TEMA 8

Integrals Impròpies

1 Comparació per quocient

PROPOSCIÓ 1.1 (Comparació per quocient). *Siguin $f, g : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ de signe constant i elementalmente integrable (això és, contínues a trossos a qualsevol subinterval compacte contingut a $[a, K] \subset [a + \infty)$ per tot $K > a$). Aleshores, si existeix el límit,*

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

i és $L \neq 0, +\infty$; llavors $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} g$ són ambdues (absolutament) convergents o divergents. Escriurem:

$$\int_a^{+\infty} f \sim \int_a^{+\infty} g.$$

Quan $L = 0$ ó $L = +\infty$, tenim encara el següent resutat. Per f, g de signe constant i elementalment integrables a $[a, +\infty)$:

- *Si $L = 0$ i la integral $\int_a^{+\infty} g$ és (absolutament) convergent, la integral $\int_a^{+\infty} f$ també convergeix (absolutament).*
- *Si $L = +\infty$ i la integral $\int_a^{+\infty} g$ és divergent, llavors la integral $\int_a^{+\infty} f$ també és divergent.*

Aquesta proposició s'aplica idènticament al cas de funcions reals de signe constant definides a un interval compacte però que són no acotades a algun punt de l'interval. Així per exemple, si les funcions $f, g : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ són de signe constant, amb f i/o g no acotades prop d'a i elementalment integrables a qualsevol interval compacte $[a + \delta, b]$ per tot $0 < \delta < b - a$.

COROL·LARI 1.2 (Criteri de Riemann-Pringsheim). *Sigui f definida i elementalment integrable a $[a, +\infty)$ (i. e., f contínua a trossos a qualsevol interval compacte $[a, K] \subset [a, +\infty)$, per tot $K > a$) i amb signe constant al mateix interval; llavors: si existeix el límit $L = \lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x)$ amb $L \neq 0, +\infty$ per algun $\alpha \in \mathbb{R}$, la integral:*

$$\int_a^{+\infty} f \text{ és (absolutament) convergent} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Tanmateix:

- *Si $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = 0$ per algun $\alpha > 1$, llavors $\int_a^{\infty} f$ és convergent.*
- *Si $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ per algun $\alpha < 1$, llavors $\int_a^{\infty} f$ és divergent.*

2 Problemes

1. Estudieu la convergència de

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x \, \mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x$.

$\triangleleft$ **Solució.** *a)* $\tan x$ és no acotada a $x = \pi/2$, ja que $\tan x \to +\infty$ quan $x \to \pi/2^-$. En aquest cas podem primitivitzar i prendre límits, llavors:

$$\int_0^{\pi/2} \tan x \, \mathrm{d} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \tan x \, \mathrm{d}x = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} [-\ln(\cos x)]_0^b = -\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \ln(\cos b) = +\infty,$$

i la integral és divergent.

b) La funció $\ln x$ és no acotada prop de $x = 0$, donat que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Com abans podem primitivitzar i prendre límits:

$$\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \ln x \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} [x(\ln x - 1)]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} (-1 - a(\ln a - 1)) = -1,$$

per tant convergent.

c) En aquest cas, l'interval és no acotat. Podem procedir com als casos anteriors, fent

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \lim_{K\to+\infty} \int_0^K x^2 \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x &= \lim_{K\to+\infty} \left[-(x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^K \\ &= \lim_{K\to+\infty} \left[2 - (K^2 + 2K + 2)\mathrm{e}^{-K}\right] = 2.\end{aligned}$$

Aleshores la integral és convergent. Si només ens interessés determinar la convergència, notem que $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x} \geq 0$ per tot $x \in \mathbb{R}$. Per tant la funció integral definida per

$$F(x) := \int_0^x t^2 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t,$$

és creixent, i així $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existeix però pot ser $+\infty$. El límit serà finit si i només si $F(x)$ està fitada sobre $[0, +\infty)$, i. e., si existeix $K > 0$ tal que $F(x) \leq K$, per tot $x \geq 0$. En efecte, fent servir que $g(t) = t^2 \mathrm{e}^{-t/2} \leq 16/\mathrm{e}^2$ per tot $t \in \mathbb{R}$ —només cal veure que, per $t \geq 0$, $g(t)$ té un màxim absolut a $t = 4$, on val $g(4) = 16/\mathrm{e}^2$. Així:

$$F(x) = \int_0^x t^2 \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \int_0^x t^2 \mathrm{e}^{-t/2} \mathrm{e}^{-t/2} \, \mathrm{d}t \leq \frac{16}{\mathrm{e}^2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t/2} \, \mathrm{d}t \leq \frac{16}{\mathrm{e}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2} \, \mathrm{d}t = \frac{32}{\mathrm{e}^2} < +\infty$$

ja que,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2} \, \mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \mathrm{e}^{-t/2} \, \mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty} \left[-2\mathrm{e}^{-t/2}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} 2\left(1 - \mathrm{e}^{-b/2}\right) = 2$$

i per tant la integral és convergent. $\triangleright$

2. Estudieu la convergència de:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \ln x}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x + x^2}}$,

(d) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$, (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) \mathrm{d}x$, (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1 + x^3}} \mathrm{d}x$.

$\triangleleft$ **Solució.** *a)* Notem que:

$$f(x) = \frac{x \ln x}{1 + x^2} \leq 0, \quad \text{a } \ 0 < x \leq 1, \ \text{ i que: } f \in \mathcal{C}\left(]0, 1]\right);$$

de fet, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Aleshores re-definint $f(x) = 0$, és $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Així $f \in \mathcal{CT}([0,1])$, i. e., f és contínua a trossos a l'interval $[0,1]$ i per tant, elementalment integrable i llavors la integral és convergent.

b) La funció subintegral, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ és contínua a l'interval $]1,3]$ però no acotada prop de $x = 1$ (notem que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$). Com que té primitiva "fàcil" podem estudiar la seva convergència, tal com s'ha fet als apartats del problema 1,

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} &= \lim_{a\to 1^+}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{a\to 1^+}[\operatorname{argcosh} x]_a^3\\ &= \lim_{a\to 1^+}(\operatorname{argcosh} 3 - \operatorname{argcosh} a) = \operatorname{argcosh} 3.\end{aligned}$$

c) La funció $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}+x^2} \geq 0$ a $]0,1]$, i és no acotada a $x = 0$. Aplicant el criteri de majorització:

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x}},\ \forall\, x \geq 0 \implies \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x^2} \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} =$$
$$\lim_{a\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} 2\left(1-\sqrt{a}\right) = 2,$$

llavors la integral és convergent.

d) Sigui $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} \geq 0$, a $]0,\pi[$. Podem fer:

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = 2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} =$$
$$2\int_0^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}\,\frac{\mathrm{d}x}{x} \geq \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = 2\lim_{a\to 0^+}[\ln x]_a^{\pi/2} = 2\lim_{a\to 0^+}\left(\ln\frac{\pi}{2} - \ln a\right) = +\infty,$$

on hem fet servir que $\dfrac{x}{\sin x} \geq 1$ a l'interval $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Per tant la integral és divergent.

e) Com que $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x \geq 0$ en $[0,+\infty)$, aplicarem el criteri de Riemann-Pringsheim, corol·lari 1.2. Tenim que:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = 1.$$

En efecte, ja que el límit del quocient de derivades és

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{D\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{D\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

y per tant, per L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}} = 1.$$

Llavors, com hem esmentat, del criteri de Riemann-Pringsheim amb $\alpha = 1$ es segueix la divergància de la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)\,\mathrm{d}x$.

f) Aquí, la funció subintegral, $f(x) = \dfrac{\arctan x}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$, per tot $x \geq 0$ i per tant és de signe constant a tot l'interval d'integració. Aplicarem el crietri de Riemann-Pringsheim, corol·lari 1.2 amb $\alpha = 3/2 > 1$, donat que el límit:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}}{x^{3/2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^3}}}\arctan x = \frac{\pi}{2} \neq 0, +\infty,$$

i donat que l'exponent $\alpha = 3/2 > 1$, llavors la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$ és (absolutament) convergent. Alternativament, podem fer servir el criteri de comparació per majorització:

$$0 \leq \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^3}} \leq \frac{\arctan x}{x^{3/2}} \leq \frac{\pi/2}{x^{3/2}},$$

per tot $x \geq 1$; i com que:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\pi/2}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-2}{x^{1/2}}\right]_1^b = \pi\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{b}}\right) = \pi < +\infty$$

és absolutament convergent, aleshores la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$ és (absolutament) convergent; i així la integral estudiada, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$ també convergeix absolutament. $\triangleright$

3. Estudieu la convergència de

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^{1/2}}\,\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

$\triangleleft$ **Solució.** *a)* $f(x) = \ln x \ln(1+x)$ és contínua en $(0,1]$. Prop de $x = 0$ $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$, per tant $f(x) = x\ln x(1+\mathcal{O}(x)) \to 0$, quan $x \to 0^+$. Així $f \in \mathcal{CT}([0,1])$ si $f(0) = 0$, i la funció és doncs elementalment integrable i per tant convergent.

b) $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{(1-x)^{1/2}}$ és contínua en $[0,1)$. De fet, fent el canvi $t = 1-x$, queda

$$I := \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} x = 1-t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t, \\ x \to 1^- \Rightarrow t \to 0^+,\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{array}\right\} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^{1/2}}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Notem que $\ln t \leq 0$ si $0 < t \leq 1$ i per tant, si definim,

$$I_\delta := \int_\delta^1 \frac{\ln t}{t^{1/2}}\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

amb $0 < \delta < 1$; el límit $\lim_{\delta\to0^+} I_\delta$ però podria ser $-\infty$. Per conveniència, introduïm a continuació:

$$J := -\int_0^1 -\frac{\ln t}{t^{1/2}}\,\mathrm{d}t = -I, \qquad J_\delta := \int_0^1 -\frac{\ln t}{t^{1/2}}\,\mathrm{d}t = -I_\delta$$

(en particular, la convergència de la integral J implica la convergència de la integral estudiada, I). Com que la funció subintegral que hi apareix a J i J_δ per $0 < \delta \leq t \leq 1$: $g(t) := -\ln t/t^{1/2} \geq 0$; és clar que J_δ creix monotònicament quan δ decreix cap a zero o, de manera més precisa: $J_{\delta_1} \geq J_{\delta_2}$ per tot $0 < \delta_1 \leq \delta_2 < 1$ i llavors, com dèiem pel límit de la integral I_δ en (2) quan $\delta \to 0^+$, el límit $\displaystyle\lim_{\delta\to0^+} J_\delta$ existeix, però, podira ser $+\infty$. D'altra banda però

$$J_\delta := \int_\delta^1 -\frac{\ln t}{t^{1/2}}\,\mathrm{d}t = \int_\delta^1 \frac{t^{1/4}\ln\dfrac{1}{t}}{t^{3/4}}\,\mathrm{d}t \leq M\int_\delta^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/4}}\,\mathrm{d}t = 4M\left[t^{1/4}\right]_\delta^1 = 4M(1-\delta^{1/4}) \leq 4M \tag{3}$$

per tot $0 < \delta < 1$, amb M independent de δ. Aleshores $\displaystyle\lim_{\delta\to0^+} J_\delta < +\infty$, la qual cosa implica la convergència de la integral I a (1).

Remarca 2.1. en (3), $M := \sup_{0<t\le 1} h(t)$, amb $h(t) := t^{1/4}\ln(1/t)$, $t>0$. Es comprovar $M = 4/\mathrm{e}$. En efecte, la funció $h(t)$ és derivable en tot el su camp de definició i la seva derivada

$$h'(t) = -\frac{t^{-3/4}}{4}\ln t - t^{-3/4} = -\frac{t^{-3/4}}{4}(\ln t + 4),$$

només s'anul·la en $\mathring{t} = 1/\mathrm{e}^4 < 1$. Com que d'altra banda, $h(t) > 0$ per $0 < t < 1$, $h(1) = 0$ i $\lim_{t\to 0^+} h(t) = 0$; resulta $M := \sup_{0<t\le 1} h(t) = h(1/\mathrm{e}^4) = 4/\mathrm{e}$.

c) Descomposarem la integral del enunciat com a suma de dues integrals:

$$I := \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2$$

amb,

$$I_1 := \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 := \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Veiem que I_1 és no acotada prop del 0, donat que el límit de la funció subintegral és:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = +\infty,$$

mentre que l'interval d'integració $[1,+\infty)$ a I_2 és no acotat. Així tenim que I_1, I_2 són integrals impròpies de segona i primera espècie respectivament. D'una banda, tenim:

$$I_1(\delta) := \int_\delta^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$\int_\delta^1 \frac{(x^{1/4}\ln x)^2}{x^{1/2}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \le M^2 \int_\delta^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/2}} = M^2\left[x^{1/2}\right]_\delta^1 = M^2\left(1-\sqrt{\delta}\right) \le 2M^2,$$

per tot $0 < \delta < 1$ i on

$$M = \sup_{0<t\le 1}(-t^{1/4}\ln t) = 4/\mathrm{e} \Longrightarrow \sup_{0<t<\le 1}(-t^{1/4}\ln t)^2 = M^2 = 16/\mathrm{e}^2$$

(veure la remarca 2.1 al final de l'apartat *b)*), i d'aquí l'acotació de la integral $I_1(\delta)$ de dalt. Com que $I_1(\delta)$ creix monotònicament quan δ decreix, i. e.: $I_1(\delta_1) \ge I_2(\delta_2)$ per tot $0 < \delta_1 \le \delta_2 < 1$. Això prova que el límit $I_1 = \lim_{\delta\to 0^+} I_1(\delta)$ existeix i és finit. Aquí es conclou la convergància de la integral I_1.

D'altra banda, per estudiar la convergència de la integral I_2,

$$I_2(b) := \int_1^b \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_1^b \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^b \left(\frac{\ln x}{x^{1/4}}\right)^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}} \le \frac{16}{\mathrm{e}^2}\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/2}} = \frac{16}{\mathrm{e}^2}\left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^b = \frac{32}{\mathrm{e}^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{b}}\right) \le \frac{32}{\mathrm{e}^2}, \quad (4)$$

per tot $b > 1$. Com que $I_2(b)$ creix monotònicament amb b, i. e.: $I_2(b_2) \ge I_2(b_1)$, per $b_2 \ge b_1 > 1$, el límit $\lim_{b\to+\infty} I_2(b)$, existeix i de l'acotació (4) es dedueix que és finit. Així doncs es conclou que la integral I_2 és convergent.

Remarca 2.2. Veiem que a (4) s'ha fet servir la següent acotació de la funció subintegral:

$$0 \le \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} \le \frac{(\ln x)^2}{x^2} \le \left(\frac{\ln x}{x^{1/4}}\right)^2 \frac{1}{x^{3/2}} \le \frac{16/\mathrm{e}^2}{x^{3/2}}, \qquad \text{per tot } x \ge 1$$

on s'ha tingut en compete que $\sup_{x\ge 1}\left(x^{-1/4}\ln x\right)^2 = 16/\mathrm{e}^2$. En efecte, sigui $h(x) := x^{-1/4}\ln x$, $x > 0$; llavors la seva derivada, $h'(x) = x^{-3/4}(4-\ln x)/4$ és $h'(x) > 0$ per $0 < x < \mathrm{e}^4$ mentre que $h'(x) < 0$ per $x > \mathrm{e}^4 > 1$. Com que, d'altra banda és $h(1) = 1\ln 1 = 0$ i $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{-1/4}\ln x = 0$, tenim que $h(x)$ assoleix el seu màxim absolut a l'interval $[1,+\infty)$ al punt $x = \mathrm{e}^4$, on val $h(\mathrm{e}^4) = \mathrm{e}^{-1}\ln\mathrm{e}^4 = 4/\mathrm{e}$, i. e.:

$$\sup_{x\ge 1}\left(x^{-1/4}\ln x\right) = \frac{4}{\mathrm{e}} \Longrightarrow \sup_{x\ge 1}\left(x^{-1/4}\ln x\right)^2 = \frac{16}{\mathrm{e}^2}.$$

Això completa l'apartat *c)*.$\triangleright$

4. Siguin $f_n(x) = \dfrac{1}{\cosh^n x}, n = 1, 2, 3, \ldots$

a) Proveu que la integral $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$ és convergent, *b)* $I_n = \dfrac{n-2}{n-1} I_{n-2}$, *c)* Calculeu I_n per tot $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\triangleleft$ **Solució.** *a)* Podem re-escriure la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ com,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^n x} =$$

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^n x} = 2\int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\right)^n \mathrm{d}x = 2^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+\mathrm{e}^{-2x})^n}\,\mathrm{d}x,$$

on hem fet servir que $\cosh x$ és una funció parella definida en tot $\mathbb{R}$. Tenim que la funció subintegral,

$$g_n(x) := \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+\mathrm{e}^{-2x})} \in \mathcal{C}T([0,b])$$

per tot $b > 0$ i amb $n \in \mathbb{N}$. Per tant, si definim $J_n(b) := \displaystyle\int_0^b g_n(x)\,\mathrm{d}x$ amb $b > 0$, les integrals impròpies vénen donades pel límits:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 2^{n+1} \lim_{b\to+\infty} J_n(b). \tag{5}$$

Com que d'altra banda: $g_n(x) \geq 0$ per tot $x \geq 0$ i tota $n \in \mathbb{N}$, les $J_n(b)$ creixen monotònicament amb b i els límits en (5) existeixen (per totes les $n \in \mathbb{N}$) però podrien ser $+\infty$. Ara bé:

$$J_n(b) = \int_0^b \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+\mathrm{e}^{-2x})^n}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^b \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{-nx}\right]_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{n}\left(1 - \mathrm{e}^{-nb}\right) \leq 1,$$

per tot $b > 0$ i tota $n = 1, 2, 3, \ldots (n \in \mathbb{N})$. Aleshores $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} J_n(b) < +\infty$ i de (5) es deriva la convergència de les integrals I_n, per $n \in \mathbb{N}$.

b) Es comprova integrant per parts:

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^n x} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^n x} = \left\{ \begin{array}{l} u = \dfrac{1}{\cosh^{n-2} x} \Rightarrow \mathrm{d}u = -(n-2)\dfrac{\sinh x}{\cosh^{n-1} x}\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{\cosh^2 x} \Rightarrow v = \tanh x \end{array} \right\}$$

$$= 2\lim_{b\to+\infty} \left[\frac{\tanh x}{\cosh^{n-1} x}\right]_0^b + 2(n-2)\int_0^{+\infty} \frac{\sinh^2 x}{\cosh^n x}\,\mathrm{d}x = 2(n-2)\int_0^{+\infty} \frac{\cosh^2 x - 1}{\cosh^n x}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2(n-2)\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^{n-2} x} - 2(n-2)\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^n x} = (n-2)I_{n-2} - (n-2)I_n$$

d'on, aïllant I_n s'obté: $I_n = \dfrac{n-2}{n-1} I_{n-2}$, per $n = 3, 4, \ldots$

Remarca 2.3. En el càlcul de dalt s'ha fet servir que la funció subintegral, $\cosh^{-n} x, n = 1, 2, 3, \ldots$ es parella, mentre que d'altra banda és immediat que el límit que apareix en fer la integració per parts, i. e.:

$$\lim_{b\to+\infty} \left[\frac{\tanh x}{\cosh^{n-1} x}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{\tanh b}{\cosh^{n-2} b} = 0.$$

c) Càlcul de I_n. Com que $\cosh^{-n} x$ és una funció parella i $\mathcal{CT}([0,b])$ per tot $b>0$ i per tot $n \in \mathbb{N}$, tenim:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = 4\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = 4 \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$4 \lim_{b\to+\infty} [\arctan \mathrm{e}^x]_0^b = 4 \lim_{b\to+\infty} \left(\arctan \mathrm{e}^b - \frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi,$$

per $n=1$,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} =$$

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = 2 \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} 2 \lim_{b\to+\infty} [\tanh x]_0^b = 2 \lim_{b\to+\infty} \tanh b = 2,$$

per $n=2$. A partir d'aquí, amb la fórmula de recurrència probada a l'apartat anterior hom obté,

$$I_1 = \pi, \quad I_2 = 2, \quad I_3 = \frac{\pi}{2}, \quad I_4 = \frac{2}{3} \times 2, \quad I_5 = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2\cdot 1}\pi = \frac{3!!}{4!!}\pi, \quad I_6 = \frac{4\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 3\cdot 1} \times 2 = \frac{4!!}{5!!} \times 2,$$

$$I_7 = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2\cdot 1}\pi = \frac{5!!}{6!!}\pi, \quad I_8 = \frac{6\cdot 4\cdot 2\cdot 1}{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1} \times 2 = \frac{6!!}{7!!} \times 2, \quad I_9 = \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot 1}\pi = \frac{7!!}{8!!}\pi, \ldots$$

d'on, per inducció, es comprova d'immediat que:

$$I_{2p} = \frac{(2p-2)!!}{(2p-1)!!} \times 2, \qquad I_{2p+1} = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\pi,$$

per $p = 1,2,3,\ldots$, mentre que $I_1 = \pi$, tal com ja s'ha obtingut dalt pel càlcul directe. $\triangleright$

5. Proveu que les integrals

$$A = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad B = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x, \qquad C = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

són convergents i que $B + C = 2A$, $A - C = B/4$.

$\triangleleft$ **Solució.**Denotem les funcions subintegrals:

$$f_A(x) := \frac{\ln x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}\frac{\ln x}{1-x} = \frac{1}{1+x} f_B(x), \quad f_B(x) := \frac{\ln x}{1-x}, \quad f_C(x) := \frac{\ln x}{1+x},$$

a más veiem que: $f_A(x) \le 0, f_B(x) \le 0, f_C(x) \le 0$ per $0 < x < 1$; és a dir, les tres funcions subintegrals són contínues i de signe constant a l'interval $(0,1)$.

Comencem amb la integral B. Veiem que $f_B \in \mathcal{CT}([b,1])$ per tot $0 < b < 1$, ja que és contínua sobre aquests intervals i el límit,

$$\lim_{x\to 1^-} f_B(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f_B(x)}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1-(1-x))}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(1-x) + R_2(1-x)}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \left(-1 + \frac{R_2(1-x)}{1-x}\right) = -1.$$

Per tant $B_2 := \displaystyle\int_b^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$ és convergent. Per estudiar la convergència prop de $x=0$, i. e., la de la integral

$$B_1 := \int_0^b \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x, \qquad 0 < b < 1,$$

apliquem el criteri de comparació per quocient amb $g(x) = \ln x$ que és negativa (per tant, de signe constant) a l'interval $(0,b)$, $0 < b < 1$. Llavors,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x/(1-x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-x} = 1 \Longrightarrow \int_0^b \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x \sim \int_0^b \ln x\,\mathrm{d}x$$

per $0 < b < 1$, i com que $\displaystyle\int_0^b \ln x\,\mathrm{d}x$, és convergent per tot $b > 0$ (veure exercici 1, apartat (b)), la integral $B = B_1 + B_2$ es també convergent. Per la integral A tenim:

$$\lim_{x\to 1^-} f_A(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f_B(x)}{1+x} = -\frac{1}{2}.$$

Amb la qual cosa $A_2 = \int_b^1 f_A(x)\mathrm{d}x$ amb $0 < b < 1$ és convergent. D'altra banda, aplicant comparació per quocient:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_A(x)}{f_B(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1 \Longrightarrow A_1 := \int_0^b f_A(x)\mathrm{d}x \sim B_1 := \int_0^b f_B(x)\mathrm{d}x,$$

per tot $0 < b < 1$. I com que B_1 és convergent segons ja s'ha vist, també ho és A_1 i en conseqüència la integral $A = A_1 + A_2$ és convergent.

Per últim la integral C és també convergent. En efecte, aplicant el criteri del quocient,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_C(x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1 \Longrightarrow \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\mathrm{d}x \sim \int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$$

i com ja es va assenyalar dalt, $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$ és convergent: $\ln x$ és contínua a l'interval $[\delta, 1]$, per tot $0 < \delta < 1$; i el límit

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int \delta^1 \ln x\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0^+} [x\ln x - x]_\delta^1 = \lim_{\delta\to 0^+} (-1 - \delta\ln\delta + \delta) = -1,$$

existeix i és finit; per tant $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x = -1$.

Així hem provat que les integrals A, B i C són convergents. A més:

$$B + C = 2\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = 2A,$$

$$A - C = \int_0^1 \frac{x\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} \text{c. v. :} \\ t = x^2 \Rightarrow 2x\mathrm{d}x, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = 1 \Rightarrow t = 1. \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln\sqrt{t}}{1-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\mathrm{d}t = \frac{B}{4}. \rhd$$

6. Siguin $p(x)$, $q(x)$ polinomis de grau n i $n+1$ respectivament, amb n senar i $q(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$. Proveu que existeix $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$.

$\lhd$ **Solució.**$q(x)$ és de grau $n+1$ *parell* (ja que n és senar, segons l'enunciat). El "truquet" en aquest problema consisteix en dividir $p(x)$ entre $q'(x)$: $p(x) = Aq'(x) + r(x)$, on $A = \dfrac{p_n}{(n+1)q_{n+1}} \neq 0$ i $r(x)$ és un polinomi de grau $\leq n+1$. Així:

$$\int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = A\int_{-R}^R \frac{q'(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{-R}^R \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = A\left|\frac{q(R)}{q(-R)}\right| + J_R, \quad \text{on} \quad J_R := \int_{-R}^R \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Ara, com que $q(x)$ és un polinomi de grau parell:

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{q(R)}{q(-R)} = 1 \Longrightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^R \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} J_R. \tag{6}$$

Si aquest últim límit existeix, com veurem que és el cas. En efecte: sabem que grau $r(x) \leq n-1$ i grau $q(x) = n+1$, tenim que $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 r(x)/q(x) \in \mathbb{R}$ (en particular serà 0 quan grau $r(x) < n-1$); així:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2\frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{quan grau } r(x) < n-1, \\ \dfrac{r_{n-1}}{q_{n+1}}, & \text{quan grau } r(x) = n-1. \end{cases}$$

Tenint ara en compte que $p(x)/q(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ (ja que $p(x), q(x)$ són polinomis amb $q(x) \neq 0$ per tot $x \in \mathbb{R}$) i que les integrals

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}, \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

són convergents; tenim —pel criteri de Pringsheim-Riemann—, que ho són també les integrals impròpies

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{0} \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{r(x)}{q(x)}\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{0}^{R} \frac{r(x)}{q(x)}\mathrm{d}x.$$

Queda clar doncs que el límit

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty} J_R = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{0} \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x + \lim_{R\to+\infty} \int_{0}^{R} \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

existeix i en conseqüència (segons (6)), existeix el límit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q(x)}{p(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{q(x)}{p(x)}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} J_R = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

com es volia provar. ▷

7. (a) Demostreu que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ és convergent.

(b) Estudieu la convergència de $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x, \int_{1}^{+\infty} x\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

(c) Ídem, segons α, de $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$

(d) Ídem, segons α, β de $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x.$

◁ **Solució.** *(a)* la funció $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$ és contínua per $x > 0$ i $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, per tant la funció és elementalment integrable i la integral $I_1 := \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ és "pròpia" i llavors, convergent. Per estudiar la seva integral a l'interval $[1, +\infty)$, integrem per parts:

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{x}, & \text{and then: } u' = -\dfrac{1}{x^2}, \\ v' = \sin x, & \text{and then: } v = -\cos x. \end{array} \right\} = \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_{1}^{+\infty} - \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{7}$$

Aquí:

$$\Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_{1}^{+\infty} = \lim_{K\to+\infty} \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_{1}^{K} = \cos 1 - \lim_{K\to+\infty} \frac{\cos K}{K} = \cos 1,$$

mentre que la integral:

$$I_3 := \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

és absolutament convergent. En efecte, com que

$$0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \text{ per tot } x \geq 1, \text{ llavors:}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \text{ CONV.} \Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ CONV.}$$

(comparació per majorització), d'on resulta que la integral I_3 és (absolutament) convergent. En consqüència I_2 en (7) també ho és i; per últim, com que la integral de l'apartat *(a)* de l'enunciat és:

$$I_1 := \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad I_2 := \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{i.e.: } I := I_1 + I_2;$$

queda provada doncs la convergència d'aquesta.

(b) La funció $g(x) := x \sin \frac{1}{x}$ és elementalment integrable a l'interval $[0, 1]$, ja que és contínua a l'interval $(0, 1)$ i els límits als extrems són

$$\lim_{x\to 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to 1^-} x \sin \frac{1}{x} = \sin 1,$$

per tant la integral $\displaystyle\int_0^1 x \sin \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ és "pròpia" i així, convergent.

D'altra banda, la funció $g(x)$ és contínua per $x \geq 1$ però com que existeix el límit:

$$\lim_{x\to +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1 (\neq 0), \text{ la integral: } \int_1^{+\infty} x \sin \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \text{ és DIV.,}$$

ja que no satisfà la *condició necessària de convergència* de Cauchy.

(c) Per estudiar la primera integral, veiem que per a qualsevol $\alpha \in \mathbb{R}$, la funció $h(x) := \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ és contínua per $x \neq 0$ i positiva per $0 < x \leq 1$. Aplicant el criteri de comparació per quocient:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1} \frac{\sin x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \Longrightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \sim \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha-1}} \text{ CONV. } \Leftrightarrow \alpha < 2,$$

d'on resulta que la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ també és convergent si, i només si $\alpha < 2$.

Per la segona de les integrals de l'apartat *(c)*, procedirem de manera diferent, segons $\alpha > 0$ ó $\alpha \leq 0$. En el primer cas, integrem per parts:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = x^{-\alpha}, & \text{and then: } u' = -\alpha x^{-\alpha-1} \\ v' = \sin x, & \text{and then: } v = -\cos x. \end{array} \right\} = \left[-\frac{\cos x}{x^\alpha} \right]_1^{+\infty} - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}x.$$

En aquest cas, per $\alpha > 0$ tenim, d'uma banda:

$$\left[-\frac{\cos x}{x^\alpha} \right]_1^{+\infty} = \lim_{K\to +\infty} \left[-\frac{\cos x}{x^\alpha} \right]_1^K = \cos 1 - \lim_{K\to +\infty} \frac{\cos K}{K^\alpha} = \cos 1,$$

mentre que per altra part,

$$0 < \frac{|\cos x|}{x^{1+\alpha}} \leq \frac{1}{x^{1+\alpha}}, \text{ per tot } x \geq 1, \text{ llavors; com que la integral } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1+\alpha}} \text{ és CONV.}$$

$(1 + \alpha > 1$, donat que $\alpha > 0)$; la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}x \text{ és CONV.; i per tant la integral: } \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{1+\alpha}}\,\mathrm{d}x \text{ és (ABS.) CONV.}$$

Per estudiar la convergència de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ quan $\alpha \le 0$ considerarem, per $p \in \mathbb{N}$ ($p = 1, 2, 3, \dots$):

$$\left| \int_{2p\pi}^{(2p+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \right| = \frac{1}{\xi_p^\alpha} \left| \int_{2p\pi}^{(2p+1)\pi} \sin x\,\mathrm{d}x \right|$$

$$= \frac{1}{\xi_p^\alpha} \int_{2p\pi}^{(2p+1)\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\xi_p^\alpha} \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x \ge 2(2\pi p)^{-\alpha} \ge 2, \quad (8)$$

on en el segon pas, hem aplicat el teorema del valor mitjà del càlcul integral, per tant:

$$2\pi p \le \xi_p \le (2p+1)\pi \Longrightarrow \xi_p^{-\alpha} \ge (2\pi p)^{-\alpha},$$

per a qualsevol $\alpha \le 0$ i per tot $p = 1, 2, 3, \dots$. Tenint en compte (8) el Criteri de Cauchy ens assegura que la integral divergeix quan $\alpha \le 0$.

Remarca 2.4. Aquí apliquem el Criteri de Cauchy amb els quantificadors "canviats", i. e.: si existeix un nombre positiu ε tal que per tot nombre $M > 0$ és $\left|\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f\right| \ge \varepsilon$, per algun perell de valors x_1, x_2.

Aquí només cal agafar $\varepsilon = 2$ i aleshores, per un $M > 0$ donat es pot agafar $x_1 = 2\pi p$, $x_2 = (2p+1)\pi$, amb[1] $p = \left\lfloor \dfrac{M}{2\pi} \right\rfloor + 1$. Resumint:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ CONV.} \Longleftrightarrow \alpha < 2, \quad (9)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \text{ CONV.} \Longleftrightarrow \alpha > 0. \quad (10)$$

Remarca 2.5. De fet, és immediat comprovar (criteri de comparació per majorització) que aquesta última és absolutament convergent per $\alpha > 1$. En efecte:

$$0 < \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}, \text{ per tot } x \ge 1; \text{ i com que la integral } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \text{ és CONV. per } \alpha > 1,$$

llavors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ és CONV. per $\alpha > 1$ i, en conseqüència $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ és (ABS.) CONV. per $\alpha > 1$.

(d) Estudiem primer la integral $I_{\alpha,\beta} := \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$; anlitzant per separat els casos en què $\beta = 0$, $\beta > 0$ i $\beta < 0$.

I) Per $\beta = 0$, tenim:

$$I_{\alpha,0} := \int_0^1 \frac{\sin x^0}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin 1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

que és convergent si, i només si $\alpha < 1$.

II) Per $\beta > 0$:

$$I_{\alpha,\beta} := \int_0^1 \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = x^\beta \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{\beta} x^{\frac{1-\beta}{\beta}}\,\mathrm{d}t, \\ x = 0 \Longrightarrow t = 0, \\ x = 1 \Longrightarrow t = 1. \end{array} \right\} = \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{\sin t}{t^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}}\,\mathrm{d}t, \quad (11)$$

i aplicant les conclusions de l'apartat *(c)* —veure (9)—, la integral (11) és convergent si, i només si:

$$\frac{\alpha + \beta - 1}{\beta} < 2 \overset{(\beta>0)}{\Longleftrightarrow} \alpha + \beta - 1 < 2\beta \Longleftrightarrow \alpha < 1 + \beta.$$

[1] Aquí $\lfloor \cdot \rfloor$ representa la funció "part entera", i. e., per $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \le x\}$.

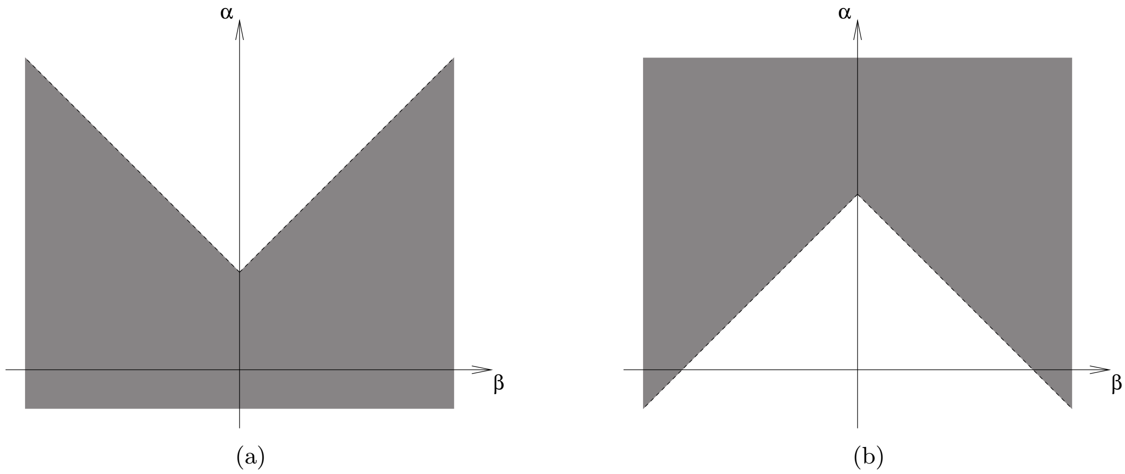

Figura 1. *(a):* Regió de convergència al pla (β, α) de la integral $I_{\alpha,\beta}$, donada per $\mathfrak{C}_{\alpha,\beta}$ definit per (13). *(b)*: Regió de convergància de la integral $J_{\alpha,\beta}$ al pla (β, α) donada per $\mathfrak{D}_{\alpha,\beta}$ definit per (14).

III) Per $\beta < 0$:

$$I_{\alpha,\beta} := \int_0^1 \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = x^\beta \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{\beta} x^{\frac{1-\beta}{\beta}}\,\mathrm{d}t, \\ x \to 0^+ \Longrightarrow t \to +\infty, \\ x = 1 \Longrightarrow t = 1. \end{array}\right\} = -\frac{1}{\beta}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}}\,\mathrm{d}t, \tag{12}$$

Com al cas anterior, aplicant els critris de l'apartat *(c)* —veure (10)—, tenim que la integral (12) és convergent si i només si:

$$\frac{\alpha+\beta-1}{\beta} > 0 \overset{(\beta<0)}{\Longleftrightarrow} \alpha+\beta-1 < 0 \Longleftrightarrow \alpha < 1-\beta.$$

Així doncs, la integral $I_{\alpha,\beta}$ és convergent a la regió del pla (α, β) definida per

$$\mathfrak{C}_{\alpha,\beta} := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < 1 + |\beta|\}, \tag{13}$$

(veure figura 1(a)).

De manera semblant, per discutir la convergència de la integral $J_{\alpha,\beta} := \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, també analitzarem per separat els casos $\beta = 0$, $\beta > 0$ i $\beta < 0$

I) Per $\beta = 0$:

$$J_{\alpha,0} := \int_0^1 \frac{\sin x^0}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin 1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x,$$

que és convergent si, i només si $\alpha > 1$.

II) Per $\beta > 0$:

$$J_{\alpha,\beta} := \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = x^\beta \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{\beta} x^{\frac{1-\beta}{\beta}}\,\mathrm{d}t, \\ x = 1 \Longrightarrow t = 1, \\ x \to +\infty \Longrightarrow t \to +\infty. \end{array}\right\} = \frac{1}{\beta}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}}\,\mathrm{d}t$$

que és convergent (apartat *(c)*, veure (10)) si, i només si:

$$\frac{\alpha+\beta-1}{\beta} > 0 \overset{(\beta>0)}{\Longleftrightarrow} \alpha+\beta-1 > 0 \Longleftrightarrow \alpha > 1-\beta.$$

III) Per $\beta < 0$:

$$J_{\alpha,\beta} := \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^\beta}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = x^\beta \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{\beta} x^{\frac{1-\beta}{\beta}}\,\mathrm{d}t, \\ x = 1 \Longrightarrow t = 1, \\ x \to +\infty \Longrightarrow t \to 0^+. \end{array}\right\} = -\frac{1}{\beta}\int_0^1 \frac{\sin t}{t^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}}\,\mathrm{d}t$$

que és convergent (apartat *(c)*, veure (9)) si, i només si:

$$\frac{\alpha+\beta-1}{\beta} < 2 \overset{(\beta<0)}{\Longleftrightarrow} \alpha+\beta-1 > 2\beta \Longleftrightarrow \alpha > 1+\beta.$$

Així doncs, la integral $J_{\alpha,\beta}$ és convergent a la regió del pla (α,β) definida per

$$\mathfrak{D}_{\alpha,\beta} := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha > 1 + |\beta|\}, \tag{14}$$

(veure figura 1(b)). $\triangleright$

8. Estudieu, segons el valor de α, la convergència de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$.

$\triangleleft$ **Solució.**La integral pot ser impròpia en 0 i en 1 (a l'interior de l'interval, és contínua). Mirem cap a on tendeix la funció subintegral quan $x \to 1^-$. De fet: $\lim_{x\to 1^-}(x^\alpha - 1)/\ln x = 0/0$ (indeterminació), però si es calcula el límit del quocient de les derivades del numerador i del denominador:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{D(x^\alpha - 1)}{D\ln x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x} = \lim_{x\to 1^-} \alpha x^\alpha = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to 1^-} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} = \alpha$$

(regla de L'Hôpital). Veiem doncs que la integral no és impròpia en $x = 1$ per cap valor de α. En canvi, el comportament de la funció subintegral prop de $x = 0$, depèn del valor de α. En efecte:

- Per $\alpha > 0$, $\lim_{x\to 0^+}(x^\alpha - 1)/\ln x = 0$.
- Per $\alpha = 0$ la funció subintegral pren el valor constant 0 a l'inteval $(0,1)$, i per tant el seu límit quan $x \to 0^+$ és també 0.
- Per $\alpha < 0$ resulta la indeterminació $\lim_{x\to 0^+}(x^\alpha - 1)/\ln x = -\infty/\infty$. En canvi, el quocient de derivades:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{D(x^\alpha - 1)}{D(\ln x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \alpha x^\alpha = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} = -\infty$$

(per la regla de L'Hôpital). Llavors, la integral només és impròpia en $x = 0$ i quan $\alpha < 0$. D'altra banda observem que:

$$\frac{x^\alpha - 1}{\ln x} = \frac{x^\alpha}{\ln x}(1 - x^{-\alpha}),$$

i com que $(1 - x^{-\alpha}) \to 1$ quan $x \to 0^+$ per $\alpha < 0$, veiem que hi haurà prou amb estudiar, per exemple, la convergència de la integral

$$\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{x^\alpha}{\ln x}\,\mathrm{d}x, \tag{15}$$

en el sentit de què, per $\alpha < 0$, la integral de l'enunciat serà convergent si i només si la integral de dalt ho és.(2)

(2)En efecte, posant:

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x + \int_{1/\mathrm{e}}^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x;$$

la segona és convergent (de fet, la funció subintegral és elementalment integrable), mentre que per la segona, es pot aplicar comparació per quocient amb $x^\alpha/\ln x$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x^\alpha - 1)/\ln x}{x^\alpha/\ln x} = \lim_{x\to 0^+}(1 - x^{-\alpha}) = 1$$

quan $\alpha < 0$; i remarquem que $(x^\alpha - 1)/\ln x$ i $x^\alpha/\ln x$ són de signe constant |negatiu|, a l'interval $(0,1)$, i obviment també a l'interval $(0, 1/\mathrm{e}) \subset (0,1)$.

Per estudiar la convergència de la integral (15) farem el canvi de variable $x = \mathrm{e}^{-t}$:

$$\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{x^\alpha}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v. :} \\ t = -\ln x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, \\ x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty, \\ x = 1/\mathrm{e} \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} = -\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{16}$$

Estudiarem la convergència d'aquesta última integral per $\alpha < 0$. Es distingueixen els casos següents:

- Per $\alpha < -1$ és $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}/t = +\infty$ i no es satisfà la condició necessària de Cauchy, amb la qual cosa la integral (16) és divergent i en conseqüència la (15) també divergeix.
- Per $\alpha = -1$ la integral (16) es redueix a
$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} = +\infty,$$
que és igualment divergent, la qual cosa implica que la (16) també divergeix.
- En canvi, per $-1 < \alpha < 0$ es té:
$$\lim_{t\to+\infty} t^2\,\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}}{t} = \lim_{t\to+\infty} t\mathrm{e}^{-(\alpha+1)t} = 0.$$
I com que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$ és convergent, el criteri de comparació per quacient ens permet establir la convergència de la integral (16), i d'aquí la de la integral (15).

Finalment, es conclou que la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$ és convergent si i només si $\alpha > -1$. ▷

9. Estudieu, segons el valor de α i β, la convergència de

$$\text{(a) } I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} x^\alpha (\ln x)^\beta\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b) } I_2 = \int_{\mathrm{e}}^{+\infty} x^\alpha (\ln x)^\beta\,\mathrm{d}x,$$
$$\text{(c) } I_3 = \int_0^1 x^\alpha |\ln x|^\beta\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(d) } I_4 = \int_0^{+\infty} x^\alpha |\ln x|^\beta\,\mathrm{d}x.$$

◁ **Solució.** *a)* Per $\beta > 0$ no és impròpia mentre que per $\beta > 0$ és no acotada prop de $x = 1$. Com que $x^\alpha (\ln x)^\beta > 0$ per $1 < x < \mathrm{e}$, podem aplicar el criteri de Riemann:

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{-\beta} x^\alpha (\ln x)^\beta = \lim_{x\to 1^+} x^\alpha \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^\beta = 1,$$

per α, β qualssevol. Per tant,

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{-\beta}} \sim \int_1^{\mathrm{e}} x^\alpha (\ln x)^\beta\,\mathrm{d}x$$

i com que la de l'esquerra és convergent si i només si $\beta > -1$ tindrem que

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} x^\alpha (\ln x)^\beta\,\mathrm{d}x \ \text{ conv. } \Leftrightarrow (\alpha,\beta) \in \mathfrak{C}_1 = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \beta > -1\}. \tag{17}$$

A l'apartat *b)*, per estudiar la convergència de la integral I_2, introduirem el canvi de variable $t = \ln x$:

$$\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} x^\alpha (\ln x)^\beta\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v. :} \\ t = \ln x \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\mathrm{d}t, \\ x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty, \\ x = \mathrm{e} \Rightarrow t = 1. \end{array} \right\} = \int_1^{+\infty} t^\beta \mathrm{e}^{(\alpha+1)t}\,\mathrm{d}t. \tag{18}$$

Aleshores:

- Si $\alpha > -1$ és $\lim_{t\to+\infty} t^\beta \mathrm{e}^{(\alpha+1)t} = +\infty$ per tot $\beta \in \mathbb{R}$: no es satisfà la condició necessària de Cauchy i la integral (18) divergeix per qualsevol valor de β, i per tant, també la integral I_2 divergeix per qualsevol β quan $\alpha > -1$.

- Si $\alpha=-1$, la integral (18) es redueix a
$$\int_1^{+\infty} t^\beta \, \mathrm{d}t;$$
que és convergent si i només si $\beta<-1$; la qual cosa implica que, quan $\alpha=-1$, I_2 convergeix si i només si $\beta<-1$.
- Si $\alpha<-1$, com que $t^\beta \mathrm{e}^{(\alpha+1)t}>0$ per $t>0$, podem aplicar comparació per quocient, per exemple amb $1/t^2$, donat que:
$$\lim_{t\to\infty} t^2 t^\beta \mathrm{e}^{(\alpha+1)t} = \lim_{t\to\infty} t^{2+\beta}\mathrm{e}^{(\alpha+1)t}=0$$
per tot β. Llavors, per $\alpha<-1$:
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \text{ conv. } \Rightarrow \int_1^{+\infty} t^\beta \mathrm{e}^{(\alpha+1)t}\,\mathrm{d}t \text{ conv. } \forall\beta\in\mathbb{R} \Rightarrow I_2 \text{ CONV. } \forall\beta\in\mathbb{R}.$$

D'aquesta manera:
$$I_2 \text{ CONV.} \iff (\alpha,\beta)\in\mathfrak{C}_2 := \{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : \alpha<-1\}\cup\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 : \alpha=-1,\ \beta<-1\}. \tag{19}$$

D'altra banda, per l'apartat *c)* és convenient el canvi: $t=-\ln x$. En efecte,
$$I_3=\int_0^1 x^\alpha|\ln x|^\beta\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^\alpha(-\ln x)^\beta\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{l}\text{c. v. :}\\ t=-\ln x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\\ x\to 0^+\Rightarrow t\to+\infty,\\ x=1\Rightarrow t=0.\end{array}\right\}=$$
$$=\int_0^\infty t^\beta \mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 t^\beta \mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}\,\mathrm{d}t+\int_1^\infty t^\beta \mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}\,\mathrm{d}t=I_{3,1}+I_{3,2}.$$

Primer de tot, és clar que:
$$I_{3,1}:=\int_0^1 t^\beta \mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}\,\mathrm{d}t\sim\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^{-\beta}}$$
d'on es dedueix que $I_{3,1}$ és convergent si i només si $\beta>-1$ (per qualsevol α). D'altra banda, per la integral
$$I_{3,2}:=\int_1^{+\infty} t^\beta \mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}\,\mathrm{d}t$$
es té:

- Per $\alpha=-1$: $I_{3,2}=\int_1^{+\infty} t^\beta$, que és convergent si i només si $\beta<-1$.
- Per $\alpha>-1$, com que $\lim_{t\to+\infty} t^2t^\beta \mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}=\lim_{t\to+\infty} t^{2+\beta}\mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}=0$; de l'aplicació del criteri de comparació per quocient resulta que, si $\alpha>-1$:
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \text{ conv. } \Rightarrow \int_1^{+\infty} t^\beta \mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}\,\mathrm{d}t \text{ conv. (per quasevol } \beta).$$
- Per $\alpha<-1$,$\lim_{t\to+\infty} t^\beta \mathrm{e}^{-(\alpha+1)t}=+\infty$ per qualsevol $\beta\in\mathbb{R}$. Llavors la integral $I_{3,2}$ divergeix per qualsevol β quan $\alpha<-1$.

De tot això, es conclou:
$$I_3 \text{ CONV.} \iff (\alpha,\beta)\in\mathfrak{C}_3, \tag{20}$$
essent:
$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_3&=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\beta>-1\}\cap(\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\alpha=-1,\beta<-1\}\cup\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\alpha>-1\})\\&=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\alpha>-1,\beta>-1\}.\end{aligned}$$

Finalment, la integral I_4 del l'apartat *d)* es pot posar com:
$$I_4=\int_0^1 x^\alpha|\ln x|^\beta\,\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}} x^\alpha(\ln x)^\beta\,\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} x^\alpha(\ln x)^\beta\,\mathrm{d}x=I_1+I_2+I_3$$

d'on es segueix —tenint en compte (17), (19) i (20)— que:

$$I_4 \text{ CONV.} \Longleftrightarrow (\alpha, \beta) \in \mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2 \cap \mathfrak{C}_3$$

però es comprova d'immediat que $\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2 \cap \mathfrak{C}_3 = \emptyset$ (per exemple, en $\mathfrak{C}_2$, $\alpha \leq -1$, mentre que en $\mathfrak{C}_3$, $\alpha > -1$ i per tant els tres conjunts no poden tenir cap element comú). ▹

10. Estudieu, segons els valors de α i β, la convergència de

$$\int_a^b (b-x)^\alpha |\ln(b-x)|^\beta \, \mathrm{d}x, \qquad a < b.$$

◃ **Solució.**Considerem el canvi de variable $t = b - x$. Tenim

$$\int_a^b (b-x)^\alpha |\ln(b-x)|^\beta \, \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = b - x \Longrightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t, \\ x = a \Longrightarrow t = b - a, \\ x = b \Longrightarrow t = 0. \end{array} \right\} = \int_0^{b-a} t^\alpha |\ln t|^\beta \, \mathrm{d}t. \tag{21}$$

A partir d'aquesta última integral, estudiarem per separat els casos en què $0 < b-a < 1$, $0 < b-a = 1$ i $b - a > 1$. Així:

I) Suposarem que $0 < b - a < 1$. Llavors:

$$\begin{aligned} \int_0^{b-a} t^\alpha |\ln t|^\beta \, \mathrm{d}t &= \int_0^{b-a} t^\alpha (-\ln t)^\beta \, \mathrm{d}t \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ u = -\ln t (\Longleftrightarrow t = \mathrm{e}^{-u}) \Longrightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}u, \\ 0 < t = b - a < 1 \Longrightarrow u = -\ln(b-a) > 0, \\ t \to 0^+ \Longrightarrow u \to +\infty. \end{array} \right\} = \int_{-\ln(b-a)}^{+\infty} u^\beta \mathrm{e}^{-(1+\alpha)u} \, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

i és immediat comprovar que:

$$\int_{-\ln(b-a)}^{+\infty} u^\beta \mathrm{e}^{-(1+\alpha)u} \, \mathrm{d}u \text{ CONV.} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \alpha > -1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \\ \text{or} \\ \alpha = -1, \beta < -1 \end{array} \right\}.$$

En efecte, definim $\sigma = -\ln(b-a)$ (> 0, quan $0 < b - a < 1$). Per $\alpha > -1$ és $1 + \alpha > 0$. D'altra banda, la funció subintegral, $u^\beta \mathrm{e}^{-(1+\alpha)u} > 0$, per $u > 0$ i a més

$$\lim_{u \to +\infty} u^2 u^\beta \mathrm{e}^{-(1+\alpha)u} = \lim_{u \to +\infty} u^{2+\beta} \mathrm{e}^{-(1+\alpha)u} = 0,$$

per tot $\beta \in \mathbb{R}^2$.

II) Quan $0 < b - a = 1$ la integral (21) queda:

$$\int_0^{b-a} t^\alpha |\ln t|^\beta \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^\alpha |\ln t|^\beta \, \mathrm{d}t \text{ CONV.} \Longleftrightarrow \alpha > -1 \text{ i } \beta > -1$$

(vegeu el problema 9, apartat *(c)*).