Càlcul 2. Problemes — Classe 18·02·2014

Continuïtat a $\mathbb{R}^n$: 3^h a TEORIA, 2^h a problemes

(1^a hora).

"Recordem"

$\Omega \in \mathbb{R}^n$. Llavors (def.):

1| $a \in \mathbb{R}^n$ és un punt interior de $\Omega \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon^n(a) \subset \Omega$

2| $a \in \mathbb{R}^n$ és un punt exterior de $\Omega \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon^n(a) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega := \Omega^c$.

3| $a \in \mathbb{R}^n$ és un punt frontera de $\Omega \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ és $B_\epsilon^n(a) \cap \Omega \neq \phi \wedge B_\epsilon^n(a) \cap \Omega^c \neq \phi$

Notació.

$\mathring{\Omega} = \{x \in \Omega : x$ punt interior de $\Omega\} \equiv$ "interior de Ω".

$ext\,\Omega = \{x \in \Omega : x$ punt exterior de $\Omega\} \equiv$ "exterior de Ω".

$\partial\Omega = \{x \in \Omega : x$ punt frontera de $\Omega\} \equiv$ "frontera de Ω".

Definició (adherència o clausura d'un conjunt). Donat $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, la <u>adherència o clausura</u> de Ω és $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$.

Proposició: (i) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ obert $\Leftrightarrow \Omega = \mathring{\Omega}$.
(ii) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tancat $\Leftrightarrow \Omega = \overline{\Omega}$.

Exemple: $\overline{B}_r^n$ és l'adherència de $B_r^n(x)$, i.e.: $\overline{B_r^n(x)} = \overline{B}_r^n(x)$.

Def. (conjunt acotat). Direm que un conjunt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ és acotat $\Leftrightarrow \exists R > 0 : \Omega \subseteq B_R(0)$
Def. (" compacte). " " " " $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ " compacte $\Leftrightarrow \Omega$ és tancat i acotat.

Problemes.

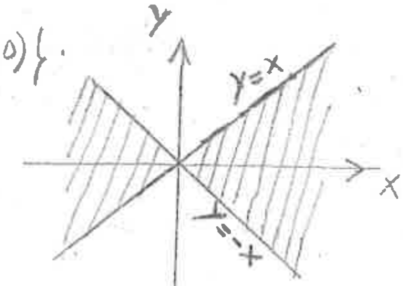
(2) Doneu el domini de definició de les funcions següents.

a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{x^2+y^2-4}$. $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9,\ x^2+y^2 \neq 4\} = \overline{B}_3(0,0) \setminus \partial B_2(0,0)$.

b) $f(x,y) = \sqrt{16-4x^2-y^2}$. El domini ve donat pels punts $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16-4x^2-y^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
$(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{4^2} \leq 1$. (Clausura de l'el·lipse $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$).

(c) $f(x,y) = \left(\ln(x\cdot y),\ \sqrt{4-x^2-y^2}\right)$. $D(f) = \overline{B}^2_2(0,0) \cap \left(\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{smallmatrix} x>0 \\ y>0 \end{smallmatrix}\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \begin{smallmatrix} x<0 \\ y<0 \end{smallmatrix}\right\}\right)$

(d) $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$. $D(f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq x\} \setminus \{(0,0)\}$.



Domini de $f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$: el punt $(0,0) \notin D(f)$.

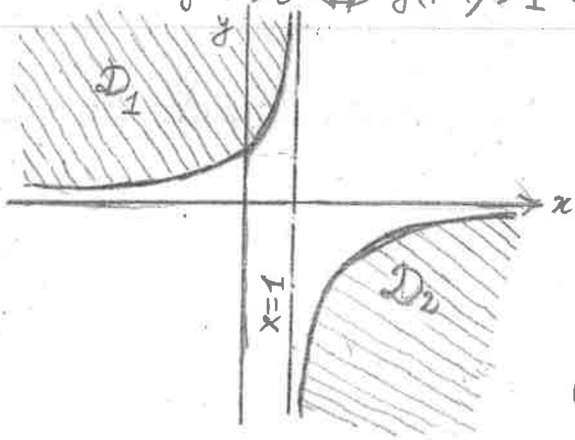
(e) $f(x,y) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$. $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(f) $f(x,y) = \sqrt{y-xy-1}$.

(Indicació: Determinem el conjunt $y-xy-1=0$).

El domini de f vindrà donat pels punts $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$x-xy-1 \geqslant 0 \iff y(1-x) \geqslant 1 \iff \begin{cases} y \geq \frac{1}{1-x}, & x<1 \\ y \leq \frac{1}{1-x}, & x>1 \end{cases}$$



Domini de f: $D(f) = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$

Aleshores:

$$D(f) = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \geq \frac{1}{1-x}, x<1\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \leq \frac{1}{1-x}, x>1\right\}.$$

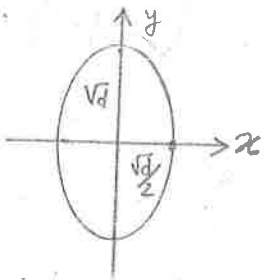
(g) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$. $D(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 9\} = \overline{B}^3_3(0,0,0)$.

(3) Troben les corbes de nivell de les següents funcions i diguem quin és el seu rang (i.e. el conjunt de valors que prenen).

a) $f(x,y) = x^2+y^2$. $x^2+y^2 = d$ amb $d \geq 0$: família de circumferències de radi $d^{1/2}$ amb $d \geq 0$, i centre $(0,0)$. $R(f) = [0,+\infty)$.

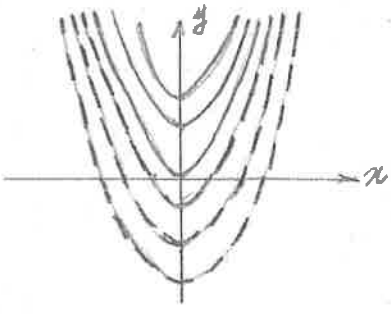
b) $f(x,y) = 4x^2+y^2$. $4x^2+y^2 = d \iff \begin{cases} (x,y)=(0,0), & \text{si } d=0 \\ \dfrac{x^2}{(\sqrt{d}/2)^2} + \dfrac{y^2}{(\sqrt{d})^2} = 1, & \text{si } d>0 \end{cases}$: el·lipse amb centre l'origen i semieixos sobre els eixos coordenats de longitud $\sqrt{d}/2$ i $\sqrt{d}$.

El rang de f ve donat pels valors possibles de d. Llavors: $R(f) = [0,+\infty)$.



Corba de nivell $4x^2+y^2 = d$, amb $d>0$.

c) $f(x,y) = x^2-y$. $x^2-y = d \iff y = x^2-d$, $d\in\mathbb{R}$. Paràbolas amb eix donat per l'eix vertical



Corbes de nivell de $f(x,y) = x^2-y$: les línies continues corresponen a $d \leq 0$ i les línies "a trossos" corresponen a corbes de nivell amb $d>0$

d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, definida per $(x,y) \neq (0,0)$ (Indicació: aïlleu y en termes de x sobre cada corba de nivell).

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = d \underset{(x,y)\neq(0,0)}{\Leftrightarrow} xy = d(x^2+y^2) \Leftrightarrow dy^2 - xy + dx^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq d < 0,\ 0 < d \leq \frac{1}{2} & y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4d^2}}{2d} x, \text{ amb } x \neq 0 \\ d = 0: & \begin{cases} x>0, y=0;\ x<0, y=0 \\ x=0, y>0;\ x=0, y<0 \end{cases} \end{cases}$$

Aleshores, les corbes de nivell són semirectes per l'origen amb pendent $m = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4d^2}}{2d}$, si $0 < d \leq \frac{1}{2}$ ó $-\frac{1}{2} \leq d < 0$, i $x>0, y=0$; $x<0, y=0$; $x=0, y>0$; $x=0, y<0$, si $d=0$:

$$L^{\pm}_{d,\gtrless}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4d^2}}{2d}, x \gtrless 0 \right\}, \text{ si } -\tfrac{1}{2} \leq d < 0 \text{ ó } 0 < d \leq \tfrac{1}{2}$$

$$L^1_{0,\gtrless}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \lessgtr 0, y = 0 \right\},\ L^2_{0,\gtrless}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \gtrless 0 \right\}, \text{ si } d = 0.$$

D'altra banda, com que $d \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ és clar que $R(f) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

e) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = d$, definida per a $(x,y) \neq (0,0)$. (Indicació. Feu com (d))

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = d \underset{(x,y)\neq(0,0)}{\Leftrightarrow} x^2-y^2 = d(x^2+y^2) \Leftrightarrow (1+d)y^2 = (1-d)x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1-d}{1+d}}\, x,\ x \neq 0,$$

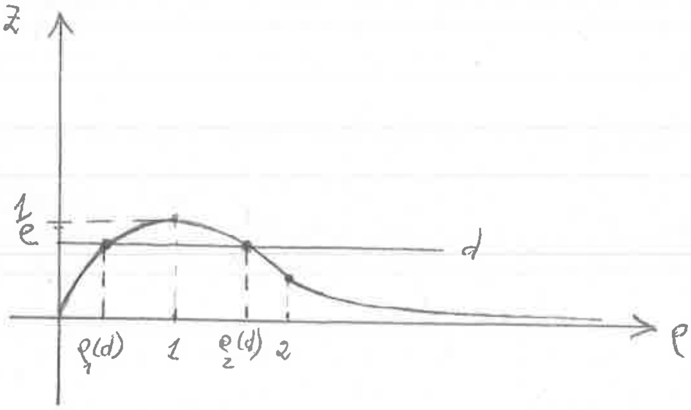
per $-1 < d \leq 1$. D'altra banda, si $d=-1$, llavors les corbes de nivell són les dues semirectes sobre l'eix y: $y>0, x=0$ i $y<0, x=0$. Escrivim:

$$L^{\pm}_{d,\gtrless}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm\sqrt{\frac{1-d}{1+d}}\, x,\ x \gtrless 0 \right\}, \text{ per } -1 < d \leq 1.$$

$$L_{-1,\gtrless}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \gtrless 0 \right\}, \text{ per } d = -1.$$

f) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$ (Indicació: relacioneu els valors de f amb els de la funció $h(\rho) = \rho e^{-\rho}$).

Clarament $f(x,y) = h(\rho)$ $\forall (x,y) : x^2+y^2 = \rho$. Així veiem que els valors que pren la funció f en el punt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ només depèn de la distància de (x,y) a l'origen, amb la qual cosa tindrem que les corbes de nivell de f seran circumferències amb centre $(x,y) = (0,0)$ i radi $\sqrt{\rho}$, $\rho \geq 0$, i.e., de la forma: $L_d(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = \rho\}$. Quina relació hi ha entre ρ i d? En altres paraules: donat un "nivell", d, quin és el valor del radi $r = \sqrt{\rho}$ de les corbe(s) de nivell corresponent(s). Això ho podem deduir de la gràfica de la funció $z = h(\rho)$.



Veiem que per a cada valor del nivell (o l'alçada $0<d<1/e$, hi ha 2 valors de $0<\rho_1(d)<1<\rho_2(d)$. Llavors, a cada $0<d<1/e$ li corresponen dues corbes de nivell, circumferències en aquest cas, $x^2+y^2=\rho_1(d)$ i $x^2+y^2=\rho_2(d)$, de radis $0<\rho_1(d)^{1/2}<1<\rho_2(d)^{1/2}$ respectivament.

$z=h(\rho)=\rho e^{-\rho}\left(=(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}=f(x,y)\right)$, $\rho>0$. Derivem dos cops per estudiar el creixement i la convexitat de h:

$h'(\rho)=(1-\rho)e^{-\rho}>0$: creixent per $0<\rho<1$

<0 : decreixent per $\rho>1$, i té un màxim per $\rho=1$ on val $h(1)=1/e$.

$h''(\rho)=-e^{-\rho}-(1-\rho)e^{-\rho}=(\rho-2)e^{-\rho}>0$: convexa per $\rho>2$ (+)

<0 : còncava per $0<\rho<2$. Amb un punt d'inflexió

a $\rho=2$ on la funció val $h(2)=2/e^2$.

A més $\lim_{\rho\to+\infty} h(\rho)=\lim_{\rho\to+\infty}\rho e^{-\rho}=0$, la qual cosa implica que $z=0$ és una asímptota en $+\infty$.

Amb aquestes dades veiem que la gràfica de la funció $z=h(\rho)$ té la forma de la figura. Per al càlcul pràctic de $\rho_{1,2}(d)$ a partir d'una $0<d<1/e$ donada hem de resoldre l'equació trascendent $h(\rho)=\rho e^{-\rho}=d \Leftrightarrow$ trobar $h^{-1}(d)$. Això ho podem calcular mitjançant algun mètode iteratiu per trobar zeros d'equacions, com és el donat pel llistat de la funció Matlab de la pàgina 12. A la següent taula donem els valors de ρ_1 i ρ_2 per $d=0.1, 0.2$ i 0.3 ($<1/e=0.36788$) obtinguts amb aquesta funció.

	$\rho_1(d)$	$\rho_2(d)$
$d=0.1$	0.1118325592	3.5771520640
$d=0.2$	0.2591711018	2.5426413578
$d=0.3$	0.4894022272	1.7813370234

Fent:

>> W(0.1,0.1) % això dóna $\rho_1(0.1)$ (convergència en 4 iteracions)

>> W(0.1,1.5) % això dóna $\rho_2(0.1)$ (" " 4 iteracions), etc.

```
function [rho,Err] = W(d,rho)
% INPUT:
%   d: nivel de la curva. 0<d < 1/exp(1)= 0.36788.
% rho: Inicialmente, valor aproximado de rho: si 0<rho<1 obtenemos, a la
%      salida, 0 < rho_1(d) < 1. Si rho > 1 Obtenemos, a la salida,
%      rho_2(d) > 1 (Siempre que el m\'etodo converja).
%
% OUTPUT
% rho: Si el método converge, rho_i(d), i=1,2, con
%      0 < rho_1(d)< 1 <rho_2(d).
% Err: Valor absoluto de h(rho)-d al final del proceso. Esto es, cuando
%      rho es t.q. |h(rho -d| < Tol, donde Tol es la tolerancia del error
%      fijada en el programa en 1.0e-16.

% Author: DEPT. MATEMATICA APLICADA I, UPC
% Created: 2014-02-15

dmax=1/exp(1);
text1='       0 < d < 1/exp(1) = %22.14e,\n';
text2='       0< rho < 1 ó rho > 1.\n';
text=[text1,text2];

if nargin < 2 % Comprobamos que los argumentos sean correctos...
  fprintf('ERROR: FALTAN ARGUMENTOS.\nUSE,\n');
  fprintf('       >> [rho,d]=W(d,rho)\nCON,\n');
  fprintf(text,dmax);
  return;
elseif  (d < 0 || rho < 0)
  fprintf('ERROR: d, rho HAN DE SER > 0, CON,\n');
  fprintf(text,dmax);
  return;
end

Nitm=20;
Tol=1.e-16;
for i=0:Nitm %iteraciones del método de Newton
    err = rho*exp(-rho)-d;
    Abserr=abs(err);
    fprintf('ITER: %3d RHO = %22.14e ERR = %10.5e\n',i,rho,Abserr);
    if Abserr < Tol
       fprintf('----- El METODO CONVERGIO EN %2d ITERACIONES:\n',i);
       fprintf('      RHO = %22.14e\n',rho);
       fprintf('      ERR = %22.7e\n',Abserr);
       return;
    else
       rho=rho-err/((1-rho)*exp(-rho));
    end
end
fprintf('Error: no hay convergencia en %2d iteraciones\n',Nitm);
endfunction
```

Resumint: $\mathcal{L}^i_d(f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = \rho_i(d)\}$, $i=1,2$; amb $0<d<\frac{1}{e}$,

$\mathcal{L}_0(f)=\{(0,0)\}$, $\mathcal{L}_{\frac{1}{e}}(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

i per últim tenim que el valor del rang de la funció és $R(f)=[0,\frac{1}{e}]$.

(8) Per a les següents funcions, troben els valors per a $\delta(\varepsilon)$ ("els millors que poguem") tals que si $\sqrt{x^2+y^2} \le \delta(\varepsilon)$, llavors $|f(x,y) - f(0,0)| \le \varepsilon$

(Indicació: recordem que $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$).

a) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

Sigui (x,y) t.q.: $\sqrt{x^2+y^2} \le \delta$. Llavors $|f(x,y) - f(0,0)| = |\sqrt[3]{xy} - 0| = |x|^{\frac{1}{3}} |y|^{\frac{1}{3}}$
$\le \sqrt{x^2+y^2}^{\,2/3} \le \delta^{2/3} \le \varepsilon$, i aleshores és suficient agafar $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^{3/2}$.

$|x|, |y| \le \sqrt{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$

Siguin $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $0 < \sqrt{x^2+y^2} \le \delta$. Aleshores: $|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0 \right| =$
$= |x| \cdot \left| \dfrac{xy}{x^2+y^2} \right| \le \dfrac{|x|}{2} \le \dfrac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2} \le \delta/2 \le \varepsilon$

Nota. Recordem que $\left| \dfrac{xy}{x^2+y^2} \right| \le \frac{1}{2}$ $\forall (x,y) \neq (0,0)$.

D'altra banda, si $(x,y) = (0,0)$, llavors la desigualtat es satisfà de manera trivial:
$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(0,0) - f(0,0)| = 0 \le \varepsilon$, ja que suposem $\varepsilon > 0$.

Per tant, veiem que és suficient agafar $\delta(\varepsilon) = 2\varepsilon$.

c) $f(x,y) = \dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$. Donat $\varepsilon > 0$, sigui $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\sqrt{x^2+y^2} \le \delta$. Llavors:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} - 1 \right| = 2\,\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \le 2\,\sqrt{x^2+y^2}^{\,2} \le 2\delta^2 \le \varepsilon.$$

Amb la qual cosa veiem que és suficient agafar $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon/2}$.

Propera classe. Problemes 13 i 14 de la secció "Continuïtat i límits de funcions".