Classe: 04/03/2014, Problemes 25 i 27:

25) Considerem la funció $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

a) Aplicant la definició de derivada parcial, calculeu $f_x(0,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0 \implies f_x(0,0)=0.$$

A partir de la simetria — respecte de l'intercanvi de x i y — es segueix de l'enunciat que també $f_y(0,0)=0$.

b) Calculeu $f_x(x,y)$ si $(x,y)\neq(0,0)$.

$$f_x(x,y) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - x^2y/\sqrt{x^2+y^2}}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{y^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3},\ (x,y)\neq(0,0)$$

i, de nou, per simetria respecte de l'intercanvi de x i y es dedueix que $f_y(x,y) = \dfrac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$ per $(x,y)\neq(0,0)$. □

c) Demostreu que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$.

Es comprova fàcilment fent límits a l'origen per rectes $r_{\alpha,\beta} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=\alpha t, y=\beta t, t\in\mathbb{R}\}$ amb $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{\substack{(0,0)\\ r_{\alpha,\beta}}} f_x(x,y) = \lim_{t\to 0} f_x(\alpha t,\beta t) = \lim_{t\to 0}\frac{\beta^3 t^3}{|t|^3\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^3}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\beta^3}{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^3}\cdot\dfrac{t^3}{|t|^3} = \dfrac{\beta^3}{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^3}, \\ \lim\limits_{t\to 0^-} \dfrac{\beta^3}{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^3}\cdot\dfrac{t^3}{|t|^3} = \dfrac{-\beta^3}{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^3}, \end{cases}$$

per tant $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f_x$ (per $\beta\neq 0$ ni tan sols existeixen límits direccionals). De la mateixa manera es comprova que $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f_y$. □

En canvi, fora de $(x,y)=(0,0)$ f_x i f_y són funcions contínues perquè són quocients de funcions contínues i el denominador no s'anul·la fora de l'origen (criteris de generació).

d) Quin és el subconjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que f és $C^1(D)$?

Pel que s'ha dit a l'apartat anterior és clar que $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\square$

27) Considereu la funció $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ i $f(0,0) = 0$.

a) Calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(3x^2y-y^3)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4y-x^2y^3+3x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y)\neq(0,0).$$

$$f_y(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$ com es dedueix la (anti)-simetria de la funció f respecte de l'intercanvi de x i y (i.e. $f(y,x) = -f(x,y)$). $\square$

b) Usant la definició calculeu $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \implies f_x(0,0) = 0$$, i de l'anti-simetria de f respecte de l'intercanvi de x i y es dedueix d'immediat que també $f_y(0,0) = 0$.

Per tant $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$. $\square$

c) Usant la definició, calculeu $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_y(t,0)-f_y(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^5/t^4 - 0}{t} = 1 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = 1.$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_x(0,t)-f_x(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t^5/t^4 - 0}{t} = -1 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = -1. \ \square$$

d) Quin és el conjunt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que $f \in C^2(D)$.

f és un quocient de polinomis on el denominador només s'anul·la en $(x,y) = (0,0)$. Per tant, totes les seves derivades parcials, a qualsevol ordre, seran contínues fora de $(x,y) = (0,0)$.

En l'origen: f_x i f_y són de la forma $\dfrac{\text{polinomi homogeni de grau 5 en } x,y}{\|(x,y)\|^4} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f_x(0,0) = f_y(0,0)$.

Aleshores $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. En canvi, les derivades parcials de f no són contínues a $(x,y) = (0,0)$, ja que $f_{xy}(0,0) = 1 \neq -1 = f_{yx}(0,0)$. Llavors $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ és el conjunt més gran on f és de classe C^2. □

e) Quin és el subconjunt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ més gran on tenim que $f \in C^\infty(D)$.

Pel que hem dit a l'apartat anterior $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$: fora de l'origen tenim un quocient de polinomis (per tant de funcions C^∞) on el denominador no s'anul·la. En canvi f no pot ser de classe C^∞ a tot $\mathbb{R}^2$ perquè f_{xy} i f_{yx} no són contínues en $(0,0)$ □

Classe 06-03-2014. Problemes: 29, 33 (regla de la cadena); 34 (teorema de la funció inversa); 37 (teorema de la funció implícita).