calcul2_classe-13-03-2014.pdf.

Classe 13-03-2014

39) Useu la fórmula del gradient per a calcular les següents derivades direccionals.

a) $D_u f(1,0)$ si $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ i $u = \left(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}\right)^T$

$$D_u f(1,0) = \left\langle \nabla f(1,0), \left(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}\right)^T \right\rangle = (1,0)\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \boxed{2/\sqrt{5}} \quad \square$$

$$\nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right)^T = (1,0)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{x^2+0^2}\right)\Big|_{x=1} = \frac{d}{dx}\left(\ln|x|\right)\Big|_{x=1} = \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{d}{dy}\left(\ln\sqrt{1+y^2}\right)\Big|_{y=1} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\right)\Big|_{y=0} = \frac{y}{1+y^2}\Big|_{y=0} = 0$$

b) $D_u f(0,-1)$ si $f(x,y) = e^x\cos(\pi y)$ i $u = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$.

$$D_u f(0,-1) = \left\langle \nabla f(0,-1), \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)^T \right\rangle = (-1,0)\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \boxed{1/\sqrt{2}} \quad \square$$

$$\nabla f(0,-1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,-1)\right)^T = (-1,0)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1) = \frac{d}{dx}\left(e^x\cos(-\pi)\right)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}\left(-e^x\right)\Big|_{x=0} = -1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1) = \frac{d}{dy}\left(\cos(\pi y)\right)\Big|_{y=-1} = -\pi\sin(\pi y)\Big|_{y=-1} = 0.$$

c) $D_u f(1,0,0)$ si $f(x,y,z) = x^2e^{-yz}$, $u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$.

$$D_u f(1,0,0) = \left\langle \nabla f(1,0,0), \left(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)^T \right\rangle = (2,0,0)\cdot\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \boxed{2/\sqrt{3}} \quad \square$$

$$\nabla f(1,0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,0), \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,0)\right)^T = (2,0,0)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,0) = \frac{d}{dx}(x^2)\Big|_{x=1} = 2x\Big|_{x=1} = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,0) = \frac{d}{dy}(1)\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,0) = \frac{d}{dz}(1)\Big|_{z=0} = 0.$$

40) El perfil d'una certa muntanya es modula mitjançant la funció $h(x,y) = 5000 - 0.01x^2 - 0.02y^2$, on si (x,y) és un punt del pla (imaginari) que defineix la base de la muntanya, llavors $z = h(x,y)$ ens dóna la corresponent alçada.

(a) Un muntanyer es troba al punt $(x,y) = (10,10)$, a punt de fer el cim. En quina direcció s'ha de moure per pujar més ràpidament? Quin és el pendent?

(b) Si en lloc de triar la direcció de màxima pendent opta per triar-ne una amb pendent del 40%, quina direcció ha de seguir? (Indicació: un pendent del 40% correspon a un vector $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ unitari tal que $D_{(\alpha,\beta)} h(10,10) = 0.4$. Hi ha dues possibles solucions per a (α,β)).

(a) $h(x,y) = 5000 - 0.01x^2 - 0.02y^2$; $z = h(x,y)$.

$$\nabla h(x,y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(10,10), \frac{\partial h}{\partial y}(10,10) \right)^T = (-0.2, -0.4)^T$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(10,10) = (-0.02x)\Big|_{x=10} = -0.2, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(10,10) = (-0.04y)\Big|_{y=10} = -0.4.$$

La direcció segons la qual la derivada direccional és màxima és la direcció del gradient.

$$u = \frac{\nabla h(10,10)}{\|\nabla h(10,10)\|} = \frac{(-1,-2)^T}{\|(-1,-2)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^T,$$

i llavors el pendent (i.e., el valor de la derivada direccional), en aquesta direcció és el mòdul del gradient:

$$D_{u = \frac{\nabla h(10,10)}{\|\nabla h(10,10)\|}} h(10,10) = \left\langle \nabla h(10,10), \frac{\nabla h(10,10)}{\|\nabla h(10,10)\|} \right\rangle = \|\nabla h(10,10)\|$$

$$= \sqrt{0.2^2 + 0.4^2} = 0.2\sqrt{5} =$$

(b) $D_{(\alpha,\beta)} h(10,10) = 0.4 \iff \langle \nabla h(10,10), (\alpha,\beta)^T \rangle = -0.2\alpha - 0.4\beta = 0.4$ (1),

amb $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (2). De l'equació (1) aïllant $\alpha = -2(1+\beta)$ i substituint a la 2ª: $5\beta^2 + 8\beta + 3 = 0$, d'on: $\beta = -1$ i $\beta = -3/5$ són les dues solucions. Llavors les dues direccions possibles corresponen a $u = (0,-1)^T$, $u = (-4/5, -3/5)^T$