Classe 08/04/2014.

3. Resolució d'EDOs (Veure notes pàg. web: prof. Jaume Haro).

1. EDOs Separables: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ (1)

Integrant: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C_1$ s'obté una família de solucions en forma implícita $F(y) \doteq G(x) + C_1$, on $F(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$, $G(x) = \int f(x)\,dx$ i $\int$ indica una primitiva qualsevol.

Remarca (Ghost Solution / solucions singulars): observem que $y = y_k$ t.q. $g(y_k) = 0$ són solucions constants de (1).

Problema de Valors Inicials (PVI): busquem la solució de l'EDO que passa pel punt (x_0, y_0): $F(y_0) = G(x_0) + C_1$ d'on podem aïllar C_1

Exemple

1) $y' = \frac{e^x}{(1+e^x)y}$, $y(x_0) = y_0$:

Integrant: $yy' = \frac{e^x}{1+e^x}$: $\frac{1}{2}y^2 = \ln(1+e^x) + C_1$: solució general.

Busquem la solució particular que passa pel punt (x_0, y_0), i.e., que verifica $y(x_0) = y_0$.

$$\frac{1}{2}y_0^2 = \ln(1+e^{x_0}) + C_1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{1}{2}y_0^2 - \ln(1+e^{x_0})$$

I llavors la solució particular buscada és (en forma implícita):

$$\frac{1}{2}(y^2 - y_0^2) = \ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{x_0}}\right).$$

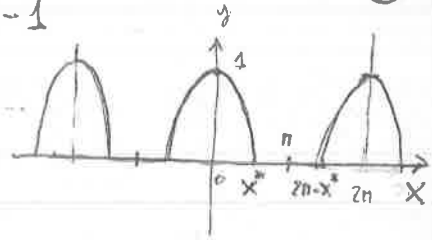
2) $yy' + (1+y^2)\sin x = 0$, $y(0) = 1$.

Integrant: $\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = -\int \sin x\,dx + C_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \cos x + C_1$

Imposant la condició inicial: $\frac{1}{2}\ln 2 = \cos(0) + C_1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}\ln 2 - 1$

$$\tfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = \cos x + \tfrac{1}{2}\ln 2 - 1 \iff \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+y^2}{2} = \cos x - 1$$

$$\iff \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+y^2}{2} = -2\sin^2\tfrac{x}{2} \iff 1+y^2 = 2e^{-4\sin^2 x/2}$$



$$y(x) = \sqrt{2e^{-4\sin^2 x/2} - 1}\,, \qquad -2\arcsin\sqrt{\tfrac{\ln 2}{4}} \le x \le 2\arcsin\sqrt{\tfrac{\ln 2}{4}} = x^* \cong 0.85869\ldots$$

(de fet aquesta només és la component connexa del domini que conté $x=0$)

2. EDOs lineals de 1er ordre. Són de la forma.

$$y' = a(x)y + b(x) \qquad (2)$$

c.p. $b(x) \equiv 0$ EDO lineal de 1er ordre <u>homogènia</u>: $y' = a(x)y$. Aquesta té per <u>solució general</u>: $y(x) = C_1 e^{+\int a(x)dx}$, on $\int a(x)dx$ indica una primitiva qualsevol de la funció $a(x)$.

La solució general de (2) és de la forma

$$y(x) = Ce^{+\int a(x)dx} + \boxed{y_p(x)} \qquad (3)$$

Solució particular de (2) que es troba pel <u>Mètode de variació de les constants</u> (o de <u>variació dels paràmetres</u>). Consisteix en buscar $y_p(x)$ de la forma $y_p(x) = u(x)\exp\left(\int a(x)dx\right)$, determinant $u(x)$ per substitució a l'EDO (2).

$$y_p(x) = u(x)e^{\int a(x)dx}$$

$$y_p'(x) = u'(x)e^{\int a(x)dx} + \cancel{a(x)u(x)e^{\int a(x)dx}} = \cancel{a(x)u(x)e^{\int a(x)dx}} + b(x)$$

$$u(x) = \int e^{-\int a(x)dx} b(x)\,dx$$

D'on, la solució general (3) es pot expressar com:

$$y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(C + \int e^{-\int a(x)dx} b(x)\,dx\right)$$

Example:

1) $(x^2+9)y' + xy = 0$ EDO. lineal homogènia de 1er ordre

$$y' = -\frac{x}{x^2+9}y \text{ : D'on tenim la solució general.}$$

$$y(x) = C e^{-\int \frac{x\,dx}{x^2+9}} = C_1 e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+9)} = \frac{C_1}{\sqrt{9+x^2}},\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

2) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$

Solució de l'homogènia $y_h(x) = C_1 e^{-\int \cos x\,dx} = C_1 e^{-\sin x}$

Solució particular. La busquem de la forma: $y_p(x) = u(x)\, e^{-\sin x}$

$$y_p'(x) + y_p(x)\cos x = u'(x)\, e^{-\sin x} \cancel{-(\cos x)\, u(x)\, e^{-\sin x}} \cancel{+(\cos x)\, u(x)\, e^{-\sin x}} = \sin x \cos x$$

$$u(x) = \int e^{\sin x} \cos x \sin x\, dx = e^{\sin x}\sin x - \int e^{\sin x}\cos x\, dx$$

$$= e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} = e^{\sin x}(\sin x - 1). \text{ D'on: } y_p(x) = \sin x - 1.$$

Així doncs, la solució general de l'EDO lineal de 1er ordre és:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

3. Equacions homogènies.

Es poden expressar de la forma $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$

Amb el canvi de funció $u = y/x$ es transforma en una EDO separable. En efecte:

$$y = ux$$

$$y' = u'x + u = F(u)$$

Solució (en forma paramètrica): $\begin{cases} x(u) = C \exp\left(\int \frac{du}{F(u)-u}\right) \\ y(u) = u\,x(u), \end{cases}$ $C_1 \in \mathbb{R}$. (4)

Si de la 1ª equació aïllem u en funció de x i substituïm a la 2ª, obtenim la solució explícita $y = y(x, C_1)$. (*)

Remarca. Notem que els punts fixos de F i.e. els punts $u_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $F(u_0) = u_0$ donen lloc a solucions singulars (ghost solutions) de la forma: $y(x) = u_0 x$

Exemple: $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2 + 2xy}$

Solució: $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2 + 2xy} = \dfrac{\left(y/x\right)^2 + 2\left(y/x\right)}{1 + 2\left(y/x\right)}$

$$y = ux$$

$$y' = u'x + u = \frac{u^2 + 2u}{1 + 2u} \iff u'x = \frac{u^2 + 2u}{1 + 2u} - u = -\frac{u^2 - u}{1 + 2u}$$

$$\int \frac{1 + 2u}{u^2 - u} du = -\int \frac{du}{u} + \int \frac{3\,du}{u - 1} = \ln\left|\frac{(u-1)^3}{u}\right|$$

$$-\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + C_1$$

D'on tenim la solució (expressada en forma paramètrica):

$$x(u) = \frac{C_1 u}{(u-1)^3}$$

$$y(u) = \frac{C_1 u^2}{(u-1)^3}$$

i les següents solucions singulars: $y(x) \equiv 0$, $y(x) = x$.

(*) O també, si substituïm $u = y/x$ (i.e. "desfem" el canvi de funció) a la 1ª equació obtenim la solució en forma implícita.