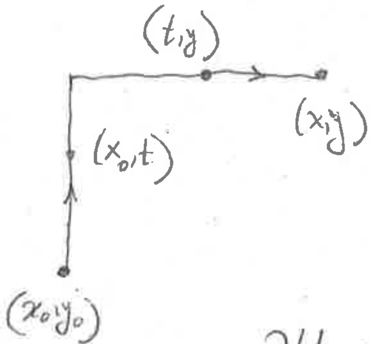
4. EDOS Exactes

Una EDO de la forma $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ direm que exacta si P i Q satisfan la condició $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Aleshores es comprova que

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y)\,dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)\,dt. \qquad (5)$$



$$U(x,y)-U(x_0,y_0)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)\,dt+\int_{x_0}^{x}P(t,y)\,dy$$

satisfà $\frac{\partial U}{\partial x}=P$ i $\frac{\partial U}{\partial y}=Q$ on x_0,y_0 són ctnts qualssevol per a les quals les integrals $\int_{x_0}^{x}P(t,y)\,dt$ i $\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)\,dt$ respectivament estiguin ben definides. Exercici: comproveu-ho!

Aleshores la solució s'expressa, en forma implícita, com: $U(x,y)=c$.

Això últim podem comprovar-ho aplicant la regla de la cadena. En efecte signi, per una c donada, $y(x)$ la funció definida implícitament per l'equació $U(x,y)=c$. Llavors $U(x,y(x))=c$ i, derivant implícitament respecte de x s'obté:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y(x))+\frac{\partial U}{\partial y}(x,y(x))\,y'(x)=P(x,y(x))+Q(x,y(x))\,y'(x)=0$$

És a dir, les funcions definides implícitament per les equacions $U(x,y)=c$, $c\in\mathbb{R}$ són solució de l'EDO.

Tal com s'assenyala a les notes de la pàgina web, per trobar la $U(x,y)$ de vegades és més pràctic, en comptes d'aplicar la fórmula (5), integrar directament el sistema $\frac{\partial U}{\partial x}=P$ i $\frac{\partial U}{\partial y}=Q$. Vegem un exemple:

Exercici: $2x+\frac{1}{y}+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)y'=0$

$P(x,y)=2x+\frac{1}{y}=\frac{\partial U}{\partial x}$, d'on $U(x,y)=x^2+\frac{x}{y}+\phi(y)$

$Q(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=-\frac{x}{y^2}+\phi'(y)=\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\implies \phi'(y)=\frac{1}{y}$, i podem agafar:

$$\phi(y) = \ln|y|.$$

Aleshores la solució — en forma implícita — s'escriu com:

$$U(x,y) = x^2 + \frac{x}{y} + \ln|y| = C\,, \quad C \in \mathbb{R} \text{ constant}.$$

4.1. Factors Integrants

De vegades, l'equació:

$$P(x,y) + Q(x,y)\,y' = 0 \tag{6}$$

no és una EDO exacta però quan es multiplica per un cert factor $\mu(x,y)$ resulta que els termes de

$$\mu(x,y)\,P(x,y) + \mu(x,y)\,Q(x,y)\,y' = 0 \tag{7}$$

satisfan

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x,y)\,P(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x,y)\,Q(x,y)\Big)$$

i llavors (7) és una EDO exacta. Aleshores $\mu(x,y)$ s'anomena <u>factor integrant</u> de l'EDO (6).

No hi ha, però, un mètode general per trobar el factor integrant d'una EDO donada. En aquest sentit enunciarem el resultat següent:

Proposició (veure "Càlcul II. Elements d'Equacions Diferencials Ordinàries. Integració de Funcions d'1 Variable. Sèries" §5.3) Considerem l'EDO (6), i la funció $\Phi \in C^1(W)$, essent $W \subset \mathbb{R}^2$ obert; aleshores (6) admet un factor integrant de la forma

$$\mu(x,y) = g\big(\Phi(x,y)\big)$$

essent g una funció d'una variable de classe C^1, si, i només si, la funció

$$R(x,y) = \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)\,\Phi_x(x,y) - P(x,y)\,\Phi_y(x,y)}$$

és funció de $\Phi(x,y)$. És a dir, si

$$R(x,y) = h\big(\Phi(x,y)\big)$$

per a alguna funció h d'1 variable, de classe C^1. De fet, aleshores:

$$\mu(x,y) = \exp\left(\int h(t)\,dt\right) \circ \Phi(x,y)$$

□

Alguns casos particulars "senzills" derivats d'aquesta proposició són:

- L'EDO (6) admet un F.I. que depèn només de x $\left(\mu(x,y) = \mu(x)\right)$ si, i només si:

$$\frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)}$$

depèn només de x. Aleshores, $\mu(x) = \exp\left(\int \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)}\,dx\right)$.

- L'EDO (6) admet un F.I. que depèn només de y $\left(\mu(x,y) = \mu(y)\right)$ si, i només si:

$$\frac{Q_x(x,y) - P_y(x,y)}{P(x,y)}$$

depèn només de y. Aleshores, $\mu(y) = \exp\left(\int \frac{Q_x(x,y) - P_y(x,y)}{P(x,y)}\,dy\right)$.

Exercici. Resoleu l'EDO: $y^2/2 + 2ye^x + (y+e^x)y' = 0$, sabent que admet un F.I. que depèn només de x.

Solució.

$$P(x,y) = y^2/2 + 2ye^x, \quad Q(x,y) = y + e^x$$

$$\frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{y + 2e^x - e^x}{y+e^x} = \frac{y+e^x}{y+e^x} = 1 \Longrightarrow h(x) = \exp\left(\int 1\,dx\right) = e^x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2/2\, e^x + 2ye^{2x}\right) = ye^x + 2e^{2x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ye^x + e^{2x}\right)$$

$$U(x,y) = y^2/2\, e^x + ye^{2x} + \phi(y)$$

$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \cancel{ye^x} + \cancel{e^{2x}} + \phi'(y) = \cancel{ye^x} + \cancel{e^{2x}}$, d'on podem agafar $\phi(y) = \text{ctnt} \in \mathbb{R}$

i llavors la solució de l'EDO es pot escriure, en forma implícita com:

$$y^2/2\, e^x + ye^{2x} = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

5. EDOs Lineals de 2^{on} ordre.

Una EDO lineal de 2^{on} ordre en forma normal ve donada per:

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = b(x) \tag{8}$$

$a_0, a_1, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funcions contínues, $I \subset \mathbb{R}$ interval.

busquem $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. satisfà l'equació (8).

casos particulars:

- Quan $a_1(x) = a_1 \in \mathbb{R}$ i $a_0(x) = a_0 \in \mathbb{R}$ (i.e., quan les funcions $a_1(x)$ i $a_0(x)$) són constants llavors diem que l'EDO (8) és lineal a coeficients constants.
- Quan $b(x) \equiv 0$ ($\Leftrightarrow b(x) = 0 \ \forall x \in I$) llavors diem que (8) és una EDO lineal homogènia.

5.1 EDOs homogènies de 2^{on} ordre

Les solucions d'una EDO lineal homogènia:

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0 \tag{8'}$$

formen un espai vectorial de dimensió 2. Això implica que si coneixem dues solucions linealment independents $\{y_1(x), y_2(x)\}$, que anomenarem Conjunt Fonamental de Solucions (CFS), llavors per a qualsevol altra solució, $y(x)$, existeixen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ t.q.:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{9}$$

$\forall x$. Si pensem c_1, c_2 com paràmetres lliures, llavors (9) representa una família de solucions que es pot demostrar que és la solució general: conté totes les solucions de l'EDO.

Qüestió. Donades dues solucions de (8') $y_1(x), y_2(x)$. Com sabem si són linealment independents i llavors formen un CFS? La resposta la tenim en el resultat següent:

Proposició. Siguin y_1, y_2 dues solucions de l'EDO lineal homogènia (8'). Aleshores són linealment independents i formen un CFS si, i només si $\exists\, x_0 \in I$ t.q. el determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Tanmateix es demostra que llavors: $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall x \in I$. Nota: a aquest determinant se l'anomena determinant Wronskià (o senzillament Wronskià) de les solucions $y_1(x), y_2(x)$.

5.1.1. Mètode de reducció de l'ordre. De vegades és fàcil obtenir una solució de l'EDO homogènia (8'). Com trobar-ne una altra de l.i. i completar així un CFS? La idea — i en això consisteix el "mètode de reducció de l'ordre" — és la següent: sigui $y_1(x)$ la solució coneguda. Buscarem una 2ª solució de la forma:

$$y_2(x) = \gamma(x)\, y_1(x),$$

i, per determinar $\gamma(x)$ derivarem i substituirem a l'EDO:

$$y_2'(x) = \gamma'(x) y_1(x) + \gamma(x) y_1'(x)$$

$$y_2''(x) = \gamma''(x) y_1(x) + 2\gamma'(x) y_1'(x) + \gamma(x) y_1''(x)$$

$$y_2''(x) + a_1(x) y_2'(x) + a_0(x) y_2(x) \underset{\text{agrupant}}{=\ldots=} y_1(x)\gamma'' + \left(2y_1'(x) + a_1(x) y_1(x)\right)\gamma' + \underbrace{\left(y_1''(x) + a_1(x) y_1'(x) + a_0(x) y_1(x)\right)}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ (ja que } y_1(x) \text{ és solució de l'EDO).}}}\gamma = 0$$

Per tant $y_2(x) = \gamma(x) y_1(x)$ és solució de l'EDO si, i només si, $\gamma(x)$ satisfà:

$$y_1(x)\gamma'' + \left(2y_1'(x) + a_1(x) y_1(x)\right)\gamma' = 0 \tag{10}$$

Aquesta última equació la podem convertir en una EDO lineal de 1er ordre homogènia amb el canvi de funció $u = \gamma'$. Pels nostres propòsits només ens interessa una solució de (10). Agafem:

$$\gamma(x) = \int \frac{dx}{y_1^2(x)}\, e^{-\int a_1(x)dx}$$

la qual ens porta a:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)}\, e^{-\int a_1(x)\,dx} \qquad \text{("Fórmula de reducció de l'ordre")} \tag{11}$$

A més y_1, y_2 són linealment independents, com es comprova fàcilment a partir del Wronskià:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1(x)\int\cdots \\ y_1'(x) & y_1'(x)\int\cdots + \frac{1}{y_1(x)} e^{-\int a_1(x)\,dx} \end{vmatrix} = \cancel{y_1 y_1'\int\cdots} - \cancel{y_1 y_1'\int\cdots} + e^{-\int a_1(x)\,dx}$$

$$= e^{-\int a_1(x)\,dx} \neq 0 \quad \forall x$$

Exemple. Sigui l'EDO: $y'' - 2my' + m^2 y$. Trobem, per inspecció directa una 1ª solució i apliquem (11) per trobar-ne una altra solució l.i.

Solució: $y_1(x) = e^{\lambda x}$: $y_1'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $y_1''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$y_1''(x) - 2m y_1'(x) + m^2 y_1(x) = (\lambda^2 - 2m\lambda + m^2) e^{\lambda x} = (\lambda - m)^2 e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow \lambda = m.$$

Tenim així, com 1ª solució: $y_1(x) = e^{mx}$

Trobem la 2ª (l.i. amb $y_1(x)$) aplicant (11):

$$y_2(x) = e^{mx} \int e^{-2mx} e^{\int 2m\,dx}\, dx = e^{mx}\int dx = x e^{mx}.$$

Aleshores $y_1(x) = e^{mx}$, $y_2(x) = x e^{mx}$ formen un CFS de l'EDO i la solució general la podem escriure com:

$$y(x) = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}.$$

5.2. EDOs no homogènies.

En aquest context considerant l'EDO no homogènia (8) direm que (8') és la seva EDO homogènia associada. Es pot demostrar que la solució general de (8) ve donada per:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \quad ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{12}$$

On $\{y_1(x), y_2(x)\}$ són un C.F.S. de (8') i $y_p(x)$ és una solució particular qualsevol de (8).

De fet, per trobar $y_p(x)$ es pot fer servir la fórmula de variació de les constants (o de variació dels paràmetres): Així:

$$y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x), \tag{13}$$

on: $u_1'(x), u_2'(x)$ són solució del sistema: $\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$

per a cada x. Aplicant la regla de Cramer per resoldre'l:

$$u_1'(x) = \frac{-y_2(x) b(x)}{W(x)} \quad \text{d'on podem agafar:} \quad u_1(x) = -\int \frac{y_2(x) b(x)}{W(x)} dx$$

$$u_1'(x) = \frac{y_1(x) b(x)}{W(x)} \quad \text{" " " :} \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x) b(x)}{W(x)} dx,$$

essent $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)$ (i.e. el Wronskià de $y_1(x), y_2(x)$).

Notem que llavors $W(x) \neq 0 \;\forall x$ ja que $y_1(x), y_2(x)$ formen un C.F.S. de l'EDO homogènia associada (8').

D'aquesta manera, la solució particular $y_p(x)$ l'escrivim:

$$y_p(x) = -y_1(x) \cdot \int \frac{y_2(x) b(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x) b(x)}{W(x)} dx \tag{14}$$

(fórmula de variació de les constants o de variació de paràmetres).

Exercici. Calculeu la solució general de l'EDO $y''-y=e^x\sin x$.

Solució: 1) Solucions l.i. de l'homogènia associada: $y''-y=0$.

$$y(x)=e^{\lambda x},\ y'=\lambda e^{\lambda x},\ y''=\lambda^2 e^{\lambda x}:$$

$$y''(x)-y(x)=(\lambda^2-1)e^{\lambda x}=0 \iff \lambda=\pm 1$$

Llavors: $y_1(x)=e^x$, $y_2(x)=e^{-x}$ formen un conjunt fonamental de solucions, ja que són solucions (per construcció) i són l.i., donat que el seu Wronskià:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x}\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

Una solució particular de l'EDO no homogènia $y''-y=e^x\sin x$ l'obtenim aplicant la fórmula de variació de les constants (14). Així:

$$y_p(x)=e^x\int\frac{-\sin x}{-2}dx+e^{-x}\int\frac{e^{2x}\sin x}{-2}dx\overset{(*)}{=}$$

$$=-\frac{e^x}{2}\cos x-\frac{1}{10}(2\sin x-\cos x)e^x=-\frac{1}{5}(\sin x+2\cos x)e^x$$

I finalment, la solució general resulta:

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}-\frac{1}{5}(\sin x+2\cos x)e^x$$

$c_1, c_2\in\mathbb{R}$.

Remarca. A la col·lecció de problemes del tema 3, en concret al problema 10 teniu un breu recordatori sobre la resolució de les EDOs lineals de 2on ordre homogènies a coeficients constants.

(*) $$\int e^{2x}\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x-\frac{1}{4}\int e^{2x}\sin x\,dx$$

d'on: $$\frac{5}{4}\int e^{2x}\sin x\,dx=\frac{1}{4}(2\sin x-\cos x)e^{2x}\iff\int e^{2x}\sin x\,dx=\frac{1}{5}(2\sin x-\cos x)e^{2x}$$