

Integrals Pròpies.

Integració Elemental sobre Intervalls Compactes

Problemes

1. Calculeu

$$(a) \int_0^1 x^2 e^x dx,$$

$$(b) \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$(c) \int_0^{2\pi} \sin^3 x dx.$$

◁ **Solució.**

a) Fem la primera integrant per parts dos cops:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^x dx &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x, \\ g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x. \end{array} \right\} = [2xe^x]_{x=0}^{x=1} - 2 \int_0^1 xe^x dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1, \\ g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x. \end{array} \right\} = [x^2 e^x]_{x=0}^{x=1} - 2 [xe^x]_{x=0}^{x=1} + 2 \int_0^1 e^x dx \\ &= e^1 - 0 - 2e^1 + 0 + 2e^1 - 2 = \boxed{e - 2} \end{aligned}$$

b) $F(x) = \arcsin x$ és una primitiva de la funció subintegral $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a l'interval $(-1, 1)$ i $[0, 1/2] \subset (-1, 1)$. Per tant, podem directament aplicar Barrow:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{x=0}^{x=1/2} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

c) Posant: $f(x) = \sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$, podem fàcilment trobar una primitiva i de nou aplicar Barrow

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x dx = \int_0^{2\pi} \sin x(1 - \cos^2 x) dx = [-\cos x]_{x=0}^{x=2\pi} + \left[\frac{\cos^3 x}{3} \right]_{x=0}^{x=2\pi} = -1 + 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{0}$$

REMARCA 1. Aplicant els resultats del problemes 3 i 5, es pot veure directament que:

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x dx = 0.$$

2. Verifiqueu si $F(x) = -x\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$ és una primitiva de $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)x^2}}$. Calculeu la integral

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)x^2}}$$

◁ **Solució.** F està definida a l'interval $(-1, 1)$ i, de fet, la podem expressar com:

$$F(x) = -\frac{x}{|x|} \sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{per } -1 < x < 0, \\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{per } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Veiem doncs que és contínua i derivable a $(-1, 0) \cup (0, 1)$, mentre que té una discontinuïtat de salt a l'origen, on: $F(0^\pm) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} F(x) = \mp 1$. La seva derivada val

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{per } -1 < x < 0, \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{per } 0 < x < 1. \end{cases}$$

o, equivalentment

$$F'(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)x^2}} = f(x) \quad \forall x \in (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

Per tant F no és una primitiva de la funció donada, f , a tot l'interval $(-1, 1)$ sinó només a $(-1, 0) \cup (0, 1)$. Per calcular la seva integral a $[-1/2, 1/2]$ caldrà doncs separar-la en dos “trossos” i aplicar la Regla de Barrow a cada subinterval, i. e.:

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)x^2}} &= \int_{-1/2}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)x^2}} + \int_0^{1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)x^2}} = F(0^-) - F(-1/2) + F(1/2) - F(0^+) \\ &= 1 - \sqrt{1 - (-1/2)^2} + \left(-\sqrt{1 - (1/2)^2} \right) - (-1) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{2 - \sqrt{3}}. \triangleright \end{aligned}$$

REMARCA 2. Fixem-nos que l'aplicació de la regla de Barrow “directament” sobre tot l'interval produïria:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)x^2}} = F(1/2) - F(-1/2) = -\sqrt{1 - (1/2)^2} - \sqrt{1 - (-1/2)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} (< 0),$$

resultat que, clarament, és incorrecte.

3. Sigui $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $a > 0$, contínua. Proveu que

- a) Si f és parell $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.
 b) f és senar $\int_{-a}^a f = 0$.

◁ **Solució.** Només cal tenir en compte que

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

i, a la primera integral, fer el canvi de variable $x = \varphi(t)$, $\varphi : [0, a] \rightarrow [-a, 0]$ amb $\varphi(t) = -t$. Llavors:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(0)} f(x) dx = \int_a^0 f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt.$$

Aleshores:

a) Si f és parell, $f(-t) = f(t)$, i

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

b) En canvi, si f és senar, $f(-t) = -f(t)$, i

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(t) dt - \int_0^a f(x) dx = 0. \triangleright$$

REMARCA 3. Notem que, a la integral definida, la variable respecte de la qual integrem es pot canviar sense afectar el valor de la integral, i. e.:

$$\int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f,$$

clàssicament es diu que les variables d'integració són variables *mudes* (*dumb variables*).

4. Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua i periòdica de període T . Proveu que

a) $\int_a^{a+T} f$ no depèn de a .

b) Si f és senar $F(x) = \int_a^x f$ és periòdica de període T .

◁ **Solució.** (a) Definim la funció:

$$a \in \mathbb{R} \mapsto G(a) := \int_a^{a+T} f \in \mathbb{R}.$$

Com que f és contínua en \mathbb{R} i $\Psi(a) := a + T$, $\varphi(a) = a$ són derivables en \mathbb{R} , la regla de Leibnitz ens assegura que F és derivable en \mathbb{R} i $G'(a) = f(a+T) - f(a) = 0$ per tot $a \in \mathbb{R}$, ja que f és T -periòdica. Llavors, com que $G' = 0$ en \mathbb{R} , G és constant en \mathbb{R} i així la integral no depèn de a .

(b) Ara suposem que a més, f és senar. Definim, $F(x) := \int_a^x f$. Per veure que F és periòdica, calculem

$$\begin{aligned} F(x+T) - F(x) &= \int_a^{x+T} f - \int_a^x f = \int_a^x f + \int_x^{x+T} f - \int_a^x f = \int_x^{x+T} f \\ &\stackrel{x=-T/2}{=} \int_{-T/2}^{-T/2+T} f = \int_{-T/2}^{T/2} f = 0, \end{aligned}$$

per tot $x \in \mathbb{R}$, d'on $F(x+T) = F(x)$ per tot $x \in \mathbb{R}$ i d'aquí resulta la periodicitat de F . ▷

REMARCA 4. Notem que s'ha fet servir el resultat de l'apartat anterior. Així, com que la integral no depèn de x , podem prendre $x = -T/2$ per calcular el seu valor i aleshores,

$$\int_x^{x+T} f = \int_{-T/2}^{T/2} f.$$

A continuació, es fa servir que f és senar i s'aplica el resultat del problema 3, apartat (b).

5. Proveu que si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua,

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$$

(Ajut: per a la primera igualtat feu el canvi de variable $x = \pi - t$).

Apliqueu-ho a la integral

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

◁ **Solució.** Aplicarem el canvi de variable que ens suggereix l'enunciat:

$$\begin{aligned} I = \int_0^\pi x f(\sin x) dx &= \left. \begin{array}{l} \text{c. v. :} \\ x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt, \\ x = \pi \Rightarrow t = 0, \\ x = 0 \Rightarrow t = \pi. \end{array} \right\} = - \int_\pi^0 (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t) dt = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi t f(\sin t) dt. \end{aligned}$$

D'aquí $2I = \pi \int_0^\pi f(\sin x) dx$ i llavors:

$$I = \int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

Això prova la primera part de la igualtat. A continuació, descomposem:

$$\int_0^\pi f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx + \int_{\pi/2}^\pi f(\sin x) dx$$

i a la segona li apliquem el mateix canvi de variable:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^\pi f(\sin x) dx &= \left. \begin{array}{l} \text{c. v. :} \\ x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt, \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \\ x = \pi \Rightarrow t = 0. \end{array} \right\} = - \int_{\pi/2}^0 f(\sin t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx. \end{aligned}$$

I d'aquí s'arriba al resultat desitjat. Aplicació; observem primer que:

$$\frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} = \frac{x \sin x}{1 + 1 - \sin^2 x} = \frac{x \sin x}{2 - \sin^2 x} = x f(\sin x),$$

amb $f(t) = \frac{t}{2 - t^2}$. Resulta llavors:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = [-\pi \arctan(\cos x)]_0^{\pi/2} \\ &= \pi \arctan 1 = \frac{\pi^2}{4}. \triangleright \end{aligned}$$

6. Calculeu $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3 \sin x}$.

◁ **Solució.** Aplicant primer el resultat del problema 7.6, apartat (b) amb $a = -\pi$ es té:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 3 \sin x} = \int_{-\pi}^\pi \frac{dx}{5 - 3 \sin x}$$

i a continuació, fer el canvi de variable:

$$x = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Però llavors quadaria:

$$\int_{-\pi}^\pi \frac{dx}{5 - 3 \sin x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5 - \frac{6t}{1+t^2}} dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{2dt}{5t^2 - 6t + 5},$$

ja que $\tan \frac{x}{2} \rightarrow \pm\infty$ quan $x \rightarrow \pm\pi^\mp$ (vegeu figura 1, esquerra). Arribem doncs a una integral sobre un interval no acotat. Aquestes integrals *impròpies* les estudiarem al tema 8. De moment, per evitar

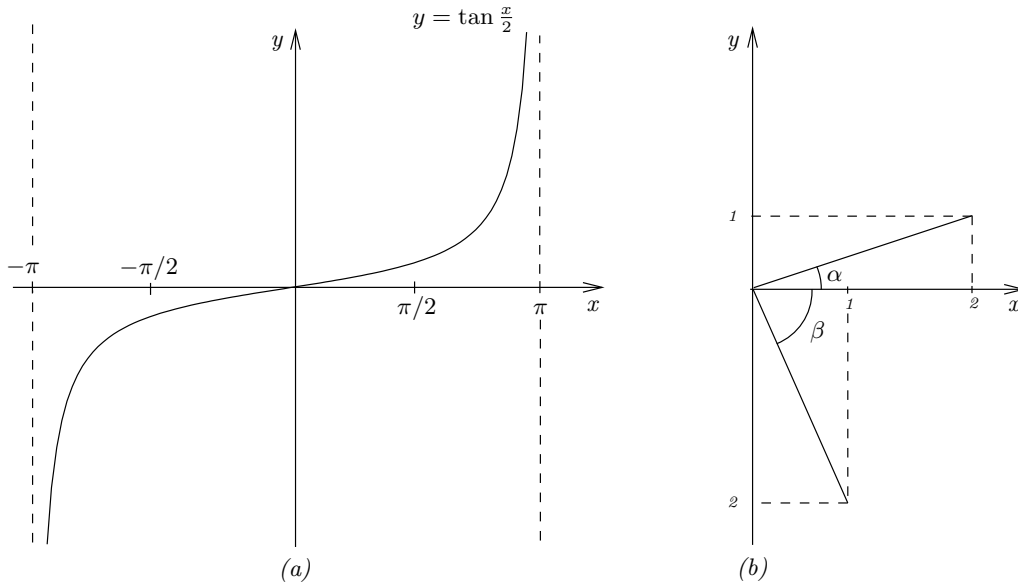


Figura 1. (a) gràfica de la funció $y = \tan \frac{x}{2}$ es té que $\tan \frac{x}{2} \rightarrow \infty$ quan $x \rightarrow \pi^-$ i $\tan \frac{x}{2} \rightarrow -\infty$ quan $x \rightarrow -\pi^-$. (b) $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$, $\beta = \arctan(-2)$ i per tant $\arctan \frac{1}{2} - \arctan(-2) = \arctan \alpha - \arctan \beta = \frac{\pi}{2}$.

això, farem ús dels resultats del problema 7.7 (la segona part de la igualtat) de la manera següent. Posem:

$$I_1 + I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5 - 3 \sin x},$$

amb

$$I_1 = \int_{-\pi}^0 \frac{dx}{5 - 3 \sin x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ x = -t \Rightarrow dx = -dt \\ x = -\pi \Rightarrow t = \pi \\ x = 0 \Rightarrow t = 0. \end{array} \right\} = \int_0^{\pi} \frac{dt}{5 + 3 \sin t}$$

$$\stackrel{\text{prob.5}}{=} 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{5 + 3 \sin t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = -x \Rightarrow dt = -dx \\ t = \pi/2 \Rightarrow x = -\pi/2 \\ t = 0 \Rightarrow x = 0. \end{array} \right\} = \int_{-\pi/2}^0 \frac{dx}{5 - 3 \sin x},$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{5 + 3 \sin x} \stackrel{\text{prob.5}}{=} 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 - 3 \sin x}.$$

Ara, finalment:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5 - 3 \sin x} = I_1 + I_2 = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{5 - 3 \sin x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.:} \\ t = \tan \frac{x}{2}, \dots \\ x = \pi/2 \Rightarrow t = 1, \\ x = -\pi/2 \Rightarrow t = -1. \end{array} \right\}$$

$$= 2 \int_{-1}^1 \frac{dt}{5t^2 - 6t + 5} = \int_{-1}^1 \frac{\frac{5}{4} dt}{1 + \left(\frac{5t+3}{4}\right)^2}$$

$$= \left[\arctan \left(\frac{5t+3}{4} \right) \right]_{-1}^1 = \arctan \frac{1}{2} - \arctan(-2) = \frac{\pi}{2}.$$

(veure figura 1, dreta).▷

7. Sigui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Proveu que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

◁ **Solució.** Només cal considerar el canvi de variable $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ amb $x = \varphi(t) := a + b - t$. Llavors:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x) dx = \int_b^a f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = - \int_b^a f(a+b-t) dt = \int_a^b f(a+b-t) dt. \triangleright$$

8. Proveu que $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}$.

◁ **Solució.** Considerarem el canvi $\varphi : [0, \pi/2] \rightarrow [0, \pi/2]$ donat per $\varphi(t) = \pi/2 - t$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v. (a la 2ª integral):} \\ x = \pi/2 - t \Rightarrow dx = -dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = \pi/2, \\ x = \pi/2 \Rightarrow t = 0. \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \\ &\quad - \int_{\pi/2}^0 \frac{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}}{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2} - t)} + \sqrt{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\sin t} + \sqrt{\cos t}} dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{4}. \triangleright \end{aligned}$$

9. Proveu la identitat $\int_{1/e}^{\tan x} \frac{t}{1+t^2} dt + \int_{1/e}^{\cot x} \frac{1}{t(1+t^2)} dt, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

◁ **Solució.** Definim d'una banda:

$$H(x) := \int_{1/e}^{\tan x} \frac{t}{1+t^2} dt + \int_{1/e}^{\cot x} \frac{1}{t(1+t^2)} dt, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

i de l'altra:

$$F(x) := \int_{1/e}^x \frac{t}{1+t^2} dt, \quad G(x) := \int_{1/e}^x \frac{dt}{t(1+t^2)}.$$

Clarament $H(x) = F(\tan x) + G(\cot x)$. Pel teorema fonamental del càlcul F i G són C^1 en qualsevol interval compacte contingut en $(0, +\infty)$, i per tant en $(0, \pi/2)$; mentre que $\tan x$ i $\cot x$ prenen valors en $(0, +\infty)$ quan $x \in (0, \pi/2)$, on a més són derivables.

En conclusió, F, G (i aleshores H) són C^1 en $(0, \pi/2)$. Així, aplicant primer la regla de la cadena i després el teorema fonamental del càlcul s'obté:

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(\tan x)D(\tan x) + G'(\cot x)D(\cot x) \\ &= \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}(1 + \tan^2 x) - \frac{1}{\cot x(1 + \cot^2 x)}(1 + \cot^2 x) = \tan x - \frac{1}{\cot x} = 0, \end{aligned}$$

per tot $0 < x < \pi/2$, la qual cosa implica que $H(x)$ és constant a l'interval $(0, \pi/2)$. Aleshores:

$$\begin{aligned} H(x) = H\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \int_{1/e}^1 \frac{t \, dt}{1+t^2} + \int_{1/e}^1 \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int_{1/e}^1 \frac{t^2+1}{t(1+t^2)} \, dt \\ &= [\ln|t|]_{t=1/e}^{t=1} = \ln 1 - \ln \frac{1}{e} = \ln e = 1, \end{aligned}$$

per tot $0 < x < \frac{\pi}{2}$. ▷

10. Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua. Proveu que si $\int_a^b f \cdot g = 0$ per tota $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, llavors $f = 0$.

◁ **Solució.** Suposem que fos fals, llavors existiria $\xi \in [a, b]$ amb $f(\xi) \neq 0$. D'altra banda, com que $\int_a^b fg = 0$, en particular també: $\int_a^b f^2 = 0$, però f és contínua a l'interval $[a, b]$ i $f(\xi) \neq 0$ amb $\xi \in [a, b]$. D'aquí, aplicant la definició de continuïtat a f^2 al punt $x = \xi$ es segueix que hi ha un $\delta > 0$ t. q.:

$$f^2(x) \geq \frac{2}{2} f^2(\xi) > 0,$$

amb $a \leq \xi \leq b$. Ara:

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(x) \, dx &= \int_a^{\xi-\delta} f^2(x) \, dx + \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f^2(x) \, dx + \int_{\xi+\delta}^b f^2(x) \, dx \\ &\geq \frac{1}{2} f^2(\xi) \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} 1 \, dx = \delta f^2(\xi) > 0, \end{aligned}$$

(contradicció). ▷

11. Trobeu l'àrea limitada per la corba $y^2 = x^2 - x^4$.

◁ **Solució.** L'àrea vindrà donada per $A = 4 \int_0^1 |x| \sqrt{1-x^2} \, dx$, i calculant la integral s'obté:

$$I = \int_0^1 |x| \sqrt{1-x^2} \, dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x(1-x^2)^{1/2} \, dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \implies \boxed{A = 4I = \frac{4}{3}}$$

Veure figura 2 ▷

12. Sigui $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donada per $F(x) = \int_{227}^x \frac{dt}{1+t^6}$. Calculeu F' .

◁ **Solució.** Notem que la funció subintegral

$$f(t) = \frac{1}{1+t^6},$$

és contínua en tot \mathbb{R} , ja que $1+t^6 \neq 0$, per tot $t \in \mathbb{R}$ (en particular, és C^∞). Així, aplicant el teorema fonamental del càlcul tindrem que $F'(x) = \frac{1}{1+x^6} = f(x)$, per tot $x \in \mathbb{R}$. ▷

13. Proveu que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$F(x) = \int_0^x \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2} \, dt$$

és de classe C^∞ en \mathbb{R} .

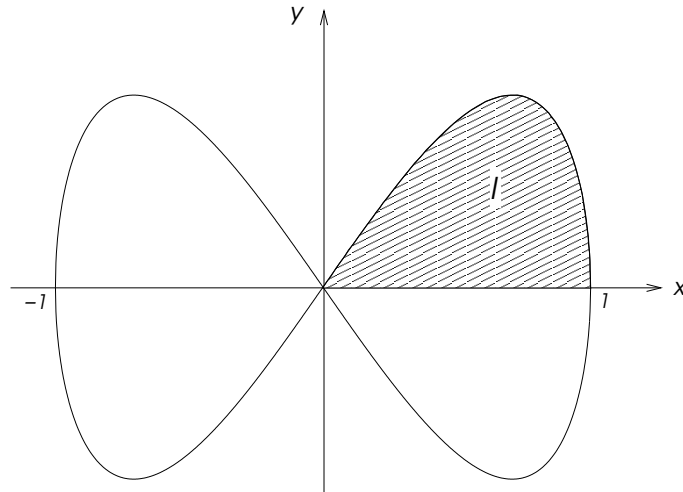


Figura 2. corba $y^2 = x^2 - x^4$. L'àrea sombrejada és la integral $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$.

◁ **Solució.** Notem que $f(t) = \frac{1-t+t^2}{1+t+t^2}$ és C^∞ en \mathbb{R} , ja que és un quocient de polinomis on el denominador no s'anul·la per cap valor de $t \in \mathbb{R}$ (és $t^2 + t + 1 > 0$, per tot $t \in \mathbb{R}$). Com que, pel teorema fonamental del càlcul és $F' = f \in C^\infty(\mathbb{R})$, es segueix d'immediat que $F \in C^\infty(\mathbb{R})$. ▷

14. Siguin $f, g \in C[a, b]$. Proveu que $\exists \xi \in (a, b)$ t. q.: $f(\xi) \int_a^b g - g(\xi) \int_a^b f = 0$.

◁ **Solució.** Sigui $h(x) = f(x) \int_a^b g - g(x) \int_a^b f$, obviament $h \in C[a, b]$ i sigui:

$$H(x) = \int_a^x f(t) dt \int_a^b g(s) ds - \int_a^x g(t) dt \int_a^b f(s) ds,$$

la seva funció integral. A continuació, considerem el lema de Rolle:

LEMMA 1.1 (Lema de Rolle). *Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, derivable en (a, b) i tal que $f(a) = f(b)$. Aleshores existeix $\xi \in (a, b)$ on la derivada s'anul·la, i. e., per al qual $f'(\xi) = 0$.*

D'una banda, pel teorema fonamental del càlcul és: $H \in C^1[a, b]$ i $H' = h$ i per l'altra, es comprova d'immediat que $H(a) = H(b) (= 0)$. Queda clar doncs que H satisfà les hipòtesis del lema 1.1 i per tant, hi haurà un punt, $\xi \in (a, b)$, pel qual $H'(\xi) = 0$. D'aquí, finalment es dedueix:

$$H'(\xi) = h(\xi) = f(\xi) \int_a^b g - g(\xi) \int_a^b f = 0 \implies f(\xi) \int_a^b g = g(\xi) \int_a^b f,$$

que és el resultat buscat. ▷

15. Essent $f(x) = \int_{x^2}^{e^x} \frac{\ln t}{t} dt$, calculeu la derivada $f'(3)$.

◁ **Solució.** Com que $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ és contínua per tot $x^2 \leq t \leq e^x$, amb $x \geq \delta$ per $\delta > 0$ qualsevol i $\phi(x) = x^2$, $\psi(x) = e^x$ són derivables en \mathbb{R} ; podem aplicar la regla de Leibnitz:

$$f'(x) = e^x \frac{\ln e^x}{e^x} - 2x \frac{\ln x^2}{x^2} = x - \frac{4 \ln |x|}{x}$$

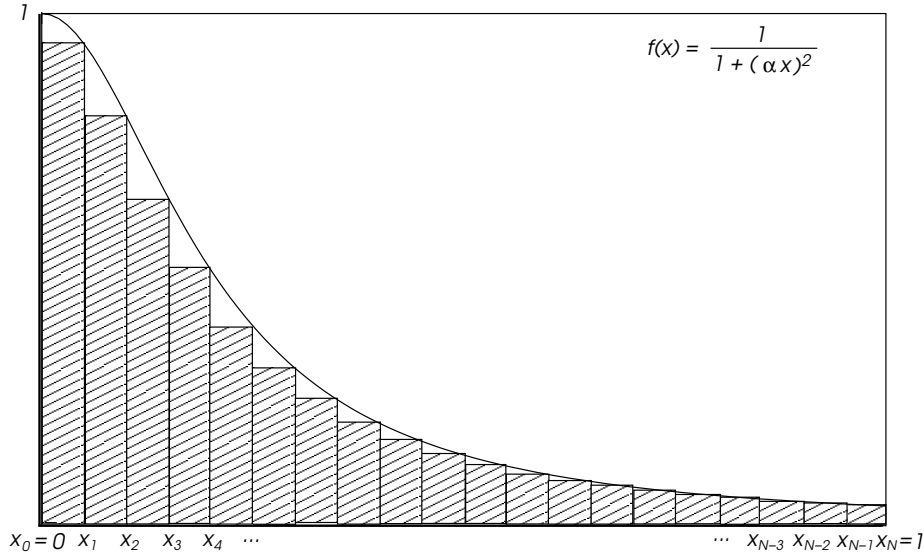


Figura 3. Aproximació de la integral $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+\alpha^2 x^2}$ per rectangles. La proposició 1.2 estableix que —quan la funció subintegral és contínua a l’interval—, l’aproximació convergeix cap a la integral en fer tendir el nombre de rectangles (i. e., de subintervalls), $N \rightarrow \infty$.

per $x \geq \delta$ amb $\delta > 0$ qualsevol. D’on, per $x = 3$, s’obté:

$$f'(3) = 3 - \frac{4 \ln 3}{3} \approx 1.535 \dots \triangleright$$

16. Calculeu el límit de la successió

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + \dots + \frac{1}{2p}.$$

◁ **Solució.** Recordem la proposició següent:

PROPOSICIÓ 1.2. *que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua, donat $\varepsilon > 0$ qualsevol, existeix $\delta > 0$ tal que, per tota partició de l’interval: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_p = b$, tal que $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i < \delta$, per tot $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ i per $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ qualssevol, amb $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$; es satisfà:*

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx - \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) \, \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

La qual cosa implica que:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p-1} f(t_i) \, \Delta x_i. \tag{1}$$

Aplicant això a la successió de l’enunciat:

$$\lim_p \left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + \dots + \frac{1}{2p} \right) = \lim_p \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{i+1}{p}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)|_0^1 = \ln 2,$$

on s’ha agafat $\Delta x_i = \frac{1}{p}$, per tot $i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$ i $t_i = \frac{i+1}{p}$, per a cada $i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$. \triangleright

17. Calculeu el límit de la successió

$$p \left(\frac{1}{p^2 + \alpha^2} + \frac{1}{p^2 + 4\alpha^2} + \frac{1}{p^2 + 9\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{p^2 + (p-1)^2\alpha^2} + \frac{1}{p^2 + p^2\alpha^2} \right).$$

◁ **Solució.** Aplicarem la fórmula (1) de la proposició 1.2 esmentada al problema 16:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} p \sum_{j=1}^p \frac{1}{p^2 + j^2\alpha^2} &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\frac{1}{p}}{1 + \alpha^2 \left(\frac{i+1}{p}\right)^2} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Agafant:} \\ \Delta x_i = 1/p, \quad \text{per tot } i = 1, 2, \dots, p-1, \\ t_i = (i+1)/p, \quad \text{per a cada } i = 1, 2, \dots, p-1. \end{array} \right\} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1 + \alpha^2 x^2} = \left[\frac{\arctan(\alpha x)}{\alpha} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \boxed{\frac{\arctan \alpha}{\alpha}} \end{aligned}$$

On es suposa $\alpha \neq 0$ (sinò el problema és trivial: comproveu-ho!). La figura 3 il·lustra l'aplicació de la proposició 1.2. ▷