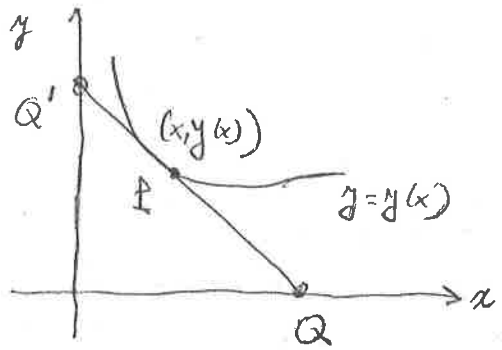
APLICACIONS.

14. Troben la corba que té la propietat que el segment de la tangent a la corba comprès entre els eixos de coordenades es divideix per la meitat en el punt de contacte



Solució.

$$Y - y(x) = y'(x)\cdot(X-x)$$

$$Q = \left(x - \frac{y}{y'}, 0\right),\ Q' = (0, y - xy')$$

$$P = (x, y(x)) = \frac{1}{2}(Q+Q')$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{y}{y'}, y - xy'\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}x - \frac{y}{2y'},\ y = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}xy'$$

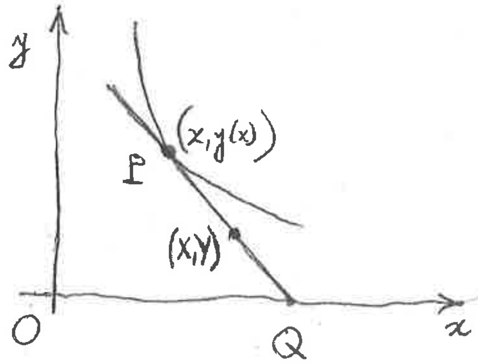
d'on:

$y' = -\frac{y}{x}$, que és una EDO separable. Si calculem la seva solució, trobem:

$$y(x) = C_1 \exp\left(-\int \frac{dx}{x}\right) = C_1 \exp\left(\ln \frac{1}{|x|}\right) = \frac{C_1}{|x|},\ C_1 \in \mathbb{R} \text{ constant.}$$

De fet, podem agafar: $\boxed{y(x) = \frac{c}{x},\ c \in \mathbb{R} \text{ constant}}$

15. Troben les corbes tals que la distància entre l'origen i el punt de tall de la tangent amb l'eix x és la mateixa que la que hi ha entre aquest últim i el punt de tangència.



$$Y - y(x) = y'(x)(X - x)$$

$$\vec{OQ} = \left(-\frac{y}{y'} + x, 0\right)$$

$$\vec{QP} = \left(\frac{y}{y'}, y\right)$$

$$\|\vec{OQ}\|^2 = \|\vec{QP}\|^2 \Leftrightarrow \left(-\frac{y}{y'} + x\right)^2 = \left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{y'}\right)^2 - 2\frac{xy}{y'} + x^2 = \left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2xy}{y'} = y^2 - x^2 \Leftrightarrow y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} \text{ EDO homogènia.}$$

Canvi de funció: $y = u(x)x$.

$$u'x + u = \frac{2u}{1-u^2} \Leftrightarrow u'x = \frac{2u}{1-u^2} - u = \frac{2u - u + u^3}{1-u^2} = \frac{u(1+u^2)}{1-u^2}$$

$$\int \frac{1-u^2}{u(1+u^2)}\,du = \int \frac{dx}{x} + C_1 \qquad (*)$$

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+1}; \quad A(u^2+1) + Bu^2 + C_1 u = A + Cu + (A+B)u^2 = 1-u^2$$

d'on: $A=1$, $C_1=0$, $A+B=-1 \Leftrightarrow B=-1-A=-2$

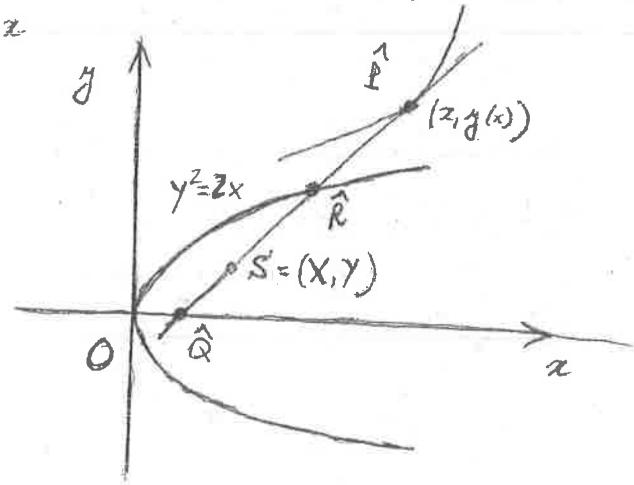
Llavors, de $(*)$: $\ln|u| - \ln|1+u^2| = \ln|x| + C_1$, i aleshores: $\dfrac{u/x}{1+u^2} = c$, $c \in \mathbb{R}$ ctt.

A continuació, desfent el canvi de funció, obtenim:

$$\frac{y/x^2}{1+y/x^2} = \frac{y}{x^2+y^2} = c \underset{\text{si } c\neq 0}{\Longleftrightarrow} cy^2 - y + cx^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\left(y-\frac{1}{2c}\right)^2 + x^2 = \frac{1}{4c^2}}$$

d'on, aïllant y: $\boxed{y(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4c^2x^2}}{2c}, \quad c\neq 0, \ \dfrac{-1}{2|c|} \leq x \leq \dfrac{1}{2|c|}}$ ← Circunferencias de radio $1/2|c|$ y centro $(0, 1/2c)$

16. Trobeu les corbes tals que el punt mig del segment tangent des del punt de contacte fins a l'eix x pertany a la paràbola $y^2 = 2x$.



Solució.

$$Y - y(x) = y'(x)\cdot(X-x)$$

$$\hat{Q} = \left(x - \frac{y}{y'}, 0\right),$$

$$\hat{R} = \frac{1}{2}(\hat{P}+\hat{Q}) = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{y}{y'}, y\right) = \left(x - \frac{y}{2y'}, \frac{y}{2}\right)$$

Com que $\hat{R}$ és un punt de la paràbola $y^2 = 2x$, tindrem:

$$\frac{1}{4}y^2 = 2\left(x - \frac{y}{2y'}\right) \Leftrightarrow \frac{y}{y'} = 2x - \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow y - \left(2x - \frac{y^2}{4}\right)y' = 0 \qquad (\&)$$

$P(x,y) = y$, d'on: $P_y(x,y) = 1$

$Q(x,y) = -2x + \dfrac{y^2}{4}$, d'on: $Q_x(x,y) = -2$. Aleshores $P_y \neq Q_x$ i $(\&)$ no és una EDO exacta.

En canvi, com que $\boxed{\dfrac{Q_x - P_y}{P} = -\dfrac{3}{y}}$ depèn només de y, podem trobar un factor integrant de la forma $\mu(x,y) = f(y)$ (i.e. depenent només de y), amb $f(y)$ satisfent l'equació: $f'(y) = -3f(y)/y$.

Aleshores: $\ln|f(y)| = -\ln|y|^3 + C_1 \Leftrightarrow \ln|y^3 f(y)| = C_1$, d'on: $$y^3 f(y) = \pm e^{C_1} = c\,,\ \text{amb } c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

De fet podem agafar $f(y) = \frac{c}{y^3}$, amb $c\in\mathbb{R}$ ctnt (ja que $f(y)\equiv 0$ és solució de l'EDO $f'(y) = -3f(y)/y$ podem incloure $c=0$ entre els valors permesos de la ctnt).

En particular, agafant(*) $c=1$, tenim el factor integrant: $\mu(x,y) = f(y) = \frac{1}{y^3}$, definit per $y\neq 0$.

$$\tilde{P}(x,y) = \mu(x,y)\,P(x,y) = \frac{1}{y^2},$$
$$\tilde{Q}(x,y) = \mu(x,y)\,Q(x,y) = -\frac{2x}{y^3} + \frac{1}{4y}.$$

Llavors: $\tilde{P}_y(x,y) = -\frac{2}{y^3} = \tilde{Q}_x(x,y)$ i aleshores $\tilde{P}(x,y) + \tilde{Q}(x,y)y' = 0$ és una EDO exacta i buscarem la seva solució resolent directament el sistema: $\frac{\partial U}{\partial x} = \tilde{P},\ \frac{\partial U}{\partial y} = \tilde{Q}$.

Així:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{y^2},\ \text{d'on } U(x,y) = \frac{x}{y^2} + \psi(x),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3} + \psi'(y) = -\frac{2x}{y^3} + \frac{1}{4y} \iff \psi'(y) = \frac{1}{4y},\ \text{i podem agafar: } \psi(y) = \frac{1}{4}\ln|y|$$

aleshores, escrivim la solució implícita com:

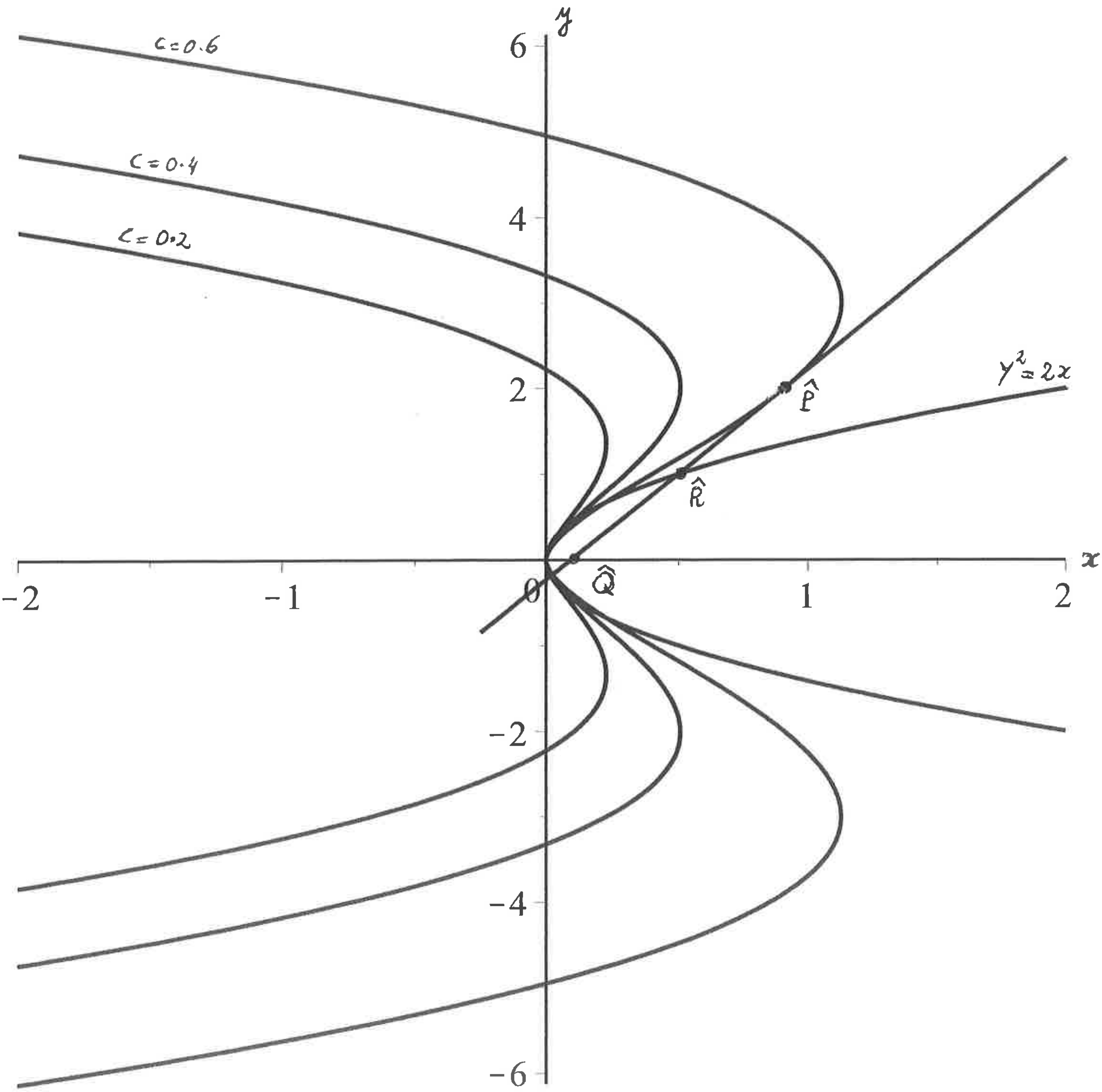
$$\boxed{\frac{x}{y^2} + \frac{1}{4}\ln|y| = c,\quad c\in\mathbb{R}\ \text{constant}}$$

Nota: De fet, podem aïllar x en funció de y i escriure la família de solucions de dalt com:

$$\boxed{x(y) = y^2\left(c - \frac{1}{4}\ln|y|\right),\ c\in\mathbb{R}\ \text{ctnt.}}$$

(veure figura en la pàgina 34)

(*) Obviament podem agafar qualsevol valor de c, en particular $c=1$.



y
x
c=0.6
c=0.4
c=0.2
$y^2=2x$
$\hat{P}$
$\hat{R}$
$\hat{Q}$
6
4
2
0
−2
−4
−6
−2
−1
1
2

26. Dos productes químics A i B reaccionen formant un de nou C; s'observa que la velocitat a la qual es forma C és directament proporcional al producte de les quantitats d'A i B presents i que la seva formació exigeix 2 Kg d'A per a cada Kg de B.

(a) Si inicialment hi ha 10 kg de A i 20 kg de B i denotem per $A(t)$, $B(t)$ i $C(t)$ les quantitats dels productes en funció de t, deduïu l'equació:

$$C' = K\left(10 - \tfrac{2}{3}C\right)\left(20 - \tfrac{1}{3}C\right)$$

(b) Troben la quantitat de C en qualsevol moment, sabent que $C(0) = 0$ i que en 20 minuts s'ha format 6 kg de C. En quin instant s'atura la reacció?

S. (a) $A(t)$, $B(t)$: quantitats d'A i B respect. que han reaccionat en l'instant t
$C(t)$: " de C que hi és present en l'istant t.

$$C' = K\left(10 - A(t)\right)\left(20 - B(t)\right) = K\left(10 - \tfrac{2}{3}C\right)\left(20 - \tfrac{1}{3}C\right) \qquad (\&)$$

$$C = A + B = 2B + B = 3B \Rightarrow B = \tfrac{1}{3}C,\ A = \tfrac{2}{3}C$$

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow A = 2B \quad \text{(reaccionen 2 kg d'A per cada kg de B)}$$

(b) A partir de (&):

$\frac{dc}{dt} = (10-A)(20-B)$

$C = A+B = 3B \to B = \frac{1}{3}C$, $A = \frac{2}{3}C$

$A = 2B$

$A = C - B$

$$C' = \frac{2K}{9}(C-15)(C-60),$$

$$\int \frac{dC}{(C-15)(C-60)} = \frac{2K}{9}\int dt + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R} \text{ ctnt.}$$

$$\frac{1}{(C-15)(C-60)} = \frac{a}{C-15} + \frac{b}{C-60} = \frac{-1/45}{C-15} + \frac{1/45}{C-60}$$

$$a(C-60) + b(C-15) = 1$$

$C = 60$: $b = \frac{1}{45}$

$C = 15$: $a = -\frac{1}{45}$

Aleshores: $\displaystyle \frac{1}{45}\ln\left|\frac{C-60}{C-15}\right| = \frac{2K}{9}t + \beta$

i podem posar: $\displaystyle \frac{C-60}{C-15} = \gamma e^{10Kt}$. ($\gamma = \pm e^{45\beta} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ i de fet, podem incloure $\gamma = 0$, ja que $C(t) \equiv 60$ és una solució. Llavors considerem $\gamma \in \mathbb{R}$)

$$C\left(1-\gamma e^{10kt}\right) = 60 - 15\gamma e^{10kt} = 15\left(4-\gamma e^{10kt}\right)$$

$$C(t) = 15\,\frac{4-\gamma e^{10kt}}{1-\gamma e^{10kt}}.$$

condicions inicials:

$$C(0) = 15\,\frac{4-\gamma}{1-\gamma} = 0 \iff \boxed{\gamma = 4}$$

$$C(20) = 15\,\frac{4-4e^{200k}}{1-4e^{200k}} = 6 \iff 1-e^{200k} = \frac{1}{10}\left(1-4e^{200k}\right)$$

$$\iff 6e^{200k} = 9$$

$$\iff \boxed{k = \frac{1}{200}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

Aleshores la quantitat de producte G en funció de t ve donada per la fórmula:

$$C(t) = 60\,\frac{1-e^{\frac{t}{20}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}{1-4e^{\frac{t}{20}\ln\left(\frac{3}{2}\right)}} = 60\,\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{t/20}-1}{4\left(\frac{3}{2}\right)^{t/20}-1}.$$

La reacció no s'atura per a cap valor de $t>0$ i $C(t) \to 15$ quan $t \to +\infty$. □

(10 kg d'A i només 5 kg de B).

27. Un tanc ple amb 40 litres d'aigua-sal que contenen 2'5 kg de sal dissolta. Després s'introdueix en el tanc, a raó de 8 l/min aigua-sal amb una concentració de 0.4 kg/l. Si la barreja es manté ben remenada (per homogenitzar la concentració) i surt del tanc amb la mateixa velocitat, troben la quantitat de sal en funció del temps. Quina quantitat de sal hi haurà al tanc si es deixa passar un temps llarg?

Solució. $x(t)$: quantitat de sal.

$$\frac{dx}{dt} = 8\times 0.4 - \frac{x(t)}{40}\times 8 = 3.2 - \frac{x(t)}{5} = -\frac{1}{5}(x-16)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{5}(x-16) \quad : \text{EDO separable.}$$

$$\int \frac{dx}{x-16} = -\frac{1}{5}\int dt + C. \quad \text{Solució: } x(t) = 16 + c\,e^{-t/5},\ c\in\mathbb{R}.$$

Imposem les condicions inicials:

$$x(0) = 2.5,\ \text{d'on: } c = 2.5 - 16 = -13.5$$

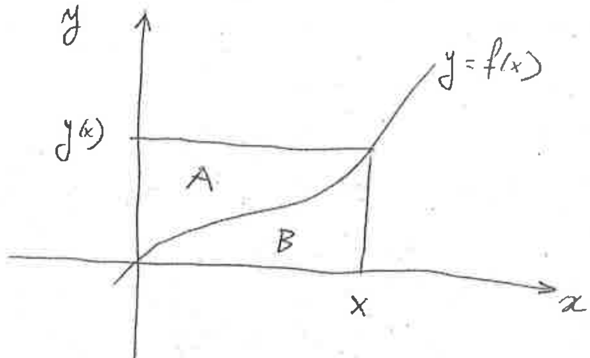
i aleshores, la quantitat de sal en l'instant t, $x(t)$ ve donada per la fórmula:

$$x(t) = 16 - 13.5\,e^{-t/5}$$

Veiem que quan $t\to\infty$ (t suficientment llarg) $x(t) \to 16$ kg □

13) Per un punt arbitrari d'una corba que passa per l'origen es consideren dues rectes paral·leles als eixos. La corba divideix el rectangle que es forma en dues parts A i B tals que Àrea$(A) = \alpha$ Àrea(B), per un cert $\alpha > 0$ fixat. Trobeu la corba.

Solució.



$$A(x) = xy(x) - \int_0^x y(t)\,dt \quad : \text{ àrea de A.}$$

$$B(x) = \int_0^x y(t)\,dt \quad : \text{ àrea de B.}$$

$$\text{Àrea}(A) = \alpha\,\text{Àrea}(B) \iff xy(x) - \int_0^x y(t)\,dt = \alpha \int_0^x y(t)\,dt$$

Derivant: $\cancel{y} + xy' - \cancel{y} = \alpha y$,

obtenim una EDO separable, que té per solució: $\boxed{y(x) = C_1 |x|^{\alpha},\ C_1 \in \mathbb{R}}$ □

14) Segons el model logístic, el nombre d'individus $x(t)$ d'una població amb taxa de creixement $r > 0$ però que només disposa d'un nombre finit de recursos, verifica l'equació diferencial:

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

on $K > 0$ depèn dels recursos disponibles.

(a) Resoleu l'equació i calculeu $\lim_{t \to +\infty} x(t)$. Interpreteu el resultat.

(b) Suposant que el nombre d'individus de la població és inicialment de 100 milions i que en el futur tendeix a un valor límit de 300 milions, calculeu r i K.

Solució:

(a) Es tracta d'una EDO en variables separades. Integrant:

$$\int \frac{dx}{x(x-K)} = -\frac{r}{K}\int dt + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R} \text{ ctnt d'integració.}$$

$$\frac{1}{x(x-K)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-K} \; : \quad A(x-K) + Bx = 1$$

$x = K$: $KB = 1 \implies B = 1/K$

$x = 0$: $-KA = 1 \implies A = -\frac{1}{K}$

Aleshores tenim:

$$\ln\left|\frac{x-K}{x}\right| = -\frac{r}{K}t+\beta,$$

d'on:

$$x-K = \alpha\, x\, e^{-\frac{r}{K}t}, \quad \text{on } \alpha\in\mathbb{R} \text{ ctnt.}$$

Per determinar α, imposem com condició inicial, que la població és x_0 quan $t=0$, i.e.: $x(0)=x_0$. Substituint a l'equació de dalt s'obté:

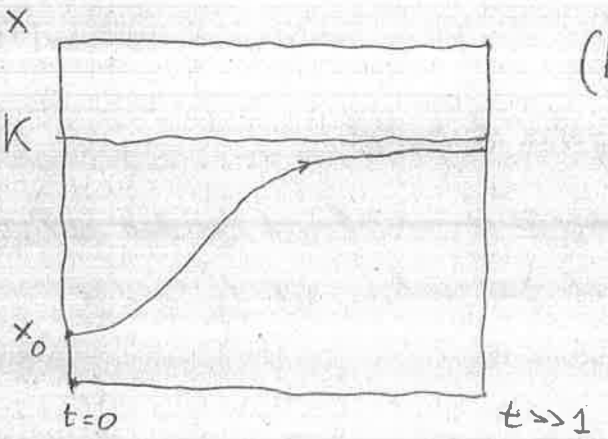
$$\alpha = \frac{x_0-K}{x_0},$$

llavors:

$$x-K = \frac{x_0-K}{x_0}\, x\, e^{-\frac{r}{K}t} \Longleftrightarrow \left(1-\frac{x_0-K}{x_0}e^{-\frac{r}{K}t}\right)x(t) = K$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{x(t) = \frac{K x_0 e^{\frac{r}{K}t}}{K + x_0\left(e^{\frac{r}{K}t}-1\right)}} \qquad (*)$$

I es veu doncs que $x(t)\to K$ quan $t\to+\infty$. Això vol dir que, segons el model logístic, la població tendeix a estabilitzar-se al valor de K.



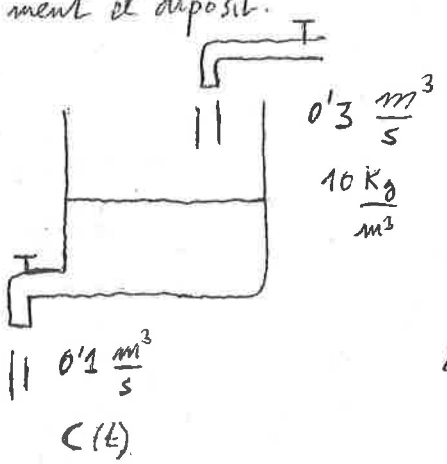
(b) $x_0 = 10^8$; $K = 3\cdot 10^8$; i aleshores $(*)$ resulta:

$$x(t) = \frac{3\cdot 10^8\cdot e^{\frac{r\cdot 10^{-8}}{3}t}}{e^{\frac{r}{3}10^{-8}t}-2}$$

però el coeficient r queda indeterminat... $\square$

27' (Bonus track) Un dipòsit conté 200 m^3 de salmora amb una concentració de 150 $Kg\ sal/m^3$. Per omplir-lo li aboquem un cabdal de 0·3 m^3/s d'aigua amb una concentració de sal de 10 Kg/m^3, i simultàniament obrim la sortida per extreure'n un cabdal de 0·1 $\frac{m^3}{s}$.

Suposem que el contingut està ben remenat de manera que la concentració de sal $C(t)$ és aproximadament uniforme en el tanc en tot moment t i és la que es troba a la sortida del tanc. Troben l'equació diferencial que satisfà la concentració $C(t)$ (temps en segons), resolem-la amb les condicions inicials descrites en $t=0$, troben el temps que tarda la concentració de sal en baixar fins 25 Kg/m^3, i el contingut d'aigua que té en aquell moment el dipòsit.



Anomenem:

$S(t)$: sal dissolta al dipòsit a l'instant t

$V(t) = 200 + 0'3t - 0'1t = 200 + 0'2t$: volum d'aigua a l'instant t

$C(t)$: concentració de sal al dipòsit a l'instant t.

Llavors:

$$\frac{dS}{dt} = 0'3 * 10 - 0'1\, C = 3 - 0'1\, C$$

$$S(t) = C(t)V(t) = (200 + 0'2t)\, C(t),$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0'2\, C + (200 + 0'2t)\, C' = 3 - 0'1\, C \iff 2\cdot 10^{-1}(1000+t)\, C' = 3 - 0'3\, C$$

d'on:

$$C' = -\frac{3}{2}\, \frac{C-10}{t+1000},$$

que és una EDO en variables separades. Integrant: $\int \frac{dC}{C-10} = -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t+1000} + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ctnt d'integració. Aleshores:

$$C(t) = 10 + \frac{\gamma}{(t+1000)^{3/2}},$$ on $\gamma \in \mathbb{R}$ ctnt, que determinarem imposant les condicions inicials:

$$C(0) = 10 + \frac{\gamma}{10^{9/2}} = 150 \iff \gamma = 140\cdot 10^{4}\sqrt{10} = 1'4\cdot 10^{6}\sqrt{10}.$$

Llavors:

$$C(t) = 10 + \frac{1'4\cdot 10\cdot \sqrt{10}}{(t+1000)^{3/2}}$$

Així, el temps, τ, que triga la concentració de sal en baixar a $25\,Kg/m^3$:

$$\tau : C(\tau) = 10 + \frac{1'4\cdot 10^6\cdot\sqrt{10}}{(\tau+1000)^{2/3}} = 25 \iff (\tau+1000)^{2/3} = \frac{1'4\cdot 10^6\sqrt{10}}{15},$$

d'on:

$$\tau = \left(\frac{1'4\cdot 10^6\cdot\sqrt{10}}{15}\right)^{3/2} - 1000 \cong 3432'9331\,s = 57^m\,12^s\!\cdot 93.$$

En aquest moment, el contingut d'aigua del dipòsit és:

$$V(\tau) = 200 + 0'2\,\tau \cong 886'587\ \ell.$$

□

27'' (Bonus track). L'avió de transports de passatgers Airbus A380 té un pes buid de 276'8 t, transporta una càrrega de 66'4 t de passatgers i equipatge, i pot portar fins 248 t de combustible. El seu consum de combustible en vol de creuer (a 900 km/h i 11.700 m d'alçada) és de 28 Kg per tona de pes i hora. Si ha de quedar una reserva de 30 t de combustible per despegament, aterratge i precaució: quin és l'abast màxim de l'aparell en plena càrrega? I quin és l'estalvi de combustible en un vol de 7000 Km si carreguem el combustible just per acabar amb la reserva en lloc d'omplir tot el dipòsit.

S.

Dades Airbus A380

Pes buid	276'8 t
Càrrega útil	66'4 t
" màxima de combustible	248 t
Reserva	30 t

Consum: 28 Kg/tona de pes/h, en vol creuer, 900 Km/h a 11700 m d'altitud

Anomenarem $C(t)$ a la quantitat de combustible que hi ha al dipòsit a l'instant t. Llavors

$\frac{dC}{dt} = -0'028\,(343'2 + C)$. Integrant resulta: $C(t) = A\,e^{-0'028t} - 343'2$, on $A\in\mathbb{R}$ ctant que determinarem imposant les condicions inicials:

$$C(0) = A - 343'2 \Rightarrow A = C(0) + 343'2.$$

Per tant:

$$\boxed{C(t) = \left(C(0) + 343'2\right)e^{-0'028t} - 343'2}$$

i) Si carreguem el màxim de combustible, $C_{\text{Màx}} = 248\,t$,

$$C(0) = C_{\text{Màx}} = 248$$

$$C(\tau) = \left(C_{\text{Màx}} + 343'2\right) e^{-0'028\,\tau} - 343'2 = 591'2\, e^{-0'028\,\tau} - 343'2 = 30$$

Durada del vol la velocitat i altitud de creuer:

$$\tau = \frac{1}{0'028} \ln \frac{591}{372'2} \cong 16^h\, 31^m$$

i aleshores l'abast màxim de l'aparell a plena càrrega és:

$$D = 900 \cdot \frac{1}{0'028} \ln \frac{591'2}{373'2} \cong 14786'99680 \text{ Km}$$

ii) La durada del vol (exclòs temps d'enlairament i aterratge) és:

$$\tilde{\tau} = \frac{7000 \text{ Km}}{900 \frac{\text{Km}}{h}} = \frac{70}{9}\, h \text{, en vol de creuer.}$$

$$C_1(\tilde{\tau}) = \left(C^* + 343'2\right) e^{-0'028\,\tilde{\tau}} - 343'2 = 30 \Rightarrow C^* = 373'2\, e^{0'028 \cdot \frac{70}{9}} - 343'2$$

$$\cong 120'80357\, t.$$

$$C_2(\tilde{\tau}) = \left(C_{\text{Màx}} + 343'2\right) e^{-0'028\,\tilde{\tau}} - 343'2 = -343'2 + 591'2\, e^{-0'028 \cdot \frac{70}{9}} \cong 132'3046170\, t$$

Estalvi de combustible:

$$\Delta_C = \underbrace{\left(C_{\text{Màx}} - C_2(\tilde{\tau})\right)}_{\substack{\text{combustible que es} \\ \text{gasta a altitud i} \\ \text{velocitat de creuer} \\ \text{quan s'omple tot el} \\ \text{dipòsit}}} - \underbrace{\left(C^* - 30\right)}_{\substack{\text{Id. quan} \\ \text{s'omple el dipòsit} \\ \text{només amb la} \\ \text{quantitat} \\ \text{necessària}}} = \underline{24'89181\, t}$$