Classe 20/02/2014

13 Sigui $f(x,y) = \dfrac{\cos(xy)-1}{x^2y^2}$ si $xy \neq 0$ i $f(x,y) = a$ si $xy = 0$

(a) Per a quin valor de $a \in \mathbb{R}$ és f contínua en $(0,0)$?

(b) Per a aquest valor de a, discutiu la continuïtat de f en $\mathbb{R}^2$?

Solució:

$f(x,y) = (g \circ h)(x,y)$ amb $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donada per $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto h(x,y) = xy \in \mathbb{R}$ i $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donada per $t \in \mathbb{R} \mapsto g(t) = \begin{cases} \frac{\cos t - 1}{t^2}, & t \neq 0 \\ a, & t = 0 \end{cases}$

En efecte:

Si $xy \neq 0$: $(g \circ h)(x,y) = g(h(x,y)) = g(x \cdot y) \underset{xy \neq 0}{=} \dfrac{\cos(xy)-1}{x^2y^2} = f(x,y)$

Si $xy = 0$: $(g \circ h)(x,y) = g(h(x,y)) = g(0) \underset{xy=0}{=} a = f(x,y)$

D'altra banda, tenim que, per a $a = -\frac{1}{2}$, $g(t)$ és una funció contínua. Obviament ho és per $t \neq 0$ (criteris de generació), mentre que, en $t = 0$:

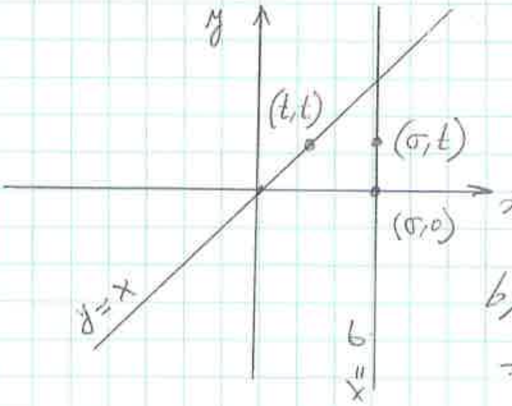
$$\lim_0 g(t) = \lim_0 \frac{\cos t - 1}{t^2} = \lim_0 \frac{\cancel{1} - \frac{t^2}{2!} + R_3(t) - \cancel{1}}{t^2} = \lim_0 \left(-\frac{1}{2} + \frac{R_3(t)}{t^2}\right) = -\frac{1}{2} = g(0).$$

Per tant, per $a = -\frac{1}{2}$, $f = g \circ h$ és la composició de dues funcions contínues $h(x,y) = xy$ i $g(t) = \begin{cases} \frac{\cos t - 1}{t^2}, & t \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & t = 0 \end{cases}$. Aleshores f és una funció contínua en tot $\mathbb{R}^2$.

Per contra, si $a \neq -\frac{1}{2}$, f no és contínua per cap punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $xy = 0$. En efecte, considerem punts de la forma $(\sigma, 0) \in \mathbb{R}^2$, $\sigma \neq 0$ i calculem el límit de f en aquests punts segons la recta $x = \sigma$: $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \sigma\}$.

$$\lim_{(\sigma,0),r} f = \lim_{t \to 0} f(\sigma, t) = \lim_{t \to 0} \frac{\cos(\sigma t) - 1}{\sigma^2 t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{-\sin^2\left(\frac{\sigma t}{2}\right)}{2\left(\frac{\sigma t}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \neq f(\sigma,0) = a$$

Això prova que f no és contínua en els punts $(x,y) = (\sigma,0)$, $\sigma \neq 0$. Anàlogament es pot deduir que f tampoc no és contínua en punts sobre l'eix y, de la forma $(0,\sigma)$, $\sigma \neq 0$. Per últim, comprovem que f no és contínua a l'origen quan $a = -\frac{1}{2}$ calculant el límit en aquest punt, segons la recta $y=x$.



$$\lim_{(0,0),\{y=x\}} f = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t^2 - 1}{t^4}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin^2 \frac{t^2}{2}}{2\left(\frac{t^2}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \neq f(0,0) = a.$$

b) Del que s'ha dit a l'apartat (a), f és contínua en $\mathbb{R}^2$ si $a = -1$, mentre que si $a \neq -\frac{1}{2}$ f és contínua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.

(14) Per a les següents funcions definides a trossos discutir la seva continuïtat en $\mathbb{R}^2$.

(a) $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$ si $xy \neq 0$ i $f(x,y) = 1$ si $xy = 0$.

Podem procedir com al problema anterior. Considerem $h(x,y) = xy$ i $g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t\neq 0 \\ 1, & t=0 \end{cases}$ i comprovem que $f(x,y) = (g\circ h)(x,y) = g(h(x,y))$. En efecte:

$$xy \neq 0 : (g\circ h)(x,y) = g(h(x,y)) = g(xy) \underset{xy\neq 0}{=} \frac{\sin(xy)}{xy} = f(x,y).$$

$$xy = 0 : (g\circ h)(x,y) = g(h(x,y)) = g(xy) \underset{xy=0}{=} g(0) = 1 = f(x,y)$$

Llavors, com que $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és una funció contínua i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és també una funció contínua la seva composició $f = g\circ h$ és una funció contínua en $\mathbb{R}^2$. □

(b) $f(x,y) = \text{màx}\{x,y\}$ si $x > 0$ i $f(x,y) = 0$ si $x \leq 0$.

Considerem els conjunts: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$. Veiem que $A \cup B = \mathbb{R}^2$ i tenim, d'una banda que f és contínua en $\mathring{A}$ i $\mathring{B}$. En efecte, si $(a,b) \in \mathring{A}$ llavors:

$$\lim_{(a,b)} f = \lim_{(a,b)} \text{màx}\{x,y\} = \lim_{(a,b)} \left(\frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}\right) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

$$= \text{màx}\{a,b\} = f(a,b)$$

$(a,b) \in \mathring{B}$, llavors: $\lim\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{(a,b)} 0 = f(a,b)$

Sobre els punts de la forma $(x,y)=(0,b)$, veiem que $(0,b)\in\overline{A}$ i $(0,b)\in\overline{B}$ i d'altra banda:

$$\lim_{(0,b),A} f = \lim_{(0,b)} f\Big|_A = \lim_{(0,b)} \text{màx}\{x,y\} = \lim_{(0,b)} \left(\frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}\right) = \begin{cases} \frac{b}{2}+\frac{b}{2} = b, & \text{si } b>0 \\ 0, & \text{si } b\leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(0,b),B} f = \lim_{(0,b)} f\Big|_B = \lim_{(0,b)} 0 = 0$$

i aleshores tenim:

$b>0$: $\lim\limits_{(0,b),A} f = b \neq \lim\limits_{(0,b),B} f = 0 \Rightarrow f$ no és contínua als punts $(0,b)$, $b\neq 0$.

$b\leq 0$: $\lim\limits_{(0,b),} f = 0 = \lim\limits_{(0,b),B} f \Rightarrow \lim\limits_{(0,b)} f = 0 = f(0,b)$

Llavors, veiem que f no és contínua als punts (x,y) amb $x=0$, $y>0$ ó dit d'altra manera f és contínua a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=0, y>0\}$. $\square$

(c) $f(x,y)=x$, si $|x|\leq|y|$ i $f(x,y)=y$ si $|x|>y$

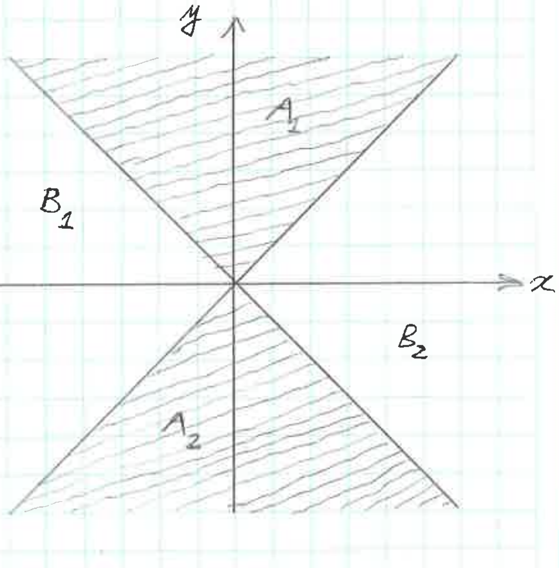
Conside: els conjunts $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq|y|\}$ i $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|<|y|\}$.

Obviament $A\cup B=\mathbb{R}^2$ i f és contínua en $\mathring{A}$ i $\mathring{B}$. En efecte:

$(a,b)\in\mathring{A}$, llavors: $\lim\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{(a,b)} x = a = f(a,b)$

$(a,b)\in\mathring{B}$, llavors: $\lim\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{(a,b)} y = b = f(a,b)$

Considerem, a continuació, punts de la forma $(x,y)=(a,a) \in \partial A=\partial B$ i calculem els límits en aquests punts segons els conjunts A i B (notem que $(a,a)\in\overline{A}$ i $(a,a)\in\overline{B}$ $\forall a\in\mathbb{R}$).



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{(a,a),A} f(x,y) = \lim\limits_{(a,a)} f\big|_A = \lim\limits_{(a,a)} x = a \\ \\ \lim\limits_{(a,a),B} f(x,y) = \lim\limits_{(a,a)} f\big|_B = \lim\limits_{(a,a)} y = a\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{d'on:} \\ \lim\limits_{(a,a),A} f = a = \lim\limits_{(a,a),B} f \Rightarrow \lim\limits_{(a,a)} f = a,\end{array}$$

ja que $A \cup B = \mathbb{R}^2$, i com que $f(a,a) = a$, tenim que f és contínua sobre els punts de la recta $y=x$.

Considerem, a continuació els punts de la forma: $(x,y) = (a,-a)$ amb $a \neq 0$ i calculem els límits segons els conjunts A i B (notem que $(a,-a) \in \overline{A}$ i $(a,-a) \in \overline{B}$ $\forall a$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{(a,-a),A} f(x,y) = \lim\limits_{(a,-a)} f\big|_A = \lim\limits_{(a,-a)} x = a \\ \\ \lim\limits_{(a,-a),B} f(x,y) = \lim\limits_{(a,-a)} f\big|_B = \lim\limits_{(a,-a)} y = -a\end{array}\right\} : \lim\limits_{(a,-a),A} f = a \neq -a = \lim\limits_{(a,-a),B} f \quad \forall a \neq 0.$$

Aleshores veiem que f no és contínua sobre els punts de la recta $y=-x$ diferents de l'origen

En resum: f és contínua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=-x, x \neq 0\}$. □

d) $f(x,y) = x$, si $x^2+y^2 \leq 1$ i $f(x,y) = y$ si $x^2+y^2 > 1$.

Considerem els conjunts $\overline{B}^2_1(0,0)$ i $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}^2_1(0,0)$. Obviament, f és contínua per tot $(x,y) = (a,b)$ que pertany a l'interior de $\overline{B}^2_1(0,0)$ i per tot $(x,y) = (a,b)$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}^2_1(0,0)$.

En efecte:

$$(x,y) = (a,b) \in B^2_1(0,0) : \lim_{(a,b)} f = \lim_{(a,b)} x = a = f(a,b).$$

$$(x,y) = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}^2_1(0,0) : \lim_{(a,b)} f = \lim_{(a,b)} y = b = f(a,b).$$

Per als punts $(x,y) = (a,b) \in \partial \overline{B}^2_1(0,0)$, calculem els límits segons els conjunts $A := \overline{B}^2_1(0,0)$ i $B := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}^2_1(0,0)$

$$\lim_{(a,b)} f(x,y) = \lim_{(a,b)} f\big|_A = \lim_{(a,b)} x = a,$$

$$\lim_{(a,b),B} f = \lim_{(a,b)} f\Big|_B = \lim_{(a,b)} y = b.$$

Per tant, si $(a,b) \in \partial B_1^2(0,0)$ amb $a \neq b$ $\lim\limits_{(a,b),A} f = a \neq b = \lim\limits_{(a,b),B} f$

i llavors f no és contínua en aquests punts. En canvi, pels punts $(a,b) \in \partial B_1^2(0,0)$ amb $a=b$ i.e.: $(a,b)=(a,a)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ i $(a,b)=(a,a)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, tenim:

$$\lim_{(a,a),A} f = a = \lim_{(a,a),B} f \text{ amb } a = \pm\sqrt{2}/2. \text{ i llavors } \lim_{(a,a)} f = a = f(a,a), a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resumint, f no és contínua als punts $\partial B_1^2(0,0) \setminus \left\{\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right), \left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)\right\}$. □

Propera classe, problemes: 16, 20, 21, 23 (Derivació).