— Càlcul 2 Problemes — Classe 13-02-2014

Topologia de $\mathbb{R}^n$ (tancats, oberts i més coses...). 1^n Problemes.

Recordem

$x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, llavors $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$: $\mathbb{R}$-espai vectorial on $\cdot$ és el producte per un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

En $\mathbb{R}^n$ definim:

1) $x, y \in \mathbb{R}^n$. Producte escalar de x i y: $\langle x, y \rangle = x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

2) $x \in \mathbb{R}^n$. Norma de x: $\|x\| := +\sqrt{\langle x, x \rangle}$

3) $x, y \in \mathbb{R}^n$. Distància de x a y: $d(x, y) := \|x - y\|$

Donat $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, definim bola oberta amb centre x i radi r com el conjunt:

$$B_r^n(x) = B(x; r) = \{ y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = \|x - y\| < r \} \subset \mathbb{R}^n.$$

(Id. Bola tancada ... $\bar{B}_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \le r \}$.)

c.p. (i) $n = 1$: $x, r \in \mathbb{R}$ amb $r > 0$, llavors $B_r^1(x) = \{ y \in \mathbb{R} : d(x, y) = |x - y| < r \} =$

$= \{ y \in \mathbb{R} : -r < y - x < r \} = (x - r, x + r)$: interval obert amb centre x i radi r.

$|x - y| < r \Leftrightarrow -r < y - x < r$

$n = 2$: $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$; llavors $B_r^2(x_1, x_2) = \{ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n : (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < r^2 \}$:
disc de radi r amb centre $x = (x_1, x_2)$.

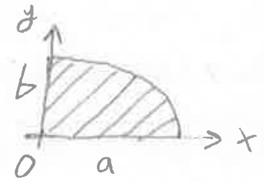
Definició (Conjunts poliedrals). Definirem poliedre generalitzat a tot conjunt $D \subset \mathbb{R}^n$ determinat per un conjunt d'inequacions de la forma

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) < a_i, \quad i = 1, \dots, p.$$
$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_j, \quad j = 1, \dots, q$$

on $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$; $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, q$ són constants; f_i, $i = 1, 2, \dots, p$ i g_j, $j = 1, 2, \dots, q$ són funcions contínues i suposarem sempre condicions no redundants. Direm conjunt poliedral a tota reunió finita de conjunts d'aquests tipus.

Si totes les inequacions són desigualtats estrictes direm que el conjunt polièdric és obert. Si totes les desigualtats són no estrictes direm que el conjunt polièdric és tancat.

Ex. 1: $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$; $x, y \geq 0$: quadrant el·líptic



(Conjunt poliedral tancat.)

Ex. 2: $1 < x^2+y^2+z^2 < 4$: Corona esfèrica de radis 1 i 2. (Conjunt poliedral obert.)

Remarca. De la definició es segueix que els conjunts definits per igualtats, per exemple, els de la forma $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=a$ són poliedres generalitzats tancats (en efecte, ja que $f(x_1,\dots,x_n)=a \iff f(x_1,x_2,\dots,x_n)\leq a \wedge -f(x_1,x_2,\dots,x_n)\leq -a$). Anàlogament els conjunts de la forma $g(x_1,x_2,\dots,x_n)\neq a$ són conjunts poliedrals oberts (en efecte, ja que $g(x_1,x_2,\dots,x_n)\neq a \iff g(x_1,x_2,\dots,x_n)<a \vee -g(x_1,x_2,\dots,x_n)<-a$).

Referències: "Teoria de Càlcul-I". Departament de Matemàtica Aplicada-I. CPDA-ETSEIB Set. 2001[1].

Definició (Oberts de $\mathbb{R}^n$). $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Obert $\iff \forall x\in\Omega\ \exists\epsilon>0: B^n_\epsilon(x)\subset\Omega$

Definició. (Tancats de $\mathbb{R}^n$). $\Gamma\subseteq\mathbb{R}^n$ Tancat $\iff \mathbb{R}^n\setminus\Gamma=\{x\in\mathbb{R}^n: x\notin\Gamma\}$ és un obert.

Ex.3: $\Omega=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: x_1>0\}$ és un conjunt obert de $\mathbb{R}^2$.

Ex.4: $\Omega=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: 1\leq x_1^2+x_2^2\leq 4\}$ és un conjunt tancat de $\mathbb{R}^2$.

Ex.5 Una bola oberta és un conjunt obert.

Ex.6 Una bola tancada és un conjunt tancat.

Proposició. (i) Els conjunts poliedrals oberts són conjunts oberts. (Ex.3)
(ii) " " " tancats " " tancats (Ex.4)
(iii) La unió d'una família qualsevol de conjunts oberts és un conjunt obert.
(iv) " intersecció d'una família finita " " " " " " "
(v) La unió d'una família finita de conjunts tancats és un conjunt tancat.
(vi) La intersecció " " qualsevol " " " " " " "

Remarca. Notem que: (i') La intersecció d'una família qualsevol de conjunts oberts no sempre és un conjunt obert. Per exemple: $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$; (ii') La unió d'una família qualsevol de conjunt tancats no sempre és un conjunt tancat. Per exemple $\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n]=\mathbb{R}$. (iii') Hi ha conjunts de $\mathbb{R}^n$ que no són ni oberts ni tancats. Per exemple: $\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: 1\leq x_1^2+x_2^2<4\}$, és un subconjunt de $\mathbb{R}^2$ que no és obert ni és tancat (justifiqueu-ho!). (iv') Hi ha també conjunts de $\mathbb{R}^n$ que són oberts i tancats alhora. Per sort només dos!: el propi $\mathbb{R}^n$ i el $\emptyset$.

Definició: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Llavors un punt $a \in \mathbb{R}^n$ és

1] un punt interior de $\Omega \iff \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon^n(a) \subset \Omega$

2] " " exterior de $\Omega \iff \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon^n(a) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega =: \Omega^c$

3] " " frontera de $\Omega \iff \forall \epsilon > 0 : B_\epsilon^n(a) \cap \Omega \neq \emptyset \wedge B_\epsilon^n(a) \cap \Omega^c \neq \emptyset$

Notació: $\mathring{\Omega} = \{x \in \Omega : x \text{ punt interior de } \Omega\} \equiv$ "interior de Ω".

$\text{ext}\,\Omega = \{x \in \Omega : x \text{ punt exterior de } \Omega\} \equiv$ "exterior de Ω".

$\partial\Omega = \{x \in \Omega : x \text{ punt frontera de } \Omega\} \equiv$ "frontera de Ω".

Definició (adherència o clausura d'un conjunt). Donat $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, la clausura o adherència de Ω és $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$.

Proposició: (i) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ obert $\iff \Omega = \mathring{\Omega}$.

(ii) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tancat $\iff \Omega = \overline{\Omega}$.

Ex. 7: $\bar{B}_r^n(x)$ és l'adherència de $B_r^n(x)$, i.e.: $\overline{B_r^n(x)} = \bar{B}_r^n(x)$.

Definició (Conjunt acotat). Direm que un conjunt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ és acotat $\iff \exists R > 0 : \Omega \subseteq B_R(0)$

Definició (" compacte). " " " " $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ és compacte $\iff \Omega$ és <u>tancat i acotat</u>.

Ex. 8 $\bigcup_{n=2}^{\infty} B^n_{1-1/k}(0)$ és un obert, ja que és una unió de conjunts oberts.

Ex. 9 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{B}^n_{1/k}(0)$ " " tancat. A partir de la propietat $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ veiem que:

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{B}_{1/k}(0)\right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bar{B}_{1/k}(0)\right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_{1/k}(0)\right),$$

és una unió d'oberts i per tant un conjunt obert. Aleshores $\bigcap_{k=1} \bar{B}_{1/k}(0)$ és un tancat. O, directament podem dir que és tancat perquè és una intersecció de conjunts tancats.

Ex. 10 $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{B}_{1-1/k}(0)$ És obert. De fet: $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{B}_{1-1/k}(0) = B_1(0)$, que és un obert.

Ex. 11 $\bigcap_{k=2}^{\infty} B^n_{1/k}(0)$ és un tancat. En efecte, ja que de fet $\bigcap_{k=2}^{\infty} B^n_{1/k}(0) = B^n_{1/2}(0) \cap B^n_{1/3}(0) \cap \ldots$ $\ldots \cap B^n_{1/k}(0) \cap \ldots$ però $B^n_{1/2}(0) \supset B^n_{1/3}(0) \supset \ldots \supset B_{1/k}(0) \supset \ldots$ i l'únic punt que està inclòs en tots ells és l'origen. Per tant: $\bigcap_{k=2}^{\infty} B^n_{1/k}(0) = \{0\}$, que és un tancat.

Problema 1.

Digueu quins dels següents conjunts són oberts, tancats o compactes.

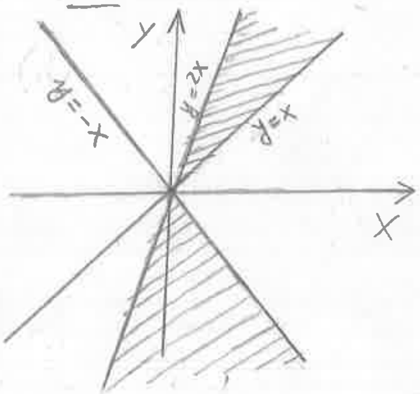
(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq x,\ e^{xy} - \sin x \leq y^4 + e^x\}$

$A = A_1 \cap A_2$ on $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq x \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\} = \overline{B}^2_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2},0)$. Llavors A_1 és un compacte (bola tancada amb centre $(\frac{1}{2},0)$ i radi $\frac{1}{2} < \infty$). D'altra banda: $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} - \sin x - y^4 + e^x \leq 0\}$ és un conjunt poliedral tancat. Per tant $A = A_1 \cap A_2$ és tancat, ja que és la intersecció de dos conjunts tancats i acotat, ja que un d'ells, A_1, és acotat i la intersecció està formada pels punts comuns a tots dos conjunts. Aleshores A és tancat i acotat $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ A és un conjunt compacte (de $\mathbb{R}^2$).

(b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ e^{xy} + e^{yz} + e^{zx} \geq x+y+z\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Anàlogament: $B = B_1 \cap B_2$ essent $B_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\} = \overline{B}^3_1(0,0,0)$: tancat i acotat; i $B_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z - e^{xy} - e^{yz} - e^{zx} \leq 0\}$: conjunt poliedral tancat de $\mathbb{R}^3$. Llavors B és tancat (intersecció dels tancats B_1 i B_2) i acotat (ja que B_1 ho és) $\Leftrightarrow$ B és un compacte de $\mathbb{R}^3$.

(c) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 0,\ y \leq 2x\}$: conjunt poliedral tancat de $\mathbb{R}^2$. Per tant: tancat. Observem que NO és compacte ja que NO és acotat, ja que, per ex. conté el conjunt $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$, que NO és acotat.



Conjunt G

(d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 - y^2 + z^2 < 1,\ xyz > 0\}$. Conjunt poliedral obert de $\mathbb{R}^3$, per tant és un conjunt obert.

(e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \sin y > 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0\}$. És un conjunt poliedral obert definit per les desigualtats estrictes: $-x^2 - \sin y < 0$, $x < 0$, $-x < 0$, $y < 0$, $-y < 0$. Per tant un conjunt obert.

(f) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1,\ \frac{x^2+y^2}{x} < 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\} \cap B^2_1(1,0)$. Intersecció finita d'oberts, per tant conjunt obert (de $\mathbb{R}^2$)

Propera classe Problemes 2,3,8,13 i 14 del Tema 1.