Classe 06 i 11/03/2014

Alguns resultats de teoria. Veure J. Ferrer and F. Puerta: "Càlcul Diferencial". CPDA-ETSEIB, 1990.

1. Derivació de la composició de funcions (Ferrer & Puerta. Tema 12)

Teorema (Composició: regla de la cadena). Essent $g = (g_1, \dots, g_q) : A \longrightarrow \mathbb{R}^q$, amb A obert de $\mathbb{R}^m$, i essent $f = (f_1, \dots, f_p) : B \longrightarrow \mathbb{R}^p$, amb B obert de $\mathbb{R}^q$, suposem que totes les components de f són derivables en B i que les seves corresponents derivades (parcials) són contínues en B: i.e., suposem que estan definides i són contínues en B les funcions derivades parcials $D_i f_j$ $\forall i = 1, 2, \dots, q$ i $\forall j = 1, 2, \dots, p$; i també suposem que totes les components de g són derivables en A; i.e.: suposem que en A estan definides les funcions derivades parcials $D_k g_s$ $\forall k = 1, 2, \dots, m$; $\forall s = 1, 2, \dots, q$. Llavors:

1) Si $a \in A$ i $g(a) = b \in B$, es verifica:

$$D_i (f_j \circ g)(a) = \sum_{s=1}^{q} D_s f_j (b) \cdot D_i g_s (a)$$

per tot $i = 1, 2, \dots, m$ i per tot $j = 1, 2, \dots, p$; o, en notació matricial,

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a)) \cdot Dg(a) = Df(b) \cdot Dg(a).$$

2) Per tant, a l'obert $A \cap g^{-1}(B)$ es verifica; per tot $i = 1, 2, \dots, m$, i per tot $j = 1, 2, \dots, p$:

$$D_i (f_j \circ g) = \sum_{s=1}^{q} D_s f_j \circ (g_1, \dots, g_q) \cdot D_i g_s$$

o, en notació matricial:

$$D(f \circ g) = Df \circ g \cdot Dg.$$

□

Problema 29. Siguin $f(u,v) = (\tan(u-1) - e^v, u^2 - v^2)$ i $g(x,y) = (e^{x-y}, x-y)$. Calculeu $D(f \circ g)(1,1)$ mitjançant la regla de la cadena.

$$Df(u,v) = \begin{pmatrix} 1 + \tan^2(u-1) & -e^v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}, \quad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D(f\circ g)(1,1) = Df(g(1,1))\cdot Dg(1,1) = Df(1,0)\cdot Dg(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \square$$

Problema 33. Donada una funció $f = f(u,v,w)$ de classe C^1, calculeu mitjançant la regla de la cadena expressions per a les derivades o derivades parcials primeres de la funció h en termes de les α, β i γ en cadascuna dels casos següents:

a) $h(x) = f(x, \alpha(x), \beta(x))$;

$$h'(x) = \partial_1 f(x,\alpha(x),\beta(x)) + \partial_2 f(x,\alpha(x),\beta(x))\,\alpha'(x) + \partial_3 f(x,\alpha(x),\beta(x))\,\beta'(x). \ \square$$

b) $h(x,y) = f(y, \alpha(x,y), \beta(x))$,

$$\partial_x h(x,y) = \partial_2 f(y,\alpha(x,y),\beta(x))\cdot\partial_x\alpha(x,y) + \partial_3 f(y,\alpha(x,y),\beta(x))\cdot\beta'(x),$$
$$\partial_y h(x,y) = \partial_1 f(y,\alpha(x,y),\beta(x)) + \partial_2 f(y,\alpha(x,y),\beta(x))\cdot\partial_y\alpha(x,y). \ \square$$

c) $h(x,y,z) = f(\alpha(z), \beta(y,z), \gamma(x,y,z))$:

$$\partial_x h(x,y,z) = \partial_3 f(\alpha(z),\beta(y,z),\gamma(x,y,z))\,\partial_x\gamma(x,y,z)$$
$$\partial_y h(x,y,z) = \partial_2 f(\alpha(z),\beta(y,z),\gamma(x,y,z))\cdot\partial_y\beta(y,z) + \partial_3 f(\alpha(z),\beta(y,z),\gamma(x,y,z))\,\partial_y\gamma(x,y,z)$$
$$\partial_z h(x,y,z) = \partial_1 f(\alpha(z),\beta(y,z),\gamma(x,y,z))\,\alpha'(z) + \partial_2 f(\alpha(z),\beta(y,z),\gamma(x,y,z))\,\partial_z\beta(y,z)$$
$$+ \partial_3 f(\alpha(z),\beta(y,z),\gamma(x,y,z))\,\partial_z\gamma(x,y,z). \ \square$$

2. El teorema de la funció inversa (Ferrer & Puerta. Tema 16)

Teorema (teorema de la funció inversa). Essent $f: A \to \mathbb{R}^n$, amb A obert de $\mathbb{R}^n$, i essent $a \in A$. Si $f \in C^r(A)$, $r \geq 1$ i $\det Df(a) \neq 0$, llavors existeixen oberts U i V de $\mathbb{R}^n$, amb $a \in U$ i $b = f(a) \in V$ tals que:

1) $f|_U: U \to V$ és bijectiva ($f|_U$ és la restricció de f a l'obert U).

2) $f^{-1}: V \to U$ és C^r en V (f^{-1} és la inversa local de f en a; veure Remarca).

3) Per a cada $y = f(x) \in V$, amb $x \in U$, es verifica $Df^{-1}(y) = Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$.

Remarca.

1) Essent $f: A \to \mathbb{R}^n$, amb $A \subset \mathbb{R}^n$, i essent $a \in A$. Si hi ha oberts U i V de $\mathbb{R}^n$, amb $a \in U \subset A$ i $b = f(a) \in V$, tals que $f|_U : U \to V$ és bijectiva, aleshores es diu que f és <u>localment inversible</u> en a, i $f^{-1}: V \to U$ s'anomena <u>inversa local</u> de f en a.

2) Amb això, el teorema de la funció inversa el podem enunciar de la manera següent: si $f \in C^r(A)$ $(r \geq 1)$ i $\det Df(a) \neq 0$ $(a \in A)$, aleshores: 1] f és localment inversible en a, 2] la seva inversa local també és de tipus C^r i 3] La matriu de derivades (i.e., la Jacobiana) d'aquesta és la inversa de la de f (en els punts corresponents).

3. Cas de funcions (globalment) inversibles (Ferrer & Puerta 16.4)

Corol·lari. Essent $f: A \to \mathbb{R}^n$, amb $A \subseteq \mathbb{R}^n$ obert, $a \in A$. Suposem:

1] $f \in C^r(A)$, $r \geq 1$.

2] $\det Df(a) \neq 0$, per a qualsevol $a \in A$.

3] f injectiva en A.

Aleshores es verifica:

1'] $B = f(A)$ és obert (de $\mathbb{R}$)

2'] $f^{-1}: B \to A$ és $C^r(B)$

3'] Per a qualsevol $b = f(a) \in B$, $a \in A$, tenim $Df^{-1}(b) = (Df(a))^{-1}$

Problema 34. Signi $f(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x-y)$. Proveu que f té una inversa global i calculeu la seva derivada

Solució. 1] $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Obviament, cadascuna de les components de f són funcions elementals o suma de funcions elementals

2] $\det Df(x,y,z) = \begin{vmatrix} 0 & 2e^{2y} & 2e^{2z} \\ 2e^{2x} & 0 & -2e^{2z} \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4e^{2(y+z)} - 4e^{2(x+z)} = -4e^{2z}(e^{2y} + e^{2x}) < 0,$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

3] f és injectiva: en efecte,

$$f(x,y,z)=f(x',y',z') \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} e^{2y}+e^{2z}=e^{2y'}+e^{2z'} & (1)\\ e^{2x}-e^{2z}=e^{2x'}-e^{2z'} & (2)\\ x-y=x'-y' & (3)\end{array}\right\}$$

$$\underset{\text{de }(1)\text{ i }(2)}{\Rightarrow} \left(e^{2y}+e^{2x}=e^{2y'}+e^{2x'} \Leftrightarrow e^{2y}\left(1+e^{2(x-y)}\right)=e^{2y'}\left(1+e^{2(x'-y')}\right)\right)$$

$\underset{\text{de }(3)}{\Rightarrow} e^{2y}=e^{2y'}$ d'on $y=y'$. Llavors, de (1) es segueix que $z=z'$ i, de (2) $x=x'$.

Aleshores $f(x,y,z)=f(x',y',z') \Rightarrow (x,y,z)=(x',y',z')$ i aleshores f és injectiva. D'aquesta manera, si $B=f(\mathbb{R}^3)=\{b\in\mathbb{R}^3 : \exists a\in\mathbb{R}^3 : f(a)=b\}$ tenim, d'acord amb el Corol·lari, que:

1'] B és un obert de $\mathbb{R}^3$, 2'] $f^{-1}: B\to\mathbb{R}^3$ és C^∞ en B, i 3'] $Df^{-1}(x,y,z)=$

$$=\left(Df(x,y,z)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 2e^{2y} & 2e^{2z}\\ 2e^{x} & 0 & -2e^{2z}\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{e^{-2z}}{4(e^{2y}+e^{2x})}\begin{pmatrix}-2e^{2z} & -2e^{2z} & -4e^{2(y+z)}\\ -2e^{2z} & -2e^{2z} & 4e^{2(x+z)}\\ -2e^{2x} & 2e^{2y} & -4e^{2(x+y)}\end{pmatrix}$$

$$\overset{(\&)}{=}\begin{pmatrix}\frac{1/2}{u+v} & \frac{1/2}{u+v} & \frac{1}{1+e^{2w}}\\ \frac{1/2}{u+v} & \frac{1/2}{u+v} & -\frac{e^{2w}}{1+e^{2w}}\\ \frac{\frac{1}{2}e^{2w}}{ue^{2w}-v} & \frac{-1/2}{ue^{2w}-v} & \frac{(u+v)e^{2w}}{(1+e^{2w})(ue^{2w}-1)}\end{pmatrix} \quad (**)$$

(&) $e^{2x}=\dfrac{u+v}{1+e^{2w}}e^{2w}$, $e^{2y}=\dfrac{u+v}{1+e^{2w}}$, $e^{2z}=\dfrac{ue^{2w}-v}{1+e^{2w}}$ (on hem posat: $u=e^{2y}+e^{2z}$, $v=e^{2x}-e^{2z}$, $w=x-y$)

De fet, de (&) es veu que podem calcular explícitament la funció inversa, i.e.:

$x(u,v,w)=w+\frac{1}{2}\ln\dfrac{u+v}{1+e^{2w}}$, $y(u,v,w)=\frac{1}{2}\ln\dfrac{u+v}{1+e^{2w}}$, $z(u,v,w)=\frac{1}{2}\ln\dfrac{ue^{2w}-v}{1+e^{2w}}$

Així: $(x,y,z) = f^{-1}(u,v,w) = \left(w + \frac{1}{2}\ln\frac{u+v}{1+e^{2w}},\ \frac{1}{2}\ln\frac{u+v}{1+e^{2w}},\ \frac{1}{2}\ln\frac{ue^{2w}-v}{1+e^{2w}} \right)$, i podem calcular directament Df^{-1}:

$$Df^{-1}(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{1/2}{u+v} & \frac{1/2}{u+v} & \frac{1}{1+e^{2w}} \\ \frac{1/2}{u+v} & \frac{1/2}{u+v} & -\frac{e^{2w}}{1+e^{2w}} \\ \frac{\frac{1}{2}e^{2w}}{ue^{2w}-v} & \frac{-1/2}{ue^{2w}-v} & \frac{(u+v)e^{2w}}{(1+e^{2w})(ue^{2w}-v)} \end{pmatrix}$$

que, obviament, coincideix amb (**). $\square$

Teorema de la funció implícita. (Ferrer & Puerta, Tema 18)

Teorema (de la funció implícita). Essent $f: A \to \mathbb{R}^p$, amb A obert de $\mathbb{R}^{n+p}$, i essent un punt $(a,b) = (a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_p) \in A$. Suposem:

1) $f \in C^r(A)$ $(r \geq 1$ ó $\infty)$

2) $f(a,b) = 0$, és a dir

$$f_1(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_p) = 0, \dots, f_p(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_p) = 0$$

3) $\det\left(D_{n+j} f_j(a,b)\right)_{j=1,\dots,p} = \det D_y f(a,b)$

$$\begin{vmatrix} D_{n+1} f_1(a,b) & \cdots & D_{n+p} f_1(a,b) \\ D_{n+1} f_2(a,b) & \cdots & D_{n+p} f_2(a,b) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n+1} f_p(a,b) & \cdots & D_{n+p} f_p(a,b) \end{vmatrix} \neq 0.$$

En aquestes condicions existeixen un obert de $\mathbb{R}$, W, amb $a \in W$ i una funció $g = (g_1,\dots,g_p): W \to \mathbb{R}^p$ tals que:

1) $g \in C^r(W)$

2) $g(a) = b$ (és a dir: $g_j(a_1,\dots,a_n) = b_j$, $j = 1,2,\dots,$)

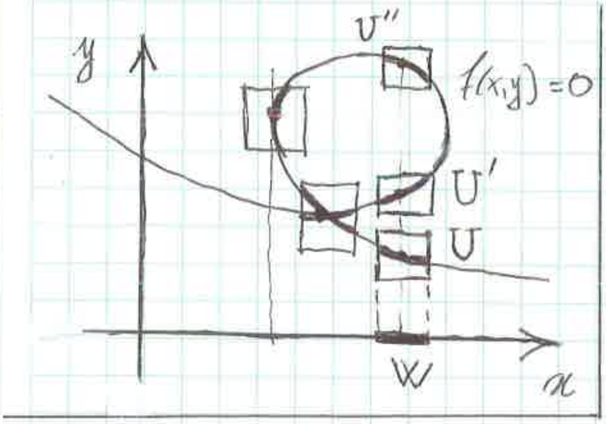
3] $f(x, g(x)) = 0$, per a qualsevol $x \in W$. És a dir:

$$f_j(x_1, \dots, x_n, g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_p(x_1, \dots, x_n)) = 0,$$

$j = 1, 2, \dots, p$.

De fet, per un cert entorn U de (a, b), g és única si s'exigeix a més que $(x, g(x)) \in U$, és a dir:

$$f(x,y) = 0, \text{ amb } (x,y) \in U \Leftrightarrow y = g(x), \text{ amb } x \in W.$$



Problema 37. El sistema

$$x + yv + e^{yu} + e^{xv} = 3$$
$$y - xv + e^{xu} + e^{yv} = 3$$

determina dues funcions $u(x,y)$ i $v(x,y)$ que satisfan $u(1,1) = v(1,1) = 0$. Sigui ara $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, calculeu $Dg(1,1)$ i $Dg^{-1}(0,0)$.

Solució.

Les dues funcions que defineixen les equacions: $f_1(x,y,u,v) = x + yv + e^{yu} + e^{xv} - 3$ i $f_2(x,y,u,v) = y - xv + e^{xu} + e^{yv} - 3$ són sumes de funcions elementals, per tant funcions de classe C^∞ en tot $\mathbb{R}^4$. D'altra banda: $f_1(1,1,0,0) = f_2(1,1,0,0) = 0$, i

$$\det D_{u,v} f(1,1,0,0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(1,1,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(1,1,0,0) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Aleshores, pel teorema de la funció implícita, existeix un obert $W \subseteq \mathbb{R}^2$, amb $(1,1) \in W$ i una funció $g = (g_1, g_2): W \to \mathbb{R}^2$ t.q.:

1] $g \in C^\infty(W)$, 2] $g(1,1) = (g_1(1,1), g_2(1,1)) = (0,0)$, 3] $\forall (x,y) \in W$:

$$f(x,y,g(x,y)) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} f_1(x,y,g_1(x,y),g_2(x,y)) = 0 \\ f_2(x,y,g_1(x,y),g_2(x,y)) = 0 \end{matrix} \qquad (*)$$

Derivant implícitament respecte de (x,y) les equacions $(*)$, substituint $(x,y)=(1,1)$ i tenint en compte 2]:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,0,0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(1,1,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(1,1,0,0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix} = 0,$$

d'on:

$$Dg(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(1,1,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(1,1,0,0) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1,0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,0,0) \end{pmatrix}$$

$$\overset{(*)}{=} -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(**)}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \square$$

$(*)$ $\frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1,0,0) = \frac{d}{du}\left(1+e^u+1-3\right)\Big|_{u=0} = 1,$

$\frac{\partial f_1}{\partial v}(1,1,0,0) = \frac{d}{dv}\left(1+v+1+e^v-3\right)\Big|_{v=0} = 2,$

$\frac{\partial f_2}{\partial u}(1,1,0,0) = \frac{d}{du}\left(1+e^u+1-3\right)\Big|_{u=0} = 1,$

$\frac{\partial f_2}{\partial v}(1,1,0,0) = \frac{d}{dv}\left(1-v+1+e^v-3\right)\Big|_{v=0} = 0,$

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1,0,0) = \frac{d}{dx}\left(x+1+1-3\right)\Big|_{x=1} = 1,$

$\frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,0,0) = \frac{d}{dy}\left(1+0+1+1-3\right)\Big|_{y=1} = 0,$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1,0,0) = \frac{d}{dx}\left(1+1+1-3\right)\Big|_{x=1} = 0,$

$\frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,0,0) = \frac{d}{dy}\left(y+1+1-3\right)\Big|_{y=1} = 1.$

(Calculem les derivades parcials com derivades de funcions d'1 variable, fixan les coordenades respecte de les quals no es deriva.)

$(**)$ Recordem també que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ amb $\det M = ad-cb \neq 0$, llavors:

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Per últim, com que $g \in C^{\infty}(W)$, amb $(1,1) \in W$ i resulta que $\det Dg(1,1) = $
$= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$, llavors aplicant el teorema de la funció inversa, tenim que la funció implícita g és localment inversible en $(x,y)=(1,1)$ amb inversa local g^{-1} de classe C^{∞}. D'altra banda, com que $g(1,1)=(0,0)$, tenim:

$$Dg^{-1}(0,0) = \left(Dg(1,1)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \square$$