6) = 2$, $f_{xy}(19/12, -1/6) = 1$, $f_{yy}(19/12, -1/6) = -3$, donc: $f_{xx}(19/12, -1/6) \cdot f_{yy}(19/12, -1/6) - f_{xy}(19/12, -1/6)^2 = -7 < 0$. Per tant $(19/12, -1/6)$ és un punt de sella de f i $f(19/12, -1/6) = -521/432$.

- $(1,1)$: $f_{xx}(1,1) = 2$, $f_{xy}(1,1) = 1$, $f_{yy}(1,1) = 4$: $f_{xx}(1,1) \cdot f_{yy}(1,1) - f_{xy}(1,1)^2 = 8 - 1 = 7 > 0$ i $f_{xx}(1,1) = 2 > 0$. Per tant $(1,1)$ és un punt de mínima relativa de f , i $f(1,1) = 1 + 1 + 1 - 1 - 3 - 2 + 1 = -2$ \square

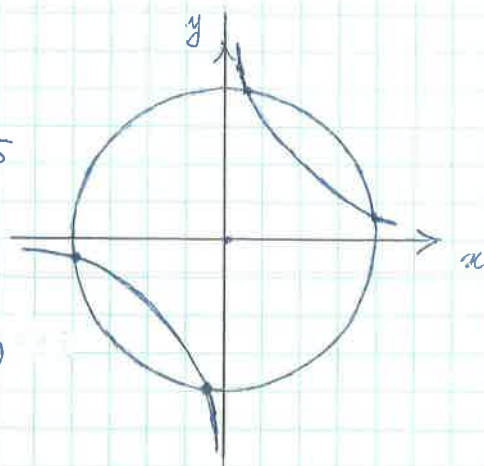
(C) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

$f_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$, donc: $x^2 + y^2 = 5$

$f_y(x,y) = 6xy - 12 = 0$, donc: $xy = 2$

$y = 2/x$: $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \iff x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

$$x = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{5 \pm 3}{2}} = \begin{cases} \pm 2 & : \begin{cases} (2,1) \\ (-2,-1) \end{cases} \\ \pm 1 & : \begin{cases} (1,2) \\ (-1,-2) \end{cases} \end{cases}$$



$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{xy}(x,y) = 6y$$

$$f_{yy}(x,y) = 6x$$

- $(2,1)$: $f_{xx}(2,1) = 12$, $f_{xy}(2,1) = 6$, $f_{yy}(2,1) = 12$: $f_{xx}(2,1) \cdot f_{yy}(2,1) - (f_{xy}(2,1))^2 = 144 - 36 = 108 > 0$ amb $f_{xx}(2,1) = 12 > 0$. Per tant $(2,1)$ és un punt de mínim relatiu de la funció f , on val $f(2,1) = -28$
- $(-2,-1)$: $f_{xx}(-2,-1) = -12$, $f_{xy}(-2,-1) = -6$, $f_{yy}(-2,-1) = -12$: $f_{xx}(-2,-1) \cdot f_{yy}(-2,-1) - (f_{xy}(-2,-1))^2 = 144 - 36 = 108 > 0$ amb $f_{xx}(-2,-1) = -12 < 0$. Aleshores, $(-2,-1)$ és un punt de màxim relatiu de la funció, on val: $f(-2,-1) = 28$.
- $(1,2)$: $f_{xx}(1,2) = 6$, $f_{xy}(1,2) = 12$, $f_{yy}(1,2) = 6$: $f_{xx}(1,2) \cdot f_{yy}(1,2) - (f_{xy}(1,2))^2 = -108 < 0$. Llavors $(1,2)$ és un punt de sella de la funció, on f val $f(1,2) = -26$.
- $(-1,-2)$: $f_{xx}(-1,-2) = -6$, $f_{xy}(-1,-2) = -12$, $f_{yy}(-1,-2) = -6$: $f_{xx}(-1,-2) \cdot f_{yy}(-1,-2) - (f_{xy}(-1,-2))^2 = -108 < 0$. Així $(-1,-2)$ correspon a un punt de sella de la funció, on f val $f(-1,-2) = 26$ □

(d) $f(x,y) = 8xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, si $x,y > 0$

$$f_x(x,y) = 8y - \frac{1}{x^2} = 0 \iff y = \frac{1}{8x^2}, \text{ substituïm a la } 2^{\text{a}}$$

$$f_y(x,y) = 8x - \frac{1}{y^2} = 0 : 8x - 64x^4 = 8x(1 - 8x^3) = 0 \begin{cases} x=0 \text{ (No)} \\ x=1/2 \end{cases}$$

Llavors el punt crític és: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2}{x^3}, \quad f_{xy}(x,y) = 8, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{2}{y^3}$$

Aleshores: $f_{xx}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot f_{yy}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - (f_{xy}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))^2 = 16^2 - 64 = 256 - 64 = 192 > 0$ i com que $f_{xx}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 16 > 0$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ és un punt de mínim relatiu de la funció f , on val $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 6$. □

$$(e) f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \text{ si } x,y > 0$$

$$f_x(x,y) = y - \frac{50}{x^2} = 0 \iff y = \frac{50}{x^2} \text{ i substituint a la } 2^{\text{a}}:$$

$$f_y(x,y) = x - \frac{20}{y^2} = x - \frac{20}{\frac{2500}{x^4}} = \frac{x}{125} (125 - x^3) = 0; \begin{cases} x=0 \text{ (No)} \\ x=5. \end{cases}$$

Temim doncs que $(5,2)$ és un punt crític de f .

$$f_{xx}(x,y) = \frac{100}{x^3}, \quad f_{xy}(x,y) = 1, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{40}{y^3}$$

$$f_{xx}(5,2) \cdot f_{yy}(5,2) - f_{xy}(5,2)^2 = \frac{1}{5} \cdot 5 - 1 = 3 > 0, \text{ amb } f_{xx}(5,2) = \frac{4}{5} > 0,$$

i per tant $(5,2)$ és un punt de mínim relatiu de la funció f ,
on val $f(5,2) = 30$. \square

$$(f) f(x,y) = xy \ln(x^2+y^2), \text{ si } (x,y) \neq (0,0).$$

$$f_x(x,y) = y \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = y \cdot \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} \right) = 0$$

$$f_y(x,y) = x \ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2} = x \cdot \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} \right) = 0$$

Agafant $y=0$ a la 1^a equació i substituint a la 2^a equació s'obté: $x \ln x^2 = 2x \ln |x|$
 $= 0; \begin{cases} x=0 \text{ (No)} \\ x=\pm 1. \text{ Punts crítics } (\pm 1, 0). \end{cases}$

Agafant, de la 1^a equació $\ln(x^2+y^2) = -\frac{2x^2}{x^2+y^2}$ i substituint a la 2^a, resulta:

$$2x \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = 0; \begin{cases} x=0, \text{ i llavors } \ln|y|=0, \text{ d'on } y=\pm 1 \text{ i aleshores } (0, \pm 1) \text{ són} \\ \text{ punts crítics.} \end{cases}$$

$$y = \pm x, \text{ i llavors } \ln(2x^2) = -1, \text{ d'on } x = \pm \frac{1}{\sqrt{2e}} \text{ i així}$$

temim altres 4 punts crítics: $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2e}}), (-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2e}})$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy(x^2+y^2) - 4x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} \left(1 + \frac{2y^2}{x^2+y^2} \right)$$

$$f_{xy}(x,y) = \ln(x^2+y^2) - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + 2$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy(x^2+y^2) - 4xy^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} \left(1 + \frac{2x^2}{x^2+y^2} \right)$$

Alashores:

- $(\pm 1, 0)$: $f_{xx}(\pm 1, 0) = 0$, $f_{xy}(\pm 1, 0) = 2$, $f_{yy}(\pm 1, 0) = 0$
 $f_{xx}(\pm 1, 0) \cdot f_{yy}(\pm 1, 0) - f_{xy}(\pm 1, 0)^2 = -4 < 0$. Alashores $(\pm 1, 0)$ són punts de sella de la funció f , on pren el valor $f(\pm 1, 0) = 0$
- $(0, \pm 1)$: $f_{xx}(0, \pm 1) = 0$, $f_{xy}(0, \pm 1) = 2$, $f_{yy}(0, \pm 1) = 0$
 $f_{xx}(0, \pm 1) \cdot f_{yy}(0, \pm 1) - f_{xy}(0, \pm 1)^2 = -4 < 0$. Alashores els punts $(0, \pm 1)$ són punts de sella de la funció f , on pren el valor $f(0, \pm 1) = 0$.
- $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}), (-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$: $f_{xx}(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}) = f_{xx}(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}) = 2$,
 $f_{xy}(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}) = f_{xy}(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}) = 0$, $f_{yy}(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}) = f_{yy}(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}) = 2$

Alashores:

$$\begin{aligned} & f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) \cdot f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) - f_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2 \\ &= f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) \cdot f_{yy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) - f_{xy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2 \\ &= 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0 \end{aligned}$$

i com que $f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = 2 > 0$, llavors $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ i $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ són punts de mínim relatiu de f , on la funció val:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

- $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}), (-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$: $f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -2$,
 $f_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = f_{xy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = 0$, $f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = f_{yy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = 2$

Alashores:

$$\begin{aligned} & f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) \cdot f_{yy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) - f_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2 \\ &= f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) \cdot f_{yy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) - f_{xy}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^2 = 4 > 0, \end{aligned}$$

amb $f_{xx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = f_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -2 < 0$. Per tant, els punts $(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}})$ i $(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}})$ són punts de màxim relatiu de la funció f , on

aquesta funció val $f(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}) = f(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}) = 1/2e$. \square

$$(g) f(x, y, z) = x^2/2 + xyz - z - y$$

$$f_x(x, y, z) = x + yz = 0$$

$$f_y(x, y, z) = xz - 1 = 0 \text{ d'on } z = 1/x$$

$$f_z(x, y, z) = xy - 1 = 0 \text{ d'on } y = 1/x$$

i substituint a la 1^a equació $x + 1/x^2 = 0$ i llavors $x = -1, y = -1, z = -1$; d'on tenim que $(-1, -1, -1)$ és un punt crític de la funció.

$$f_{xx}(x, y, z) = 1, f_{xy}(x, y, z) = z, f_{xz}(x, y, z) = y$$

$$f_{yy}(x, y, z) = 0, f_{yz}(x, y, z) = x$$

$$f_{zz}(x, y, z) = 0$$

Per tant:

$$\text{Hess} f(-1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicant el criteri de Sylvester: $1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 < 0$

La matriu $\text{Hess} f(-1, -1, -1)$ no és definida ni positiva ni negativa, amb $\det \text{Hess} f(-1, -1, -1) < 0$ ($\neq 0$). Llavors f té un punt de sella en $(-1, -1, -1)$ o.e. val $f(-1, -1, -1) = 3/2$. \square

$$(h) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$$

$$\left. \begin{aligned} f_x(x, y, z) &= 2x + y = 0 \\ f_y(x, y, z) &= 2y + x = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

$$f_z(x, y, z) = 2z = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Aleshores la funció té l'origem $(0, 0, 0)$ com punt crític, i:

$$f_{xx}(x, y, z) = 2, f_{xy}(x, y, z) = 1, f_{xz}(x, y, z) = 0$$

$$f_{yy}(x, y, z) = 2, f_{yz}(x, y, z) = 0, f_{zz}(x, y, z) = 2.$$

$$\bullet \text{ Hess } f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicant el criteri de Sylvester: $2 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$

tenim que $\text{Hess } f(0,0,0)$ és definida positiva; per tant $(0,0,0)$ és un punt de màxim relatiu de f om $f(0,0,0) = 0$.

Remarca. Això es pot deduir d'immediat si expressem la funció com

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + z^2 \geq 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

53) Troben els màxims i mínims absoluts (si existeixen) per a les següents funcions de dues variables definides en els dominis D que s'indiquen. Justifiquen la resposta en cada cas.

(a) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2) e^{-(x^2 + y^2)}$, $D = \mathbb{R}^2$

$$f_x(x,y) = 2x e^{-(x^2 + y^2)} - 2x(x^2 + 2y^2) e^{-(x^2 + y^2)} = 2x(1 - x^2 - 2y^2) e^{-(x^2 + y^2)} = 0$$

$$f_y(x,y) = 4y e^{-(x^2 + y^2)} - 2y(x^2 + 2y^2) e^{-(x^2 + y^2)} = 2y(2 - x^2 - 2y^2) e^{-(x^2 + y^2)} = 0$$

• De la 1^a equació: $x=0$ i substituint a la 2^a,

$$2y(2 - 2y^2) = 0 \begin{cases} y=0, \text{ d'on } (0,0) \text{ és un p.c.} \\ y=\pm 1, \text{ d'on } (0,\pm 1) \text{ són p.c.} \end{cases}$$

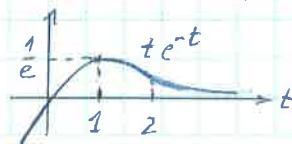
• De la 1^a equació, agafant: $x^2 + 2y^2 = 1$ i substituint a la 2^a: $2y = 0 \Leftrightarrow y=0$ i llavors $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Això dona altres dos punts crítics: $(\pm 1, 0)$.

Valor de f als punts crítics: $f(0,0) = 0$, $f(\pm 1, 0) = 1/e$, $f(0, \pm 1) = 2/e$.

D'altra banda tenim que, per tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(0,0) = 0 \leq f(x,y) = (x^2 + 2y^2) e^{-(x^2 + y^2)} \leq 2(x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)} \stackrel{(*)}{\leq} 2/e = f(0, \pm 1) \quad (**)$$

(*) Es comprova fàcilment que $te^{-t} \leq 1/e$:



Aleshores és clar que $(0,0)$ és un punt de mínim absolut de la funció, mentre que $(0, \pm 1)$ són punts de màxim absolut de f ; i $f(0,0) = 0$, $f(0, \pm 1) = \frac{1}{2}$. \square

$$(b) f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1, D = \mathbb{R}^2$$

$$f_x(x,y) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f_y(x,y) = 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

Així $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ és un punt crític de la funció f , d'altra banda:

$f_{xx}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot f_{yy}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - f_{xy}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$, amb $f_{xx}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2 > 0$; per tant el punt crític $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ correspon a un mínim relatiu de f que, de fet es un mínim absolut, ja que:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

D'altra banda f és no acotada superiorment a \mathbb{R}^2 , com es comprova d'immediat restringint f sobre la recta $y=0$, i.e. $f(x,0) = x^2 - x + 1 \rightarrow +\infty$ quan $x \rightarrow \pm\infty$. llavors no té màxim absolut. \square

$$(c) f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} = \overline{B}_1(0,0) \text{ (compacte!)}$$

De l'apartat anterior tenim que f té un punt crític $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in D$.

A continuació, restringirem f sobre $\partial D = \partial D_+ \cup \partial D_- \cup \{(1,0)\} \cup \{(-1,0)\}$

$$\text{on } \partial D_{\pm} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm \sqrt{1-x^2}, -1 < x < 1\} :$$

$$\bullet g_+(x) = f|_{\partial D_+} = f(x, \sqrt{1-x^2}) = 2x - \sqrt{1-x^2}, -1 < x < 1$$

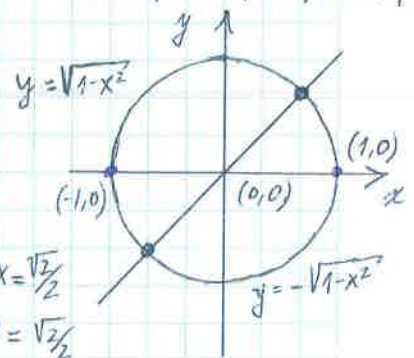
$$g'_+(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0, -1 < x < 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

d'on $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\bullet g_-(x) = f|_{\partial D_-} = f(x, -\sqrt{1-x^2}) = 2x + \sqrt{1-x^2}, -1 < x < 1$$

$$g'_-(x) = -1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0, -1 < x < 1 \Leftrightarrow x = -\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

d'on $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Per últim, analitzem f sobre els candidats a extrems

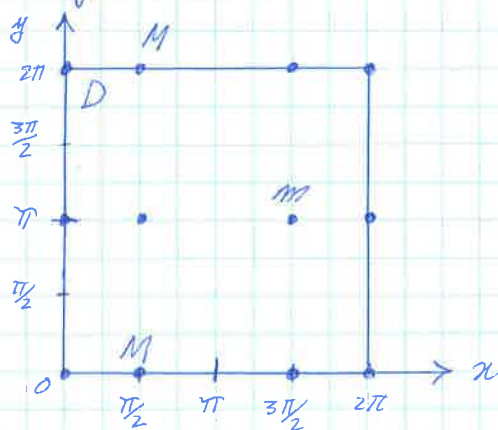
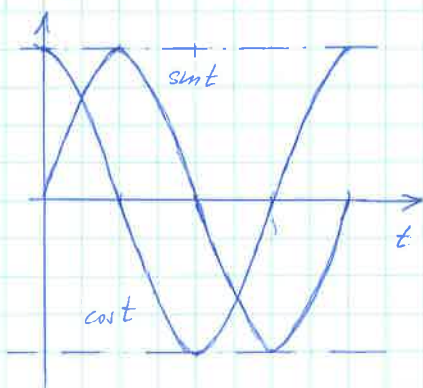
$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2}, \quad f(1, 0) = 1, \\ f(-1, 0) = 3 \quad (\text{notem que } 2 - \sqrt{2} = 2 - 1.414... = 0.586 > \frac{1}{2} = 0.5 \text{ i} \\ 2 + \sqrt{2} = 2 + 1.414 = 3.414... > 3)$$

D'on es conclou que, sobre el compacte $D = B_1(0, 0)$, f té un màxim absolut a $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, on val $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + \sqrt{2}$ i un mínim absolut a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, on val $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. \square

(d) $f(x, y) = \sin x + \cos y$ sobre el compacte $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$

$$f_x(x, y) = \cos x = 0, \text{ amb } 0 < x < 2\pi \iff x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$f_y(x, y) = -\sin y = 0, \text{ amb } 0 < y < 2\pi \iff y = \pi.$$



Així doncs, tenim 2 punts crítics a l'interior del compacte $D : (\frac{\pi}{2}, \pi), (\frac{3\pi}{2}, \pi) \in \overset{\circ}{D}$.

Es considera la descomposició de ∂D (frontera de D) següent:

$$\partial D = \partial D_1^- \cup \partial D_1^+ \cup \partial D_2^- \cup \partial D_2^+ \cup \{(0, 0), (2\pi, 0), (2\pi, 2\pi), (0, 2\pi)\},$$

$$\text{on: } \partial D_1^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2\pi, y = 0\}, \quad \partial D_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2\pi, y = 2\pi\},$$

$$\partial D_2^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, 0 < y < 2\pi\}, \quad \partial D_2^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\pi, 0 < y < 2\pi\}.$$

A continuació, busquem els punts crítics de les restriccions de f sobre ∂D_1^+ , ∂D_2^+ :

$$f|_{\partial D_1^+}, \quad f|_{\partial D_2^+}$$

$$\bullet \quad f|_{\partial D_1^+} : u(x) := f(x, 0) = f(x, 2\pi) = \sin x + 1, \quad 0 < x < 2\pi, \text{ d'on}$$

$$u'(x) = \cos x = 0 \text{ amb } 0 < x < 2\pi \iff x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}.$$

Temem doncs 4 'punts crítics' de $f|_{\partial D_1^- \cup \partial D_1^+} := \left\{ \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0 \right), \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi \right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right) \right\}$

• $f|_{\partial D_2^\pm} : V(y) := f(0, y) = f(2\pi, y) = \cos y, 0 < y < 2\pi$, d'on
 $V'(y) = -\sin y = 0$ amb $0 < y < 2\pi \iff y = \pi$.

Temem així 2 'punts crítics' per $f|_{\partial D_2^- \cup \partial D_2^+} := \left\{ (0, \pi), (2\pi, \pi) \right\}$

Resumint: hem trobat com candidats a extrems (absolut) de f en el compacte D , els punts:

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right), \left(\frac{3\pi}{2}, \pi \right) \in \overset{\circ}{D},$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0 \right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0 \right), \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi \right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right) \in \partial D_1^- \cup \partial D_1^+$$

$$(0, \pi), (2\pi, \pi) \in \partial D_2^- \cup \partial D_2^+$$

$$(0, 0), (2\pi, 0), (2\pi, 2\pi), (0, 2\pi) : \text{"vèrtexs" de } D.$$

Per decidir a quins d'aquests punts correspon el màxim i el mínim absolut, avaluem la funció:

$$f\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi = 1 - 1 = 0$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right) = \sin \frac{3\pi}{2} + \cos \pi = -1 - 1 = -2 : \text{mín. abs. en } \left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1 + 1 = 2 \text{ màx. abs. en } \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) = \sin \frac{3\pi}{2} + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$

$$f(0, \pi) = f(2\pi, \pi) = \sin 0 + \cos \pi = -1$$

$$f(0, 0) = f(2\pi, 0) = f(2\pi, 2\pi) = f(0, 2\pi) = 1.$$

En conclusió: sobre el compacte D f té un mínim absolut al punt $\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right)$ i la funció val $f\left(\frac{3\pi}{2}, \pi\right) = -2$ i dos punts de màxim absolut: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$, on la funció val $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) = 2$. \square

54) Per a la funció $f(x,y) = x^2y + xy^2$ vegeu que $(0,0)$ és un candidat a extrem relatiu però que el mètode del hessà no permet caracteritzar-lo. A quina conclusió arribem si restringim els valors de (x,y) als de la recta $y=x$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy + y^2 = y(2x+y) = 0 \\ f_y(x,y) &= x^2 + 2xy = x(x+2y) = 0 \end{aligned}$$

Obviament $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) = (0,0)$ és un candidat a extrem.

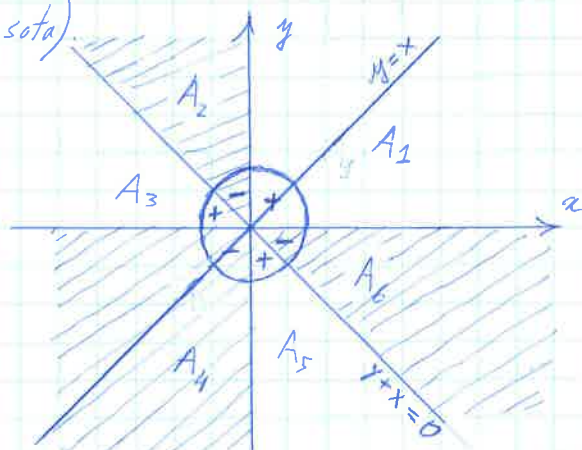
A més, veiem que $f(0,0) = 0$.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2y, & f_y(x,y) &= 2x+2y, \\ f_{xx}(x,y) &= 0, & f_{yy}(x,y) &= 2, \\ f_{xy}(x,y) &= 2x, & & \end{aligned}$$

Però, en canvi: $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = 0$, i aleshores el mètode del hessà no permet caracteritzar el punt crític.

Si restringim f sobre la recta $y=x$: $g(x) := f(x,x) = 2x^3$ (>0 , si $x>0$, <0 , si $x<0$), i com que $f(0,0) = 0$, tenim que a qualsevol entorn de l'origen hi ha punts on la funció pren valors més grans que $f(0,0)$ i punts on f pren valors més petits que $f(0,0)$ (en particular, els de les semirectes $y=x$ ($x>0$) i $y=x$ ($x<0$) respectivament). Aleshores $(0,0)$ no pot ser un punt ni de màxim ni de mínim de la funció.

Alternativament, podem escriure $f(x,y) = x^2y + xy^2 = xy(x+y)$ i estudiar el signe de f a partir del signe de xy i $x+y$. És clar que s'arriba a la mateixa conclusió (Veure figura a sota).



En qualsevol entorn de l'origen hi ha punts on $f > f(0,0) = 0$ i punts on $f < f(0,0) = 0$. (*)

	$x+y$	xy	f
A_1	+	+	+
A_2	+	-	-
A_3	-	-	+
A_4	-	+	-
A_5	-	-	+
A_6	+	-	-

$B_\delta(0,0) \setminus \{(0,0)\} \cap A_i \neq \emptyset$
 $\forall i=1,2,3,4,5,6$
i qualsevol $\delta > 0$.

55) Considerem la funció $f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)$.

(a) Si restringim els valors de (x,y) als d'una recta passant pel $(0,0)$, vegeu que l'origen és un mínim relatiu de la funció amb independència de la recta triada.

Considerem la família de rectes:

$y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, i definim la restricció de f sobre les rectes d'aquesta família.

$$\begin{aligned} g_m(x) &:= f(x, mx) = (mx - x^2)(mx - 3x^2) \\ &= mx^2 - 3mx^3 - mx^3 + 3x^4 \\ &= 3x^4 - 4mx^3 + m^2x^2 \end{aligned}$$

d'on veiem que $g_m(x)$ té un mínim relatiu en $x=0$ per qualsevol $m \in \mathbb{R}$. (*)

Considerem la recta $x=0$ (no inclosa a la família $y=mx$, $m \in \mathbb{R}$) i definim la corresponent restricció de f sobre aquesta recta:

$$v(y) := f(0,y) = y^2.$$

(Clarament $v(y)$ té un mínim relatiu (de fet un mínim absolut), a $y=0$)

Aleshores hem comprovat que la restricció de la funció f sobre qualsevol recta que passi per l'origen té un mínim relatiu a l'origen. \square

(b) Discutiu si el resultat de l'apartat (a) us permet concloure que $f(x,y)$, com a funció de dues variables té un mínim relatiu en el $(0,0)$.

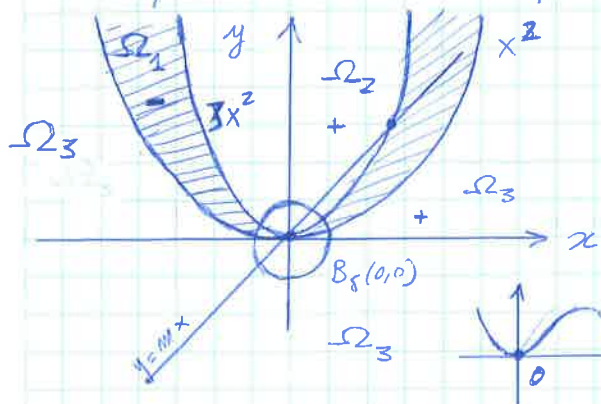
No necessàriament. En aquest cas, de fet, $(x,y) = (0,0)$ no és un punt de màxim ni

(*) Si $m \neq 0$: $g'_m(x) = 0$, $g''_m(0) = 2m^2 > 0 \Rightarrow x=0$ mín. rel. de $g_m(x)$

Si $m=0$: $g_0(x) = 3x^4$ que també té una mín. rel. a $x=0$ (de fet un mínim absolut).

de mínima relatiu de la funció f. Una manera de comprovar aix  es considerar els tres sub-dominis $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ següents (Veure figura).

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2, y < 3x^2\}, \quad \Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 3x^2\}, \quad \Omega_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$$



	$y-x^2$	$y-3x^2$	f
Ω_1	+	-	-
Ω_2	+	+	+
Ω_3	-	-	+

Clarament: $(B_\delta(0,0) \setminus \{(0,0)\}) \cap \Omega_i \neq \emptyset \quad \forall i=1,2,3$ i qualsevol $\delta > 0$.

Això implica que en qualsevol entorn del $(0,0)$ hi ha punts on $f > 0 (=f(0,0))$ i punts on $f < 0 (=f(0,0))$. Per tant $(0,0)$ no pot ser un punt ni de màxims ni de mínims relatiu. \square

56) Considereu la funció $f(x,y) = -y^3 - e^{-x^2} + 2y^2 \sqrt{e^x + e^{-x^2}}$

(a) Demostreu que $(0,0)$   l'únic extrem relatiu de f i classifiqueu-lo.

(b) Demostreu que f no té extrems absoluts (Indicació: Fixeu valors de x o de y de forma adequada i estudeu la funció d'1 variable resultant).

$$(a) \quad f_x(x,y) = 2x e^{-x^2} + \frac{e^x - 2x e^{-x^2}}{\sqrt{e^x + e^{-x^2}}} y^2 = 0$$

$$f_y(x,y) = -3y^2 + 4y \sqrt{e^x + e^{-x^2}} = -4y \left(y^2 - \sqrt{e^x + e^{-x^2}} \right) = 0 \quad \begin{cases} y=0 \\ y^2 = \sqrt{e^x + e^{-x^2}} \end{cases}$$

Si agafem $y=0$ a la 2  i substituïm a la 1 : $2x e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x=0$.

En canvi, si de la 1  agafem $y^2 = \sqrt{e^x + e^{-x^2}}$ i substituïm a la 1 , arribem a

$$2x e^{-x^2} + \frac{e^x - 2x e^{-x^2}}{\sqrt{e^x + e^{-x^2}}} \sqrt{e^x + e^{-x^2}} = 2x e^{-x^2} + e^x - 2x e^{-x^2} = e^x,$$

però e^x no s'annul a per a cap valor de x . Llavors $(x_0, y_0) = (0,0)$   l'únic punt

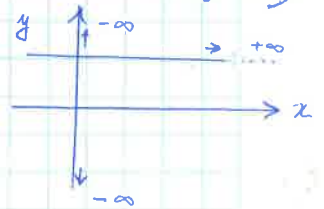
crític de la funció. Per classificar-lo, calculem les derivades segones:

$$f_{xx}(0,0) = \frac{d}{dx}(2x e^{-x^2}) \Big|_{x=0} = 2 \quad f_{xy}(0,0) = \frac{d}{dy}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} y^2\right) \Big|_{y=0} = 0.$$

$$f_{yy}(0,0) = \frac{d}{dy}(\dots) \Big|_{y=0} = 4\sqrt{2}, \quad \therefore \text{Hess}f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

def > 0

Veiem que $f_{xx}(0,0) f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2 = 8\sqrt{2}$, amb $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$. Llavors $(x_0, y_0) = (0, 0)$ correspon a un mínim relatiu de la funció, on val $f(0,0) = -1$.



(b) Considerem primer la restricció de f sobre la recta $y=1$:

$$f(x,1) = -1 + e^{-x^2} + 2\sqrt{e^{-x^2}} \rightarrow +\infty, \text{ quan } x \rightarrow +\infty,$$

Llavors, f no està acotada superiorment i per tant no té màxim absolut.

A continuació, considerem la restricció de f sobre la recta $x=0$.

$$f(0,y) = -y^4 + 1 + 2\sqrt{2}y^2 \rightarrow -\infty \text{ quan } y \rightarrow \pm\infty, \text{ la qual cosa implica que}$$

f no està acotada inferiorment, per tant no pot tenir mínim absolut. \square

57) Una sargentana es mou sobre el semiplà $\{x \geq 3\}$ on la temperatura en cada punt ve donada per l'expressió $T(x,y) = \frac{x-3}{x^2+y^2}$. Suposem que la sargentana busca l'escalfor i es mou sempre en la direcció on la temperatura creix més ràpidament.

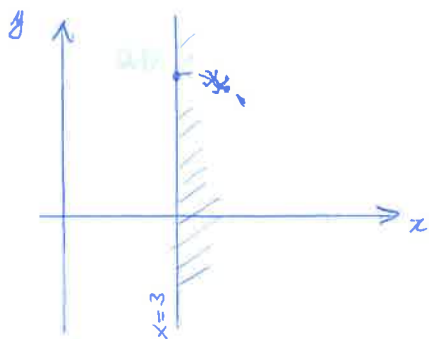
(a) Si en un instant donat la sargentana és al punt $(3,4)$, en quina direcció es mourà? Quin és l'increment de temperatura aproximat que experimentarà si es desplaça una petita quantitat h en aquesta direcció?

(b) Busqueu l'únic extrem relatiu de $T(x,y)$ en el semiplà $\{x > 3\}$ i classifiqueu-lo.

(c) Busqueu i dibuixen les corbes de nivell de $T(x,y)$ en el semiplà $\{x > 3\}$.

(d) Usant el croquis de l'apartat anterior, expliqueu perquè l'extrem relatiu de l'apartat

(b) és el màxim absolut de T en el semiplà $\{x \geq 3\}$.



$$T(x,y) = \frac{x-3}{x^2+y^2}$$

$$a) \nabla T(3,4) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(3,4), \frac{\partial T}{\partial y}(3,4) \right)^T = \left(\frac{1}{25}, 0 \right)^T$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2+y^2 - (x-3)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{6x - x^2 + y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x-3) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{6y - 2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2(x-3)y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(3,4) = \frac{18 - 9 + 16}{25^2} = \frac{1}{25}, \quad \frac{\partial T}{\partial y}(3,4) = 0. \text{ Llavors es mourà en direcció horitzontal cap a la}$$

dreta, i.e. segons el vector: $u = (1, 0)$

$$T(3+h, 4) - T(3, 4) \cong \frac{\partial T}{\partial x}(3, 4) \cdot h + \frac{\partial T}{\partial y}(3, 4) \cdot 0 = \frac{h}{25}$$

$$b) \nabla T(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - x^2 + y^2 = 0 \\ 2y(x-3) = 0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \text{ i subs. a la 1ª: } x(6-x) \begin{cases} x=0 \text{ (No)} \\ x=6: (6,0) \end{cases} \\ x=3 \text{ " " " " " : } y^2=0 \Leftrightarrow y=0: (3,0) \end{cases}$$

L'únic punt crític al semipla $\{x > 3\}$ és $(x_0, y_0) = (6, 0)$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(6,0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{6}{x^3} - \frac{1}{x^2} \right) \Big|_{x=6} = -\frac{18}{x^4} + \frac{2}{x^3} \Big|_{x=6} = -\frac{3}{6^3} + \frac{2}{6^3} = -\frac{1}{6^3} = -\frac{1}{216}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}(6,0) = \frac{d}{dx} (0) \Big|_{x=6} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(6,0) = \frac{d}{dy} \left(-6 \frac{y}{(36+y^2)^2} \right) \Big|_{y=0} = -6 \frac{1}{6^4} = -\frac{1}{6^3} = -\frac{1}{216}$$

$T_{xx}(6,0) \cdot T_{yy}(6,0) - T_{xy}(6,0)^2 = \frac{1}{6^6} - 0 > 0$, amb $T_{xx}(6,0) < 0$. Per tant, en el punt $(6,0)$ la funció T té un màxim relatiu i prems un valor: $T(6,0) = \frac{1}{12}$

$$c) T(x,y) = \frac{x-3}{x^2+y^2} = \lambda \Leftrightarrow x-3 = \lambda(x^2+y^2). \text{ Si suposem que } x > 3, \text{ llavors } \lambda \text{ es positiva, } (x,y) \neq (0,0)$$

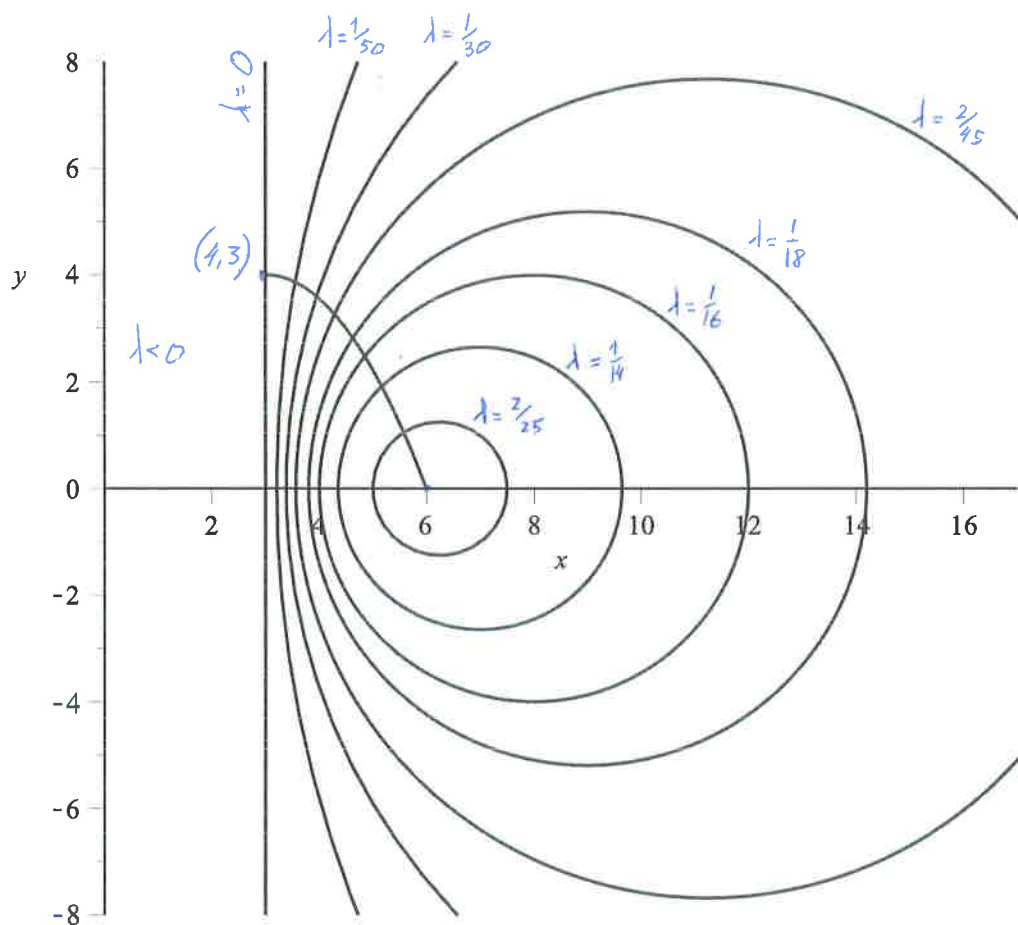
podem dividir per λ i llavors aquesta última expressió és equivalent a: $x^2 - \frac{x}{\lambda} + \frac{3}{\lambda} + y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2\lambda} \right)^2 + y^2 = \frac{1-2\lambda}{4\lambda^2} : \text{ circumferències amb centre } \left(\frac{1}{2\lambda}, 0 \right) \text{ i radi } R = \sqrt{\frac{1-2\lambda}{4\lambda^2}}$$

(Veure figura). Per $x > 3$ el rang de λ és: $0 < \lambda < \frac{1}{12}$

d) $(x - \frac{1}{2\lambda})^2 + y^2 = \frac{1-2\lambda}{4\lambda^2}$, llavors cal que $\lambda < \frac{1}{12}$ Això vol dir que: $T(x,y) \leq \frac{1}{12} = T(6,0)$. Per tant $(6,0)$ és un màxim absolut de la funció $T(x,y)$

e) Feu un dibuix esquemàtic de la trajectòria que seguirà la sargentama des del punt $(3,4)$ fins a aquest màxim absolut en la seva recerca de la màxima escalfor possible (No us demanem que sigueu rigurosos en la justificació del dibuix).



La trajectòria de la sargentama és perpendicular, a cada punt a la tangent a la corba de nivell que passa per aquell punt. Llavors la trajectòria de la sargentama és la corba que apareix a la figura, connectant els punts $(3,4)$ i $(6,0)$.

Es pot calcular explícitament i resulta una paràbola: $y(x) = \frac{8}{3}x - \frac{4}{9}x^2$. □

58) Una generalització de la funció de Cobb-Douglas al cas de tres variables és la següent:

$$U(x,y,z) = xy^2z^3, \quad x,y,z \geq 0,$$

on x,y,z verifiquen el lligam $3x+2y+z=1$ (i.e., els costos unitaris de x,y,z són 3, 2, i 1 respectivament i la suma de la inversió total que fems és la unitat).

(a) Useu el lligam entre (x,y,z) per expressar $U(x,y,z)$ en termes d'una nova funció $u(x,y)$.

(b) Dibuixeu el domini per a les variables (x,y) de $u(x,y)$. Quant val la funció $u(x,y)$ en la frontera d'aquest domini?

(c) Busqueu el màxim absolut de la funció $u(x,y)$ en el domini de l'apartat (b).

Solució

a) $U(x,y,z) = xy^2z^3, \quad x,y,z \geq 0$

$$3x+2y+z=1$$

Per tant: $z = 1-3x-2y$, però cal que $z \geq 0$. llavors, necessàriament $y \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$
i com que $y \geq 0$, necessàriament: $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$.

$$u(x,y) = U(x,y, 1-3x-2y) = xy^2(1-3x-2y)^3, \quad \text{amb } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$$

b) $K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \right\}$

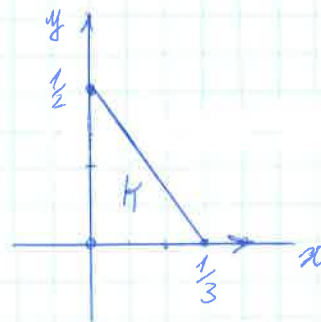
Temim que $u(x,y) = U(x,y, 1-3x-2y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \partial K$.

c) $u_x(x,y) = y^2(1-3x-2y)^3 + 3xy^2(1-3x-2y)^2(-3)$
 $= y^2(1-3x-2y)^2(1-3x-2y-9x)$

$$= y^2(1-3x-2y)^2(1-12x-2y) = 0$$

$$u_y(x,y) = 2xy(1-3x-2y)^3 + 3xy^2(1-3x-2y)^2(-2)$$

$$= 2xy(1-3x-2y)^2(1-3x-5y) = 0$$



Si busquem punts crítics a l'interior de K llavors $xy \neq 0$ i $1-3x-2y \neq 0$. Aleshores caldrà

$$\begin{aligned} 12x+2y &= 1 & \text{solució: } x &= \frac{1}{18} \\ 3x+5y &= 1 & y &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Comprovem si $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{18}, \frac{1}{6}\right) \in K^{\circ}$. En efecte, ja que $\alpha < \frac{1}{18} < \frac{1}{3}$,

$$0 < \frac{1}{6} < \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{18} \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \left(3 - \frac{1}{2}\right).$$

D'altra banda:

$$u\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^6 \cdot 3^4} = \frac{1}{5184} > 0 = u|_{\partial K}$$

Per tant el màxim absolut sobre el compacte K s'atany a $\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{6}\right) \in K^{\circ}$ i val

$$u\left(\frac{1}{18}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{5184}. \quad \square$$