Exemple (Problema 56 (*)). Comproveu que l'EDO

$$x^2+2xy-y^2+(y^2+2xy-x^2)y'=0$$

admet un factor integrant que depèn de $\Phi(x,y)=x+y$. Aleshores resoleu l'equació diferencial exacta obtinguda.

Solució. Condició necessària i suficient perquè l'EDO tingui un factor integrant depenent de $\Phi(x,y)$ — això és, de la forma $\mu(x,y)=f(\Phi(x,y))$, per a una certa funció f —, és que

$$R(x,y)=\frac{Q_x(x,y)-P_y(x,y)}{\Phi_y(x,y)P(x,y)-\Phi_x(x,y)Q(x,y)}=h(\Phi(x,y))$$

per a una certa funció h. Això és, que $R(x,y)$ sigui funció de $\Phi(x,y)$. Llavors resulta que:

$$\mu(x,y)=\exp\left(\int h(t)dt\right)\circ\Phi(x,y),$$

és un factor integrant de l'equació donada.

En aquest cas: $P(x,y)=x^2+2xy-y^2$, $Q(x,y)=y^2+2xy-x^2$, $\Phi(x,y)=x+y$.

$P_y(x,y)=2x-2y\neq Q_x(x,y)=2y-2x \Longrightarrow$ l'EDO <u>no</u> és exacta.

$$R(x,y)=\frac{Q_x(x,y)-P_y(x,y)}{\Phi_y(x,y)P(x,y)-\Phi_x(x,y)Q(x,y)}\overset{\Phi_x=\Phi_y=1}{=}\frac{2x-2x-2x+2y}{x^2+2xy-y^2-y^2-2xy+x^2}=\frac{4(y-x)}{2(x^2-y^2)}$$

$=-\frac{2}{x+y}$. D'on tenim que $R(x,y)=-\frac{2}{x+y}=h(x,y)$, amb $h(t)=-2/t$

(suposem $x+y\neq 0$). Per tant el corresponent factor integrant el podem agafar com:

$$\mu(x,y)=\exp\left(-2\int\frac{dt}{t}\right)\circ(x+y)=\frac{1}{t^2}\circ(x+y)=\frac{1}{(x+y)^2}.$$

Resolució de l'EDO. Definim:

$$\tilde{P}(x,y):=\mu(x,y)P(x,y)=\frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}=\frac{(x+y)^2-2y^2}{(x+y)^2}=1-\frac{2y^2}{(x+y)^2}=1-2\left(1-\frac{x}{x+y}\right)^2$$

$$\tilde{Q}(x,y):=\mu(x,y)Q(x,y)=\frac{y^2+2xy-x^2}{(x+y)^2}=\frac{(x+y)^2-2x^2}{(x+y)^2}=1-\frac{2x^2}{(x+y)^2}=1-2\left(1-\frac{y}{x+y}\right)^2$$

(*) Hem modificat l'enunciat.

Llavors:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}(x,y) &= -4\left(1-\frac{x}{x+y}\right)\frac{x}{(x+y)^2} = -\frac{4xy}{(x+y)^3}\\ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y}(x,y) &= -4\left(1-\frac{y}{x+y}\right)\frac{y}{(x+y)^2} = -\frac{4xy}{(x+y)^2}\end{aligned}\right\}$$

: Així doncs $\tilde{P}_y(x,y) = \tilde{Q}_x(x,y)$. Aleshores $\tilde{P}(x,y) + \tilde{Q}(x,y)y' = 0$ és una EDO exacta.

Resolem directament el sistema: $\frac{\partial U}{\partial x} = \tilde{P}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \tilde{Q}$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{2y^2}{(x+y)^2} \Longrightarrow U(x,y) = x + \frac{2y^2}{x+y} + \Psi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{(x+y)4y - 2y^2}{(x+y)^2} + \Psi'(y) = \frac{2(x+y)^2 - 2x^2}{(x+y)^2} + \Psi'(y) = 2 - \frac{2x^2}{(x+y)^2} + \Psi'(y)$$

$$= 1 - \frac{2x^2}{(x+y)^2} \iff \Psi'(y) = -1 \text{ i podem agafar } \Psi(y) = -y.$$

Llavors:

$$x + \frac{2y^2}{x+y} - y = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{x+y} = \frac{x^2+y^2}{x+y} = c \underset{x+y\neq 0}{\iff} x^2+y^2 = c(x+y)$$

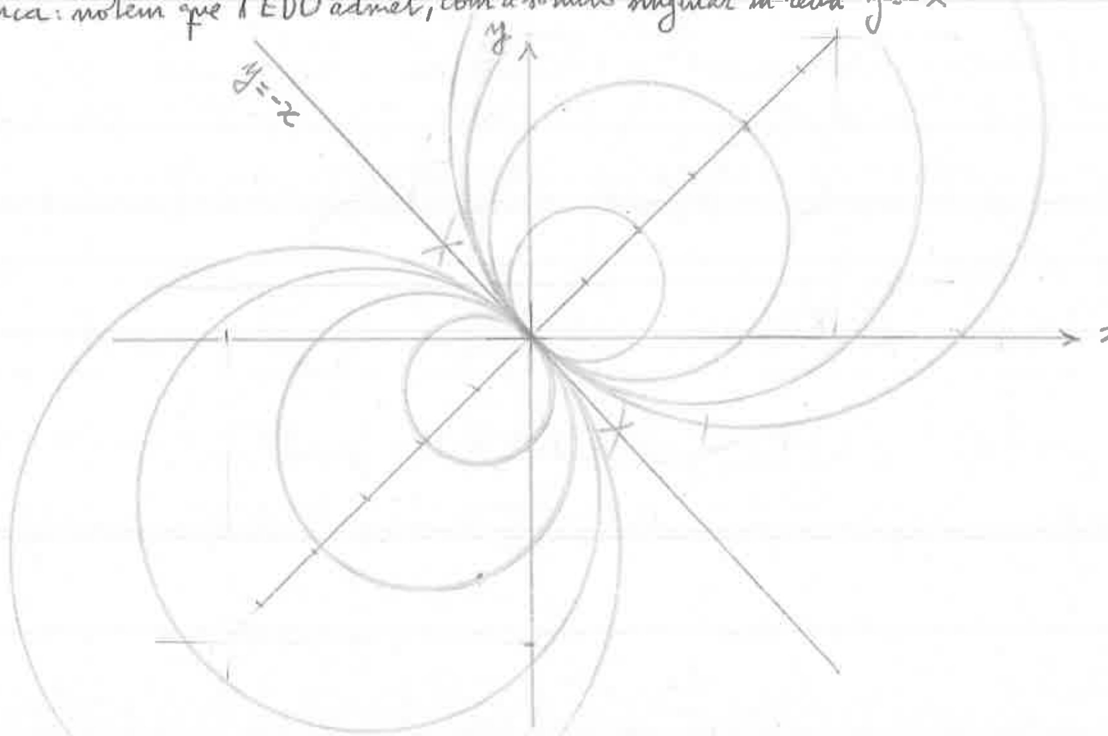
$$\iff x^2 - cx + \frac{c^2}{4} + y^2 - cy + \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{2} \iff \left(x-\frac{c}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4},\ c\in\mathbb{R}.$$

I escrivim la solució de l'EDO, en forma implícita com:

$$\boxed{\left(x-\frac{c}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{2},\quad c\in\mathbb{R} \text{ ctnt}}$$

que representa una família de circumferències amb centre $\left(\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right)$ i radi $\frac{|c|}{\sqrt{2}}$ (veure figura ll).

Remarca: notem que l'EDO admet, com a solució singular la recta $y=-x$



8) Resolem les següents equacions sabent que admeten un factor integrant que només depèn de y.

(a) $2xy^4e^y + 2xy^3 + y + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)y' = 0$

$$P(x,y) = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y \;:\; P_y(x,y) = 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1$$
$$Q(x,y) = x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x \;;\; Q_x(x,y) = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$$

Veiem doncs: $P_y \neq Q_x \Longrightarrow$ l'EDO no és exacta.

Condició necessària i suficient perquè l'EDO admeti un factor integrant depenent de $\oint(x,y) = y$ és que:

$$R(x,y) = \frac{Q_x(x,y) - P_y(x,y)}{P(x,y)} = h(y),$$

per una certa funció h. Comprovem-ho:

$$R(x,y) = \frac{Q_x(x,y) - P_y(x,y)}{P(x,y)} = \frac{2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 - 8xy^3e^y - 2xy^4e^y - 6xy - 1}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y}$$

$$= -4\,\frac{2xy^3e^y + 2xy^2 + 1}{y(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)} = -\frac{4}{y}$$

Aleshores, tenim que $\mu(x,y) = \exp\left(-\int \frac{4}{y}\,dy\right) = \frac{1}{y^4}$ és un factor integrant de l'EDO donada. En efecte:

$$\tilde{P}(x,y) := \mu(x,y)P(x,y) = 2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3}, \text{ d'on: } \tilde{P}_y(x,y) = 2xe^y - 2xy^{-2} - 3y^{-4}$$
$$\tilde{Q}(x,y) = \mu(x,y)Q(x,y) = x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4}, \text{ d'on } \tilde{Q}_x(x,y) = 2xe^y - 2xy^{-2} - 3y^{-4}$$

$$\Longrightarrow \tilde{P}_y = \tilde{Q}_x \Longrightarrow \tilde{P}(x,y) + \tilde{Q}(x,y)y' = 0 \text{ és una EDO exacta.}$$

Resolució de l'EDO:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 2xe^y + 2xy^{-1} + y^{-3} \Longrightarrow U(x,y) = x^2e^y + x^2y^{-1} + xy^{-3} + \psi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4} + \psi'(y) = x^2e^y - x^2y^{-2} - 3xy^{-4} \text{ d'on } \psi'(y) = 0$$

i podem agafar $\Psi(y) = \text{ctnt}$. Llavors la solució de l'EDO l'escrivim, en forma implícita, com:

$$\boxed{x^2 e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \text{ ctnt}}$$

Remarca. Notem que l'equació diferencial admet, a més, la recta $\boxed{y=0}$ com solució singular.

b) $2xy^2 - 3y^3 + (7 - 3xy^2)y' = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} P(x,y) = 2xy^2 - 3y^3 \ : & P_y(x,y) = 4xy - 9y^2 \\ Q(x,y) = 7 - 3xy^2 \ : & Q_x(x,y) = -3y^2 \end{array}\right\} : P_y \neq Q_x \Rightarrow \text{l'EDO } \underline{\text{no}} \text{ és exacta:}$$

Busquem el factor integrant:

$$R(x,y) = \frac{Q_x(x,y) - P_y(x,y)}{P(x,y)} = \frac{-3y^2 - 4xy + 9y^2}{2xy^2 - 3y^3} = -\frac{2}{y} \cdot \frac{2xy - 3y^2}{2xy - 3y^2} = -\frac{2}{y}$$

funció que depèn només de y. Aleshores, $\mu(x,y) = \exp\left(\int \frac{-2}{y}\, dy\right) = \frac{1}{y^2}$ és un factor integrant de l'EDO. En efecte:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{P}(x,y) := \mu(x,y)\, P(x,y) = 2x - 3y, \text{ d'on: } \tilde{P}_y(x,y) = -3 \\ \tilde{Q}(x,y) := \mu(x,y)\, Q(x,y) = \frac{7}{y^2} - 3x, \text{ d'on: } \tilde{Q}_x(x,y) = -3 \end{array}\right\} : \tilde{P}_y = \tilde{Q}_x \text{ i aleshores l'EDO } \tilde{P}(x,y) + \tilde{Q}(x,y)y' = 0 \text{ és exacta.}$$

Resolució de l'EDO:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 2x - 3y \Longrightarrow U(x,y) = x^2 - 3xy + \Psi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = -3x + \Psi'(y) = \frac{7}{y^2} - 3x \Longleftrightarrow \Psi'(y) = \frac{7}{y^2} \text{ i podem agafar } \Psi(y) = -\frac{7}{y}$$

Finalment, escrivim la solució (implícita) de l'EDO com:

$$\boxed{x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ ctnt}}$$

Remarca. Com a l'apartat anterior, notem que aquesta EDO admet la recta $\boxed{y=0}$ com solució singular.

(11) Considereu l'EDO lineal de 2^{on} ordre
$$(2t+3)\,t\,y'' + 2(2t^2-3)\,y' - 12(t+1)\,y = (2t+3)^2$$

(a) Trobeu el valor de λ que fa que $y_1(t) = t^\lambda$ sigui solució de l'EDO homogènia associada.

(b) Trobeu el valor de m que fa que $y_2(t) = e^{mt}$ sigui solució de l'EDO homogènia associada.

(c) Useu el mètode de variació de les constants per calcular una solució particular de l'EDO completa.

(d) Resoleu el problema de valors inicials $y(-1) = -1$, $y'(-1) = 5/2$.

Solució.

(a) $$(2t+3)\,t\,y_1''(t) + 2(2t^2-3)\,y_1'(t) - 12(t+1)\,y_1(t) = (2t+3)\,\lambda(\lambda-1)\,t^{\lambda-1} + $$
$$+ 2(2t^2-3)\,\lambda\, t^{\lambda-1} - 12(t+1)\,t^\lambda = (4\lambda-12)\,t^{\lambda+1} + (2\lambda(\lambda-1)-12)\,t^\lambda$$
$$+ (3\lambda(\lambda-1)-6\lambda)\,t^{\lambda-1} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \underset{}{\lambda = 3},\ \underset{(\lambda=-2,\ \lambda=3)}{\lambda^2-\lambda-6=0},\ \underset{(\lambda=0,\ \lambda=3)}{3\lambda^2-9\lambda=0} \text{ simultàniament} \Longleftrightarrow \lambda = 3$$

d'on $y_1(t) = t^3$ és la solució de l'EDO homogènia que buscàvem.

(b) $$(2t+3)\,t\,y_2''(t) + 2(2t^2-3)\,y_2'(t) - 12(t+1)\,y_2(t)$$
$$= [m^2(2t+3)t + 2m(2t^2-3) - 12(t+1)]\,e^{mt}$$
$$= [(2m^2+4m)t^2 + (3m^2-12)t - (12+6m)]\,e^{mt} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \underset{(m=0,\ m=-2),}{2m^2+4m = 2m(m+2) = 0},\quad \underset{(m=\pm 2),}{3m^2-12=0},\quad \underset{m=-2}{6m+12=0} \text{ simultàniament}$$

$$\Longleftrightarrow m = -2$$

Per tant $y_2(t) = e^{-2t}$ és la solució buscada de l'EDO homogènia.

Remarca. Es comprova (exercici!) que $y_1(t) = t^3$ i $y_2(t) = e^{-2t}$ són solucions li als intervals $t>0$, $-3/2 < t < 0$ i $t < -3/2$.

(c) Per aplicar el mètode de variació de les constants (o de variació de paràmetres) primer "normalitzarem" l'equació, i.e., dividirem pel coeficient de y'':

$$y'' + \frac{2(2t^2-3)}{t(2t+3)}y' - 12\frac{t+1}{t(2t+3)}y = 2 + \frac{3}{t},$$

Busquem una solució particular de la forma $y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$, on les derivades de $u_1(t)$ i $u_2(t)$; $u_1'(t)$ i $u_2'(t)$ respectivament satisfan, per tot t, el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \text{ amb } b(t) = 2 + 3/t, \text{ i.e.,}$$

$$\begin{pmatrix} t^3 & e^{-2t} \\ 3t^2 & -2e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-\frac{3}{t} \end{pmatrix},$$

que podem resoldre pel mètode de Cramer:

$$W(t) = \begin{vmatrix} t^3 & e^{-2t} \\ 3t^2 & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -t^2(2t+3)e^{-2t}$$ observem que aquest determinant és el Wronskià!

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2t} \\ 2+\frac{3}{t} & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -\frac{2t+3}{t}e^{-2t}, \quad W_2(t) = \begin{vmatrix} t^3 & 0 \\ 3t^2 & 2+\frac{3}{t} \end{vmatrix} = t^2(2t+3).$$

$$u_1'(t) = \frac{W_1(t)}{W(t)} = \frac{-\frac{2t+3}{t}e^{-2t}}{-t^2(2t+3)e^{-2t}} = \frac{1}{t^3} \Longrightarrow u_1(t) = -\frac{1}{2t^2}$$ (no cal afegir cap constant d'integració).

$$u_2'(t) = \frac{W_2(t)}{W(t)} = \frac{t^2(2t+3)}{-t^2(2t+3)e^{-2t}} = -e^{2t} \Longrightarrow u_2(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} \text{ (id)}.$$

D'on tenim que:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = -\frac{t}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(t+1),$$

és una solució particular de l'EDO lineal de 2on ordre (completa) donada.

Aleshores, la solució general la podem escriure com:

$$y(t) = c_1 t^3 + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{2}(t+1)$$

amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries. Observem, a més que la solució general està definida per tot $t \in \mathbb{R}$.

d) Per trobar la solució del PVI, imposem les condicions inicials $y(-1) = 1$ i $y'(-1) = 5/2$ a la solució general trobada a l'apartat anterior. D'aquesta manera obtindrem el valor de les constants c_1, c_2:

$$\left.\begin{aligned} y(-1) &= -c_1 + e^2 c_2 = -1 \\ y'(-1) &= 3c_1 - 2e^2 c_2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}\right\} : \begin{pmatrix} -1 & e^2 \\ 3 & -2e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow c_1 = 1,\ c_2 = 0$$

D'on tenim que la solució del PVI ve donada per:

$$y(t) = t^3 - \frac{1}{2}(t+1), \text{ definida per tot } t \in \mathbb{R}.$$

12) Considerem les funcions $y_1(t) = t$ i $y_2(t) = \frac{1}{t}$ per a $t > 0$.

(a) Calculeu el seu Wronskià i vegeu que $W(t) \neq 0$.

(b) Trobeu l'EDO homogènia de la forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, que les té com a conjunt fonamental de solucions.

Solució.

(a) $$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1/t \\ 1 & -1/t^2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{t} < 0 \quad \forall t > 0$$

(b) $$y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t) = p(t) + t\,q(t) = 0.$$
$$y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t) = \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t^2}p(t) + \frac{1}{t}q(t) = 0.$$

Llavors $p(t), q(t)$ han de satisfer, per tot $t > 0$, el sistema lineal:

$$p(t) + t\,q(t) = 0.$$
$$-\frac{1}{t^2}p(t) + \frac{1}{t}q(t) = -\frac{1}{t^3}.$$

que podem resoldre pel mètode de Cramer:

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} 1 & t \\ -1/t^2 & 1/t \end{vmatrix} = \frac{2}{t}, \quad \Delta_p(t) = \begin{vmatrix} 0 & t \\ -\frac{2}{t^3} & \frac{1}{t} \end{vmatrix} = \frac{2}{t^2}, \quad \Delta_q(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{t^2} & -\frac{2}{t^3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{t^3},$$

i veiem que l'EDO lineal homogènia que té $y_1(t) = t$, $y_2(t) = \frac{1}{t}$ com CFS per $t>0$ correspon a $p(t) = \frac{\Delta_p(t)}{\Delta(t)} = \frac{2/t^2}{2/t} = \frac{1}{t}$, $q(t) = \frac{\Delta_q(t)}{\Delta(t)} = \frac{-2/t^3}{2/t} = -\frac{1}{t^2}$; és a dir:

$$y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = 0, \quad t>0$$

9) Trobeu la solució general de les següents EDOs lineals no homogènies, sabent que en cada cas $y_1(t)$ és una **solució de l'EDO** homogènia associada. Useu el mètode de reducció de l'ordre per obtenir una segona solució independent i el mètode de variació de les constants per calcular una solució de l'EDO completa

(a) $t^2y''-ty'+y=4t\ln t$, $y_1(t)=t$, $t>0$

Solució. Comprovem primer que $y_1(t)=t$ és solució de l'EDO homogènia associada: $t^2y_1''(t)-ty_1'(t)+y_1(t)=-t+t=0$.

Apliquem el mètode de reducció de l'ordre. Per poder aplicar la fórmula que hem deduït, primer 'normalitzem'; és a dir, dividim pel coeficient de y'':

$$y''-\frac{1}{t}y'+\frac{1}{t^2}y=4\ln t.$$

Aleshores:

$$y_2(t)=y_1(t)\cdot\int\frac{dt}{y_1^2(t)}e^{-\int a_1(t)\,dt}\underset{\substack{a_1(t)=-\frac{1}{t}\\ y_1(t)=t.}}{=}t\cdot\int\frac{dt}{t^2}e^{\int\frac{dt}{t}}=t\cdot\int\frac{dt}{t^2}e^{\ln t}=$$

$$=t\int\frac{dt}{t}=t\ln t,\quad t>0$$

Per tant podem agafar $y_1(t)=t$, $y_2(t)=t\ln t$, $t>0$, com CFS de solucions de l'EDO homogènia.

Càlcul de la solució particular de l'EDO no homogènia:

$$y_p(t)=u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t)$$

amb $u_1'(t)$, $u_2'(t)$ solució del sistema: $\begin{pmatrix} t & t\ln t\\ 1 & \ln t+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{4\ln t}{t}\end{pmatrix}$, per tot $t>0$.

$$W(t)=\begin{vmatrix} t & t\ln t\\ 1 & \ln t+1\end{vmatrix}=\cancel{t\ln t}+t-\cancel{t\ln t}=t>0,\ \forall t>0 \text{ (obv.)}$$

$$W_1(t)=\begin{vmatrix} 0 & t\ln t\\ \frac{4\ln t}{t} & \ln t+1\end{vmatrix}=-4(\ln t)^2.$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & \frac{4\ln t}{t} \end{vmatrix} = 4\ln t$$

$$u_1'(t) = \frac{W_1(t)}{W(t)} = -4\,\frac{(\ln t)^2}{t}, \text{ d'on podem agafar } u_1(t) = -\frac{4}{3}(\ln t)^3$$

$$u_2'(t) = \frac{W_2(t)}{W(t)} = 4\,\frac{\ln t}{t}, \text{ d'on podem agafar } u_2(t) = 2(\ln t)^2$$

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = -\frac{4}{3}t(\ln t)^3 + 2t(\ln t)^3 = \frac{2}{3}t(\ln t)^3, \; t>0.$$

Per tant, podem escriure la solució general com

$$y(t) = c_1 t + c_2 t\ln t + \frac{2}{3}t(\ln t)^3, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ constants}, \; t>0. \qquad \square$$

b) $t y'' - 2(1+t)y' + (t+2)y = t^2+t, \; y_1(t) = e^t, \; t>0$ (Indicació $\int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)e^{-t}dt = -e^{-t}/t$),

Comprovem que, efectivament, $y_1(t) = e^t$ es solució de la corresponent EDO homogènia: $t y_1''(t) - 2(1+t)y_1'(t) + (t+2)y_1(t) = te^t - 2(1+t)e^t + (t+2)e^t = 0 \;\; \forall t$.

Busquem una segona solució per reducció de l'ordre:

$$y_2(t) = y_1(t)\int \frac{dt}{y_1^2(t)}\, e^{-\int a_1(t)dt} = e^t\int dt\, e^{-2t} e^{+\int\left(2+\frac{2}{t}\right)dt} = e^t\int e^{\ln t^2}dt$$

$$y_1(t) = e^t$$

$$a_1(t) = -2 - \frac{2}{t}$$

$= \frac{t^3}{3}e^t$. Agafem $y_2(t) = t^3e^t$ com 2ª solució i llavors la solució general de l'EDO homogènia vindrà donada per:

$$y_h(t) = c_1e^t + c_2t^3e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Solució particular de l'EDO no homogènia: mètode de variació de paràmetres:

$$y_p(t) = u_1(t)\,y_1(t) + u_2(t)\,y_2(t),$$

amb $u_1'(t)$, $u_2'(t)$ verificant el sistema:

$$\begin{pmatrix} e^t & t^3e^t \\ e^t & t^3e^t + 3t^2e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \end{pmatrix}$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & t^3e^t \\ e^t & t^3e^t+3t^2e^t \end{vmatrix} = \cancel{t^3e^{2t}} + 3t^2e^{2t} - \cancel{t^3e^{2t}} = 3t^2e^{2t}$$

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & t^3e^t \\ t+1 & * \end{vmatrix} = -t^3(t+1)\,e^t$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 \\ e^t & t+1 \end{vmatrix} = (t+1)\,e^t$$

$$u_1' = \frac{W_1(t)}{W(t)} = -\frac{t^3(t+1)\,e^t}{3t^2e^{2t}} = -\frac{t}{3}(t+1)\,e^{-t}$$

$$u_2' = \frac{W_2(t)}{W(t)} = \frac{(t+1)\,e^t}{3t^2e^{2t}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)e^{-t}$$

$$u_1(t) = -\frac{1}{3}\int (t^2+t)\,e^{-t}\,dt = \left\{\begin{array}{l} f = t^2+t \Rightarrow f' = 2t+1 \\ g' = e^{-t} \Rightarrow g = -e^{-t} \end{array}\right\} = \frac{1}{3}(t^2+t)\,e^{-t} - \frac{1}{3}\int (2t+1)\,e^{-t}\,dt$$

$$= \left\{\begin{array}{l} f = 2t+1 \Rightarrow f' = 2 \\ g' = e^{-t} \Rightarrow g = -e^{-t} \end{array}\right\} = \frac{1}{3}(t^2+t)\,e^{-t} + \frac{1}{3}(2t+1)\,e^{-t} - \frac{2}{3}\int e^{-t}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}(t^2+t)\,e^{-t} + \frac{1}{3}(2t+1)\,e^{-t} + \frac{2}{3}\,e^{-t} = \left(\frac{t^2}{3} + \frac{t}{3} + \frac{2}{3}t + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)e^{-t}$$

$$= \left(\frac{t^2}{3} + t + 1\right)e^{-t}.$$

$$u_2(t) = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)e^{-t}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{e^{-t}}{t}\,dt + \frac{1}{3}\int \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt = \left\{\begin{array}{l} f = e^{-t} \Rightarrow f' = -e^{-t} \\ g' = \frac{1}{t^2} \Rightarrow g = -\frac{1}{t} \end{array}\right\}$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}\int \frac{e^{-t}}{t}\,dt} - \frac{1}{3t}\,e^{-t} - \cancel{\frac{1}{3}\int \frac{e^{-t}}{t}\,dt} = -\frac{e^{-t}}{3t}.$$

I llavors s'obté la solució particular:

$$y_p(t) = u_1(t)\,y_1(t) + u_2(t)\,y_2(t) = \frac{t^2}{3} + t + 1 - \frac{t^2}{3} = t+1$$

(definida per tot $t \in \mathbb{R}$).

Aleshores, la solució general la podem escriure com:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t^3 e^t + t + 1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ constants}$$

i veiem que està definida per tot $t \in \mathbb{R}$. $\square$

c) $ty'' + 2y' + ty = t$, $y_1(t) = \dfrac{\cos t}{t}$, $t > 0$.

Solució. Comprovem que $y_1(t) = \dfrac{\cos t}{t}$ és solució de l'EDO lineal homogènia associada:

$$t\,y_1''(t) + 2y_1'(t) + t\,y_1(t) = t\,\frac{t^2(-t)\cos t + 2t^2\sin t + 2t\cos t}{t^4} - 2\,\frac{t\sin t + \cos t}{t^2} + t\,\frac{\cos t}{t}$$

$$= \cancel{-\cos t} + \cancel{\frac{2}{t}\sin t} + \cancel{\frac{2}{t^2}\cos t} - \cancel{\frac{2}{t}\sin t} - \cancel{\frac{2}{t^2}\cos t} + \cancel{\cos t} = 0.$$

Per calcular una 2ª solució de l'EDO homogènia li amb $y_1(t)$, apliquem la fórmula de reducció de l'ordre:

$$y_2(t) = \frac{\cos t}{t}\int \frac{t^2}{\cos^2 t}\, e^{-\int \frac{2}{t}dt}\,dt = \frac{\cos t}{t}\int \frac{t^2}{\cos^2 t}\, e^{\ln \frac{1}{t^2}}\,dt = \frac{\cos t}{t}\int \frac{dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{\cos t}{t}\tan t = \frac{\sin t}{t}$$

D'altra banda, es veu clarament "per inspecció" que una solució particular de l'EDO no homogènia és la recta $y_p(t) = 1$. Llavors podem expressar la solució general com:

$$y(t) = c_1 \frac{\cos t}{t} + c_2 \frac{\sin t}{t} + 1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ constants}, \ t \in \mathbb{R} \quad \square$$

d) $t^2 y'' + t y' + y = \dfrac{1}{\cos^3(\ln t)}$, $y_1(t) = \cos(\ln t)$, $t > 0$

Solució. Comprovem que $y_1(t)$ és solució de la corresponent EDO homogènia. En efecte:

$$t^2 y_1''(t) + t\,y_1'(t) + y_1(t) = \sin(\ln t) - \cos(\ln t) - \sin(\ln t) + \cos(\ln t) = 0$$

Busquem la 2ª solució li amb la fórmula de reducció de l'ordre:

$$y_2(t) = \cos(\ln t) \int \frac{1}{\cos^2(\ln t)} e^{-\int \frac{dt}{t}} dt = \cos(\ln t) \int \frac{1/t}{\cos^2(\ln t)} dt$$

$$= \cos(\ln t)\, tg(\ln t) = \sin(\ln t), \quad t>0.$$

A continuació, calculem una solució particular pel mètode de variació de paràmetres:

$$\begin{pmatrix} \cos(\ln t) & \sin(\ln t) \\ -\frac{\sin(\ln t)}{t} & \frac{\cos(\ln t)}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1/t^2}{\cos^3(\ln t)} \end{pmatrix}, \quad t>0$$

$$W(t) = \frac{1}{t}, \quad W_1(t) = -\frac{\frac{1}{t^2}\sin(\ln t)}{\cos^3(\ln t)}, \quad W_2(t) = \frac{\frac{1}{t^2}\cos(\ln t)}{\cos^3(\ln t)} = \frac{1/t^2}{\cos^2(\ln t)}$$

$$u_1'(t) = \frac{-\frac{1}{t}\sin(\ln t)}{\cos^3(\ln t)} \Longrightarrow u_1(t) = \frac{-1/2}{\cos^2(\ln t)}$$

$$u_2'(t) = \frac{1/t}{\cos^2(\ln t)} \Longrightarrow u_2(t) = tg(\ln t)$$

Així, obtenim la solució particular:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = \frac{-1/2}{\cos(\ln t)} + \frac{\sin^2(\ln t)}{\cos(\ln t)}$$

$$= \frac{1/2}{\cos(\ln t)} - \cos(\ln t).$$

De fet, podem agafar: $y_p(t) = \frac{1/2}{\cos(\ln t)}$, $t>0$; ja que $\cos(\ln t)$ és solució de l'homogènia. Llavors, podem agafar i escriure la solució general de l'EDO no homogènia com

$$y(t) = c_1\cos(\ln t) + c_2\sin(\ln t) + \frac{1/2}{\cos(\ln t)}, \quad t>0$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries. □

10. Resolució d'EDOs lineals i homogènies de segon ordre i a coeficients constants (breu recordatori).

Considerem l'EDO lineal $ay''+by'+cy=0$ on $a,b,c \in \mathbb{R}$ i denotem per $P(\lambda)=a\lambda^2+b\lambda+c$ la seva equació característica. Si λ_1 i λ_2 són les arrels de $P(\lambda)$, tenim:

(i) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, llavors $y_1(t)=e^{\lambda_1 t}$ i $y_2(t)=e^{\lambda_2 t}$ formen un conjunt fonamental de solucions de l'EDO.

(ii) Si $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$, llavors $y_1(t)=e^{\lambda t}$ i $y_2(t)=te^{\lambda t}$ formen un conjunt fonamental de solucions.

(iii) Si $\lambda_1=\alpha+i\beta$ i $\lambda_2=\alpha-i\beta$ són arrels complexes conjugades, llavors $y_1(t)=e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ i $y_2(t)=e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ formen un conjunt fonamental de solucions.

Useu aquests resultats i la fórmula de variació de les constants per trobar la solució general de les següents EDOs lineals no homogènies.

(a) $y''+y'=\dfrac{1}{1+e^t}$. (Indicació: La primitiva de $\dfrac{e^t}{1+e^t}$ és immediata i la de $\dfrac{1}{1+e^t}$ també si expresseu la funció en termes de l'anterior.

Solució. Equació característica: $\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1)=0$: d'on $\lambda=0$ i $\lambda=-1$ són les arrels característiques. Llavors el CFS de l'EDO homogènia associada és $y_1(t)=1$, $y_2(t)=e^{-t}$.

Per trobar la solució particular apliquem el mètode de variació dels paràmetres (o de variació de les constants). Així, busquem una solució particular de la forma.

$y_p(t) = u_1(t)\,y_1(t) + u_2(t)\,y_2(t)$, amb u_1, u_2 t.q.

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^t} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^t} \end{pmatrix}$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} \end{vmatrix} = -e^{-t},\quad W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{1+e^t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-t}}{1+e^t}$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+e^t} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+e^t},$$

$$u_1' = \frac{W_1(t)}{W(t)} = \frac{1}{1+e^t} \Rightarrow u_1(t) = \int \frac{dt}{1+e^t} = \int\left(1 - \frac{e^t}{1+e^t}\right)dt = t - \ln(1+e^t).$$

$$u_2' = \frac{W_2(t)}{W(t)} = \frac{-e^t}{1+e^t} \Rightarrow u_2(t) = \int \frac{-e^t\,dt}{1+e^t} = -\ln(1+e^t).$$

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = t - \ln(1+e^t) - e^{-t}\ln(1+e^t) = t - (1+e^{-t})\ln(1+e^t).$$

Solució general:

$$y(t) = c_1\cdot 1 + c_2\cdot e^{-t} + t - (1+e^{-t})\ln(1+e^t),\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ ctnts.}$$

b) $y'' - y = e^t \sin t$. (Indicació: $\int e^{2t}\sin t\,dt = -\frac{1}{5}e^{2t}(\cos t - 2\sin t)$).

Solució. Equació característica: $\lambda^2 - 1 = 0$. Arrels: $\lambda = \pm 1$. Aleshores el Conjunt fonamental de solucions de l'EDO homogènia és: $y_1(t) = e^{-t}$, $y_2(t) = e^t$.

Per trobar la solució particular apliquem el mètode de variació de paràmetres (o variació de les constants). Així, busquem una solució particular de la forma.

$$y_p(t) = u_1(t)\,y_1(t) + u_2(t)\,y_2(t)$$

amb u_1', u_2' satisfent:

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{t} \\ -e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t}\sin t \end{pmatrix}$$, per tot $t \in \mathbb{R}$. Resolent per Cramer:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{t} \\ -e^{-t} & e^{t} \end{vmatrix} = 2, \quad W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & e^{t} \\ e^{t}\sin t & e^{t} \end{vmatrix} = -e^{2t}\sin t, \quad W_2(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} & e^{t}\sin t \end{vmatrix} = \sin t$$

d'on:

$$u_1'(t) = \frac{W_1(t)}{W(t)} = -\frac{e^{2t}}{2}\sin t, \quad u_2'(t) = \frac{W_2(t)}{W(t)} = \frac{\sin t}{2}$$

$$\int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,dt = \left\{ \begin{array}{ll} f = \sin(\beta t) \Rightarrow f' = \beta\cos(\beta t) \\ g' = e^{\alpha t} \Rightarrow g = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t} \end{array} \right\} = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin(\beta t) - \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,dt$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} f = \cos(\beta t) \Rightarrow f' = -\beta\sin(\beta t) \\ g' = e^{\alpha t} \Rightarrow g = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t} \end{array} \right\} = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}\sin(\beta t) - \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha}\cos(\beta t) - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,dt$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,dt = \frac{\alpha\sin(\beta t) - \beta\cos(\beta t)}{\alpha^2}e^{\alpha t}$$

$$\Leftrightarrow \int e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,dt = \frac{\alpha\sin(\beta t) - \beta\cos(\beta t)}{\alpha^2+\beta^2}$$

$\alpha = 2,\ \beta = 1$: $\displaystyle\int e^{2t}\sin t\,dt = e^{2t}\frac{2\sin t - \cos t}{5} = -\frac{e^{2t}}{5}(\cos t - 2\sin t)$

$$u_1(t) = -\frac{1}{2}\int e^{2t}\sin t\,dt = \frac{e^{2t}}{10}(\cos t - 2\sin t).$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t$$

Solució general:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

$$= c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} - \frac{e^{t}}{5}(2\cos t + \sin t).$$ $\square$

(c) $y''+2y'+y=te^t$.

Equació característica: $m^2+2m+1=(m+1)^2=0$, d'on tenim que les arrels són $m=-1$ (arrel doble). Aleshores un conjunt fonamental de solucions de l'EDO homogènia és $y_1(t)=e^{-t}$, $y_2(t)=te^{-t}$.

Per trobar la solució particular de l'EDO no homogènia, apliquem el mètode de variació de paràmetres. Així, buscarem una solució particular de la forma $y_p(t)=u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t)$; amb $u_1'(t)$, $u_2'(t)$ satisfent el sistema:

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t}-te^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ te^t \end{pmatrix}$$

$$W(t)=\begin{vmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t}-te^{-t} \end{vmatrix}=e^{-2t}\cancel{-te^{-2t}}\cancel{+te^{-2t}}=e^{-2t}$$

$$W_1(t)=\begin{vmatrix} 0 & te^{-t} \\ te^t & e^{-t}-te^{-t} \end{vmatrix}=-t^2,\quad W_2(t)=\begin{vmatrix} e^{-t} & 0 \\ -e^{-t} & te^t \end{vmatrix}=t$$

$$u_1'(t)=\frac{W_1(t)}{W(t)}=-\frac{t^2}{e^{-2t}}=-t^2e^{2t},\quad u_2'(t)=\frac{W_2(t)}{W(t)}=\frac{t}{e^{-2t}}=te^{2t}$$

$$u_2(t)=\int te^{2t}dt=\left\{\begin{array}{l} f=t\Rightarrow f'=1 \\ g'=e^{2t}\Rightarrow g=\frac{1}{2}e^{2t} \end{array}\right\}=\frac{t}{2}e^{2t}-\frac{1}{2}\int e^{2t}dt=\frac{t}{2}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{2t},$$

$$u_1(t)=-\int t^2e^{2t}dt=\left\{\begin{array}{l} f=t^2\Rightarrow f'=2t \\ g'=e^{2t}\Rightarrow g=\frac{1}{2}e^{2t} \end{array}\right\}=-\frac{t^2}{2}e^{2t}+\int te^{2t}dt=\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\right)e^{2t}$$

Solució particular:

$$\begin{aligned} y_p(t)&=u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t) \\ &=e^t\left(-\frac{t^2}{2}+\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\right)+e^t\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{4}\right)=\frac{e^t}{4}(t-1) \end{aligned}$$

Solució general:

$$y(t)=c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+y_p(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}+\frac{e^t}{4}(t-1).$$

□

d) $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2t}}{\cos t}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Equació característica $m^2 - 4m + 5 = 0$. Arrels $m = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \dfrac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$.

Aleshores podem agafar com conjunt fonamental de solucions:

$$y_1(t) = e^{2t}\cos t, \qquad y_2(t) = e^{2t}\sin t.$$

Apliquem el mètode de variació de paràmetres per trobar una solució particular de l'EDO no homogènia.

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{2t}\cos t & e^{2t}\sin t \\ 2e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t & 2e^{2t}\sin t + e^{2t}\cos t \end{vmatrix} = 2e^{2t}\sin t\cos t + e^{4t}\cos^2 t - 2e^{2t}\sin t\cos t + e^{4t}\sin^2 t = e^{4t}.$$

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & e^{2t}\sin t \\ \dfrac{e^{2t}}{\cos t} & * \end{vmatrix} = -e^{4t}\operatorname{tg} t$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^{2t}\cos t & 0 \\ * & \dfrac{e^{2t}}{\cos t} \end{vmatrix} = e^{4t}$$

$$u_1'(t) = \frac{W_1(t)}{W(t)} = -\operatorname{tg} t \Rightarrow u_1(t) = \ln(\cos t), \quad -\tfrac{\pi}{2} < t < \tfrac{\pi}{2}$$

$$u_2'(t) = \frac{W_2(t)}{W(t)} = 1 \Rightarrow u_2(t) = t$$

Solució particular.

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = e^{2t}\cos t\,\ln(\cos t) + te^{2t}\sin t, \quad -\tfrac{\pi}{2} < t < \tfrac{\pi}{2}$$

Solució general:

$$y(t) = c_1 e^{2t}\cos t + c_2 e^{2t}\sin t + e^{2t}\left(\cos t \cdot \ln(\cos t) + t\sin t\right)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constants, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ $\square$