

Sèries de Fourier

Problemes

1. (a) Trobeu la sèrie de Fourier de la funció $f(x) = x + \pi$ a l'interval $-\pi < x < \pi$.
 (b) Useu (a) per demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

◁ **Solució.** (a) Calculem primer els coeficients del desenvolupament.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} x dx + \pi \int_{-\pi}^{\pi} dx \right) = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \cos nx dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{n} d(-\cos nx) = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = -\frac{2}{n}(-1)^n,$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$ on s'ha tingut en compte que x i $x \cos nx$ són funcions senars i per tant,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0.$$

El desenvolupament de Fourier de la funció $f(x)$ resulta doncs:

$$\mathcal{F}[f](x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx,$$

i pel que fa a la convergència, aplicant el teorema de Dirichlet tenim d'una banda:

$$\mathcal{F}[f](x) = x + \pi, \tag{1}$$

per tot $-\pi < x < \pi$, mentre que de l'altra:

$$\mathcal{F}[f](\pi) = \mathcal{F}[f](-\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi^+) + f(\pi^-)) = \frac{1}{2}(0 + 2\pi) = \pi.$$

(b) $x = -\pi/2$ és un punt de continuïtat de la funció $f(x) = x + \pi$ a l'interval $-\pi < x < \pi$. Aleshores, segons (1) és $\mathcal{F}[f](-\pi/2) = -\pi/2 + \pi = \pi/2$. Per tant, substituïnt a (1):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f]\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = \pi + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2p+1}}{2p-1} \sin \frac{(2p-1)\pi}{2} \\ &= \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p-1} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

on a la segona igualtat hem fet servir que $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$, si n és parell i quan n és senar, posem: $n = 2p - 1$ per $p = 1, 2, 3, \dots$ d'on, clarament, $\sin \frac{(2p-1)\pi}{2} = (-1)^{p+1}$. A partir d'això, es dedueix d'immediat:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

que és el que es volia provar. \triangleright

2. (a) Trobeu la sèrie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } -\pi < x < 0, \\ x^2, & \text{per } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

(b) Useu (a) per demostrar que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots, \quad \text{i que} \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

(c) Useu (b) per trobar una sèrie numèrica tal que la seva suma sigui $\frac{\pi^2}{8}$.

\triangleleft **Solució.** (a) Com al problema anterior comencem calculant els coeficients de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx \stackrel{\text{parts}}{=} \frac{1}{\pi} \underbrace{\left[\frac{x^2}{n} \sin nx \right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &\stackrel{\text{parts}}{=} \left[\frac{2x}{n^2\pi} \cos nx \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos nx dx}_{=0} = \frac{2}{n^2} (-1)^n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx \\ &\stackrel{\text{parts}}{=} \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x^2}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} + \frac{2}{n^2\pi} \int_0^{\pi} x d(\sin nx) \\ &\stackrel{\text{parts}}{=} \frac{\pi}{n} (-1)^{n+1} + \underbrace{\left[\frac{2x}{n^2\pi} \sin nx \right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n^3\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n^2\pi} [\cos nx]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} -\frac{\pi}{n}, & n = 2 \text{ (i. e., si } n \text{ parell)}, \\ \frac{\pi}{n} - \frac{4}{n^3\pi}, & n \neq 2 \text{ (i. e., si } n \text{ senar)}, \end{cases} \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$

REMARCA 1.1 (notació). A la literatura, sovint apareix: $p = \dot{m}$ per denotar “ p és múltiple de m ”. Llavors per establir que $n \in \mathbb{N}$ és parell (és múltiple de 2) o senar (no és múltiple de 2) posarem $n = 2$ ó $n \neq 2$ respectivament.

Un cop calculat els coeficients, la sèrie de Fourier es pot escriure de la manera següent,

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} (-1)^n \cos nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2n} \sin 2nx + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2n+1} - \frac{4}{(2n+1)^3\pi} \right) \sin(2n+1)x$$

i pel teorema de Dirichlet es té:

$$\mathcal{F}[f](x) = f(x), \quad -\pi < x < \pi; \quad (2)$$

$$\mathcal{F}[f](\pi) = \mathcal{F}[f](-\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi^+) + f(+\pi^-)) = \frac{1}{2}(0 + \pi^2) = \frac{\pi^2}{2}. \quad (3)$$

(b) $x = 0$ és un punt de continuïtat de la funció. Llavors, d'acord amb (2) és $\mathcal{F}[f](0) = 0$. Sabent això, substituïm $x = 0$ a la sèrie de Fourier trobada a l'apartat (a), amb la qual cosa:

$$\mathcal{F}[f](0) = \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0 \implies \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \quad (4)$$

De la mateixa manera, per $x = \pi$, substituïm com abans a la sèrie i ara tenim en compte (3). Amb això s'obté:

$$\mathcal{F}[f](\pi) = \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{2} \implies \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \quad (5)$$

(c) Sumant (4) i (5):

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

d'on finalment:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \triangleright$$

3. (a) Trobeu la sèrie de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

a l'interval $-\pi < x < \pi$.

(b) On convergeix la sèrie trobada en (a) quan $x = \frac{7\pi}{2}$? I quan $x = 401\pi$?

◁ **Solució.** (a) Calculem els coeficients de la sèrie,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \underbrace{\left[\frac{x}{n} \sin nx \right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \left[\frac{\cos nx}{n^2\pi} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2 \\ -\frac{2}{n^2\pi}, & n \neq 2 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos nx \, dx}_{=0} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Amb aquests coeficients es té la sèrie de Fourier:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad (6)$$

mentre que pel teorema de Dirichlet,

$$\mathcal{F}[f](x) = f(x), \quad -\pi < x < \pi; \quad \mathcal{F}[f](\pm\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi^+) + f(\pi^-)) = \frac{1}{2}(0 + \pi) = \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

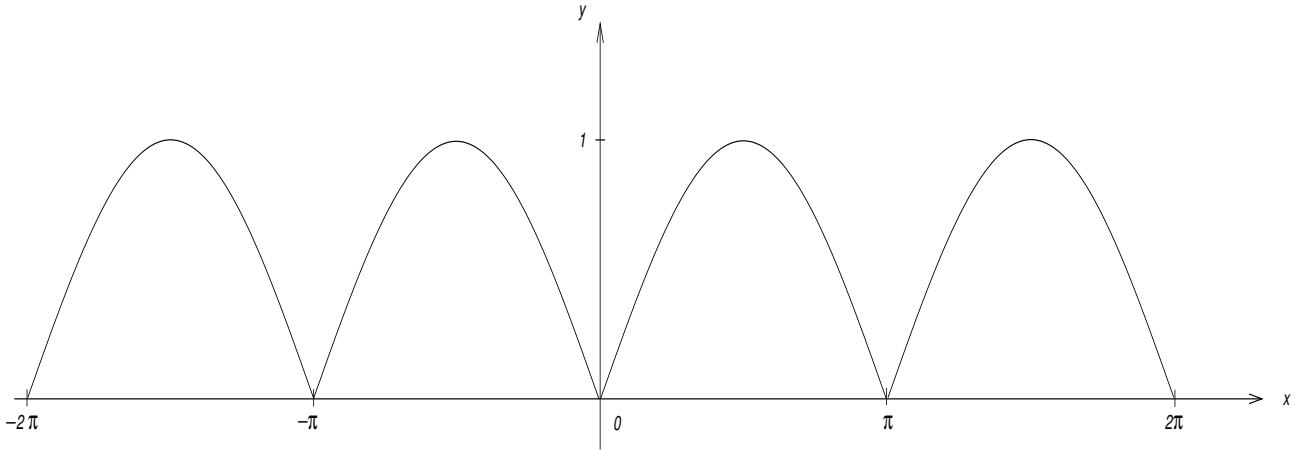


Figura 1. Representació gràfica de la funció $f(x) = |\sin x|$ (problema 4).

(c) La sèrie de Fourier, $\mathcal{F}[f](x)$ donada per (6) és 2π -periòdica i tenint en compte (7):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f](401\pi) &= \mathcal{F}[f](200 \times (2\pi) + \pi) = \mathcal{F}[f](\pi) = \frac{\pi}{2}, \\ \mathcal{F}[f]\left(\frac{7\pi}{2}\right) &= \mathcal{F}[f]\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{F}[f]\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,\end{aligned}$$

ja que π és un punt de l'extrem de l'interval però en canvi $-\frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi)$ i la funció és contínua a l'interval. \triangleright

4. Trobeu, si es que existeix, una sèrie de Fourier que convergeix cap a $|\sin x|$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

\triangleleft **Solució.** La funció $f(x) = |\sin x|$ és parella (figura 1) i per tant els coeficients dels termes en sinus de la sèrie són tots zero, i. e.: $b_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots$

Aleshores tindrem una sèrie en cosinus amb:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi}, \quad a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin 2x \, dx = 0;$$

i per $\mathbb{N} \ni n > 1$:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x) \, dx = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n+1} (1 + (-1)^n) - \frac{1}{n-1} (1 + (-1)^n) \right] = \frac{-2}{(n^2-1)\pi} (1 + (-1)^n) = \begin{cases} \frac{-4}{(n^2-1)\pi}, & n = 2, \\ 0, & n \neq 2. \end{cases}\end{aligned}$$

REMARCA 1.2. A la segona igualtat hem aplicat la identitat trigonomètrica:

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

La corresponent sèrie de Fourier ve donada doncs per:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$$

i com que $f(x) = |\sin x| \in CT[-\pi, \pi]$ (de fet $f \in C^0(\mathbb{R})$) i $f' \in CT[-\pi, \pi]$, pel teorema de convergència (Dirichlet): $\mathcal{F}[f](x) = |\sin x|$ per $-\pi < x < \pi$ i $\mathcal{F}[f](\pi) = \mathcal{F}[f](-\pi) = \frac{1}{2} (f(-\pi^+) + f(+\pi^-)) =$

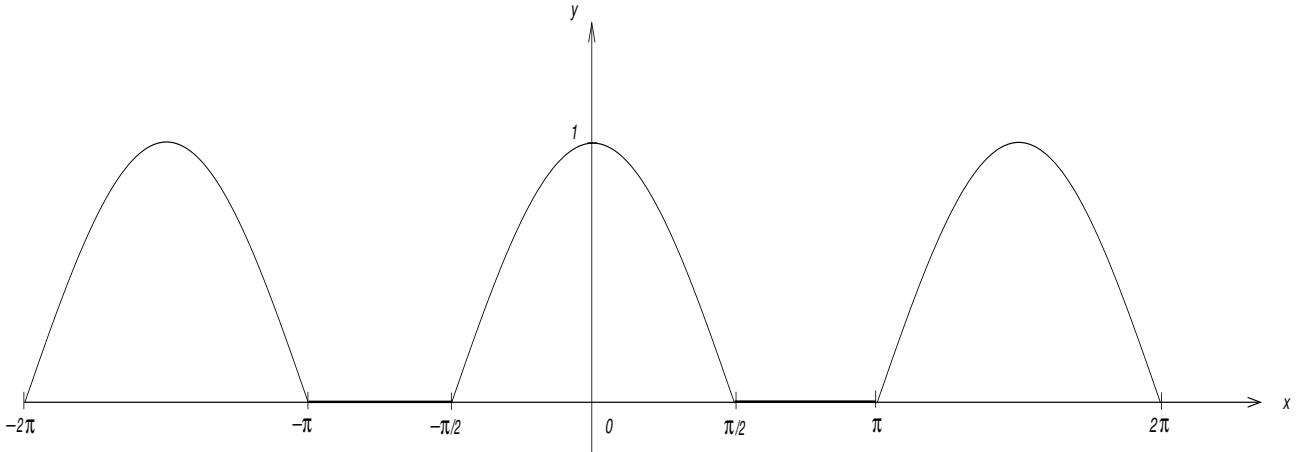


Figura 2. Representació gràfica de l'extensió 2π -periòdica de la funció $f(x)$ definida a l'interval $[-\pi, \pi]$ segons: $f(x) = \cos x$, per $|x| < \frac{\pi}{2}$ i $f(x) = 0$, per $\frac{\pi}{2} < |x| < \pi$ (problema 5).

$\frac{1}{2}(0 + 0) = 0$ als extrems (notem que $f(x) = |\sin x|$ és contínua en \mathbb{R} i $|\sin(\pm\pi)| = 0$). D'altra banda $f(x) = |\sin x|$ és π -periòdica (en particular també 2π -periòdica). Llavors es té:

$$\mathcal{F}[f](x) = |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1},$$

per tot $x \in \mathbb{R}$. \triangleright

5. Trobeu la sèrie de Fourier de la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \\ \cos x, & \text{si } |x| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

\triangleleft **Solució.** Com al problema anterior, la funció $f(x)$ (veure figura 2) és parella, per tant els coeficients dels termes en sinus seran tots zero, i. e.: $b_n = 0$ per $n = 1, 2, 3, \dots$. Així, només ens caldrà calcular el terme independent, a_0 , i els coeficients dels termes en cosinus a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Tanmateix recordem que, debut a la simetria parella, tan sols s'ha d'integrar sobre la meitat de l'interval (multiplicant després per 2, es clar!). Així, d'acord amb les fórmules deduïdes a la teoria:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi}, \\ a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}; \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos nx \, dx \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos(n+1)x + \cos(n-1)x) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n-1)x}{n-1} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{n+1} + \frac{\sin\left(\frac{n}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n+1} - \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n-1} \right] = \begin{cases} 0, & n \neq 2, \\ \frac{2(-1)^{1+n/2}}{\pi(n^2-1)}, & n = 2. \end{cases} \quad \text{per } n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \tag{8}$$

(*) Hem utilitzat la identitat trigonomètrica: $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$, prenent $a = nx$ i $b = x$.

Finalment,

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nx$$

és la sèrie de Fourier buscada. \triangleright

REMARCA 1.3. En calcular els coeficients a (8) s'ha tingut en compte, a més de la simetria parella ja comentada de la funció, el fet que aquesta és idènticament zero a $[\pi/2, \pi]$, és per això que només s'integra a l'interval $[0, \pi/2]$.

6. Sigui $f(x)$ contínua a $(-L, L)$ i siguin a_n i b_n els seus coeficients de Fourier.

(a) Proveu que si $S_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^M \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$, aleshores

$$\int_{-L}^L f(x) S_M(x) dx = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right).$$

(b) Proveu que $\int_{-L}^L S_M^2(x) dx = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right)$.

(c) Proveu que $2 \int_{-L}^L f(x) S_M(x) dx - \int_{-L}^L S_M^2(x) dx \leq \int_{-L}^L (f(x))^2 dx$.

(d) Fent servir els apartats anteriors proveu la anomenada “desigualtat de Bessel”:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x))^2 dx.$$

\triangleleft **Solució.** Considerem el producte:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-L}^L f(x)g(x) dx \quad \text{amb} \quad f, g \in CT[-L, L]. \quad (9)$$

Aquest és un producte escalar (amb les propietats habituals: simetria, bilinearitat,...)¹. Agafem:

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(x) &= \frac{1}{2}, & \psi_{2n-1}(x) &= \sin \frac{n\pi x}{L}, & \psi_{2n}(x) &= \cos \frac{n\pi x}{L}, \\ c_0 = a_0 &= \frac{\langle \psi_0, f \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle}, & c_{2n-1} = b_n &= \frac{\langle \psi_{2n-1}, f \rangle}{\langle \psi_{2n-1}, \psi_{2n-1} \rangle}, & c_{2n} = a_n &= \frac{\langle \psi_{2n}, f \rangle}{\langle \psi_{2n}, \psi_{2n} \rangle}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

per $n = 1, 2, 3, \dots, M$. A més, sabem de la teoria que $\{\psi_i\}_{i=0,1,2,\dots,2M}$ formen una família de $2M + 1$ funcions ortogonals respecte del producte (9). En particular:

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ L/2, & \text{si } n = m = 0, \\ L, & \text{si } m \geq 1. \end{cases} \quad (11)$$

REMARCA 1.4. Sigui $\mathcal{S}(x)$ la sèrie de Fourier de f , i. e., $S(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M(x)$. Llavors, amb la notació (10) pels coeficients i per les funcions, el polinomi trigonomètric, $S_M(x)$, i la sèrie, $S(x)$, es poden escriure de manera més “compacta” com:

$$S_M(x) = \sum_{n=0}^M c_n \psi_n(x), \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x).$$

Això i l'ortogonalitat de la família de funcions (segons (11)), permet —com es veurà d'immediat—, simplificar enormement els càlculs.

¹En canvi però, no és definit positiu: si $f \in CT[-T, T]$, $\langle f, f \rangle = 0 \nRightarrow f \equiv 0$. De fet es diu que és “gairebé” definit positiu: si $\langle f, f \rangle = 0$ amb $f \in CT[-T, T]$, podem assegurar que f val zero en tots els punts de l'interval $[-T, T]$ llevat, com a màxim, en un nombre finit.

Aleshores:

$$(a) \langle f, S_M \rangle = \int_{-L}^L f(x) S_M(x) dx = \left\langle f, \sum_{n=0}^{2M} c_n \psi_n \right\rangle = \sum_{n=0}^{2M} c_n \langle f, \psi_n \rangle = \sum_{n=0}^{2M} c_n^2 \langle \psi_n, \psi_n \rangle \\ = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right).$$

$$(b) \langle S_M, S_M \rangle = \int_{-L}^L (S_M(x))^2 dx = \langle S_M, S_M \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{2M} c_n \psi_n, \sum_{m=0}^{2M} c_m \psi_m \right\rangle = \\ = \sum_{m,n=0}^{2M} c_n c_m \langle \psi_n, \psi_m \rangle \stackrel{(11)}{=} \sum_{n=0}^{2M} c_n^2 \langle \psi_n, \psi_n \rangle = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right).$$

(c) $0 \leq \langle f - S_M, f - S_M \rangle = \langle f, f \rangle - \langle f, S_M \rangle + \langle S_M, S_M \rangle \Rightarrow 2\langle f, S_M \rangle - \langle S_M, S_M \rangle \leq \langle f, f \rangle$, que és la desigualtat que es volia demostrar.

(d) $\int_{-L}^L (f(x))^2 dx = \langle f, f \rangle \stackrel{(c)}{\geq} \langle f, S_M \rangle - \langle S_M, S_M \rangle \stackrel{(a),(b)}{=} L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right)$; dividint per $L (> 0)$ i prenent límit quan $M \rightarrow \infty$ a totes dues bandes, s'obté:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f(x))^2 dx$$

(desigualtat de Bessel). \triangleright

7. Desenvolpeu la funció

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{per } -1 < x < 0 \\ x - 1, & \text{per } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

en sèrie de sinus o cosinus segons convingui.

\triangleleft **Solució.** Com que f és una funció senar (vegeu figura 3), li correspondrà un desenvolupament en sèrie de sinus del tipus $\mathcal{F}[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, amb els coeficients

$$b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx = 2 \int_0^1 (x - 1) \sin n\pi x dx \\ = -\frac{2}{n\pi} \int_0^1 (x - 1) d(\cos n\pi x) \stackrel{(\text{parts})}{=} -2 \left[(x - 1) \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right]_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x dx = -\frac{2}{n\pi},$$

ja que, obviament:

$$\left[(x - 1) \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{n\pi}, \quad \int_0^1 \cos n\pi x dx = 0.$$

Per tant:

$$\mathcal{F}[f](x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}.$$

Quant a la convergència a l'interval $[-1, 1]$ tenim, pel teorema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](x) &= x + 1, & \text{per } -1 < x < 0, \\ \mathcal{F}[f](x) &= x - 1, & \text{per } 0 < x < 1, \\ \mathcal{F}[f](0) &= \frac{1}{2} (f(0^+) + f(0^-)) = \frac{1}{2} (-1 + 1) = 0, & \text{per } x = 0, \\ \mathcal{F}[f](1) &= \mathcal{F}[f](-1) = \frac{1}{2} (f(-1^+) + f(-1^-)) = \frac{1}{2} (0 + 0) = 0, & \text{per } x = \pm 1. \triangleright \end{aligned}$$

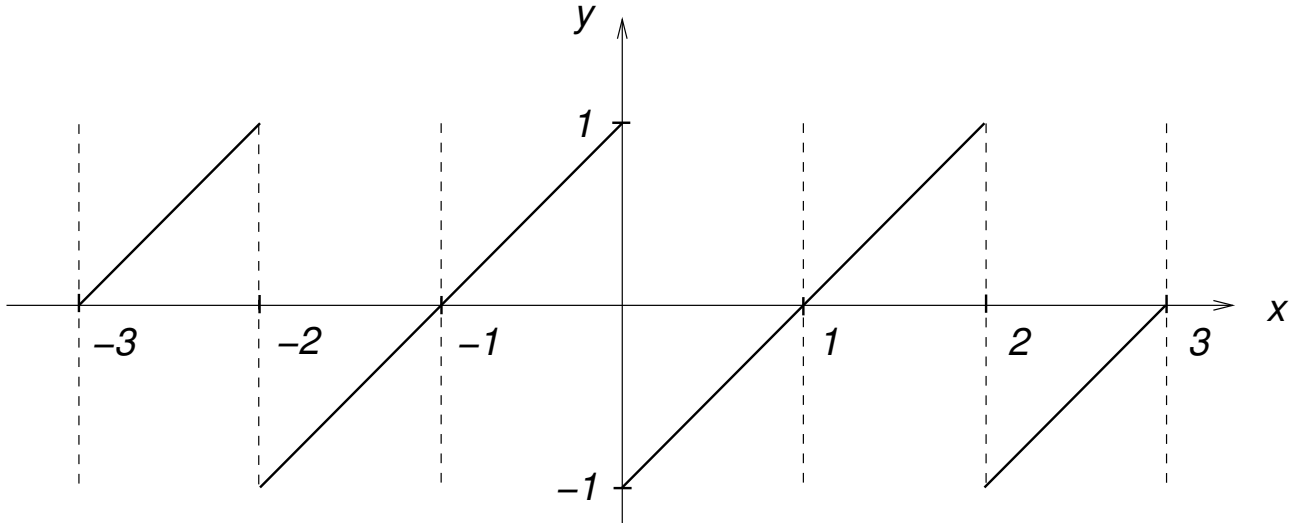


Figura 3. Extensió 2-periòdica de la funció $f(x) = x + 1$, per $-1 < x < 0$ i $f(x) = x - 1$, per $0 \leq x < 1$, donada al problema 7.

8. Desenvolpeu la funció

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < x < 1/2 \\ 1 & \text{per } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

en sèrie de cosinus en mig interval i en sèrie de sinus en mig interval.

◁ **Solució.** Primer trobarem la sèrie de cosinus. Llavors considerarem l'extensió parella, $f_p(x)$, de la funció:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x < 1, \\ f(-x), & -1 < x < 0. \end{cases}$$

i sabent (per la simetria parella) que els coeficients dels termes en sinus de $f_p(x)$ són zero (i. e., $b_n = 0$ per tot $n \in \mathbb{N}$), calcularem els coeficients del terme independent i dels termes en cosinus:

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f_p(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{1/2} 0 \cdot dx + 2 \int_{1/2}^1 1 \cdot dx = 1;$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f_p(x) \cos n\pi x dx = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx = 2 \int_0^{1/2} 0 \cdot \cos n\pi x dx + 2 \int_{1/2}^1 1 \cdot \cos n\pi x dx \\ &= 2 \left[\frac{\sin n\pi x}{n\pi} \right]_{1/2}^1 = -\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} (-1)^{\frac{n+1}{2}}, & n \neq 2, \\ 0, & n = 2, \end{cases} \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$. La sèrie en cosinus de la funció és doncs:

$$\mathcal{F}[f_p](x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n-1)\pi} \cos(2n-1)\pi x.$$

A continuació, per trobar la sèrie en sinus s'ha de construir l'extensió senar de la funció que, de manera genèrica, ve donada per

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x < 1, \\ -f(-x), & -1 < x < 0. \end{cases}$$

En aquest cas sabem —debut a la obvia simetria imparella de $f_s(x)$ —, que són zero els coeficients del terme independent i dels termes en cosinus. Així només s'han de calcular els coeficients dels termes

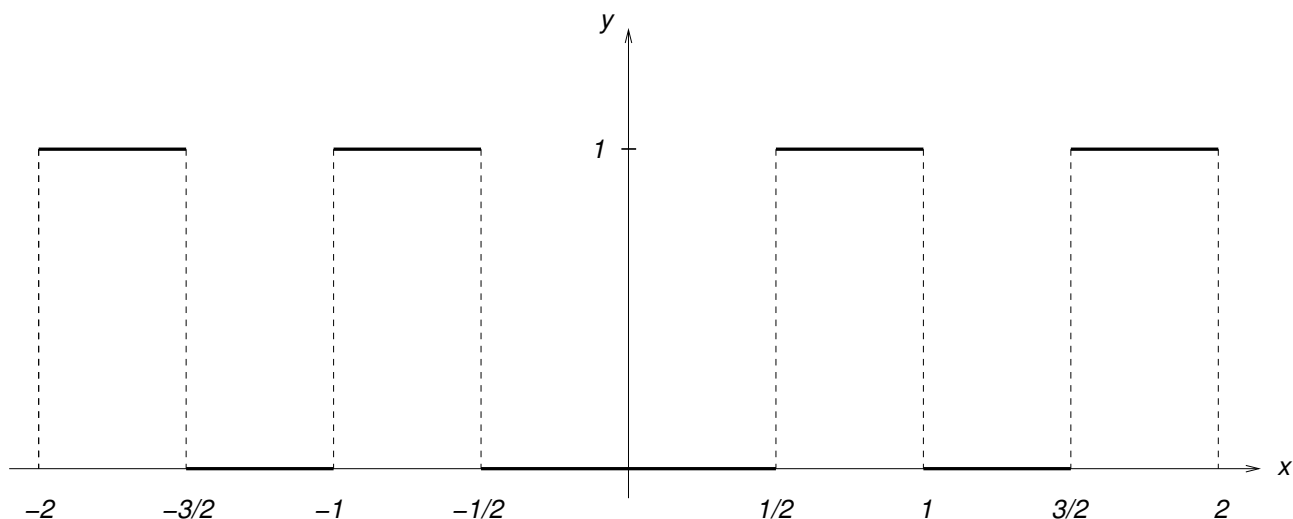


Figura 4. Extensió parella de la funció $f(x) = 0$, per $0 < x < 1/2$ i $f(x) = 1$, per $1/2 \leq x < 1$, donada al problema 8

en sinus. Explícitament:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f_s(x) \sin n\pi x \, dx = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx = 2 \int_0^{1/2} 0 \cdot \sin n\pi x \, dx + 2 \int_{1/2}^1 1 \cdot \sin n\pi x \, dx \\
 &= -2 \left[\frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right]_{1/2}^1 - \frac{2}{n\pi} \left((-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n \neq 2, \\ \frac{2}{n\pi} \left((-1)^{n/2} - 1 \right), & n = 2, \end{cases}
 \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$

Aleshores la sèrie de Fourier en sinus es podrà escriure de la manera següent:

$$\mathcal{F}[f_s](x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2(2n-1)\pi x}{2n-1}.$$

A la figura 4 es representem l'extensió parella de la funció de l'eneunciat. Deixem al lector la representació gràfica de l'extensió senar. \triangleright

9. Desenvolpeu la funció $f(x) = x^2$, $0 < x < \ell$

- (a) En sèrie de cosinus.
- (b) En sèrie de sinus.
- (c) En sèrie de Fourier.

\triangleleft **Solució.** (a) Considerem l'extensió parella de la funció donada:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) = x^2, & 0 \leq x < \ell, \\ f(-x) = x^2, & -\ell \leq x < 0 \end{cases} \tag{12}$$

i trobem els coeficients del desenvolupament en sèrie de Fourier de $f_p(x)$ a l'interval $(-\ell, \ell)$. Com que –evidentment–, $f_p(x)$ és una funció parella, tindrem $b_n = 0$ per tot $n = 1, 2, 3, \dots$ (i. e., els coeficients dels termes en sinus seran tots zero). Fem doncs els càlculs pels coeficients del terme independent i

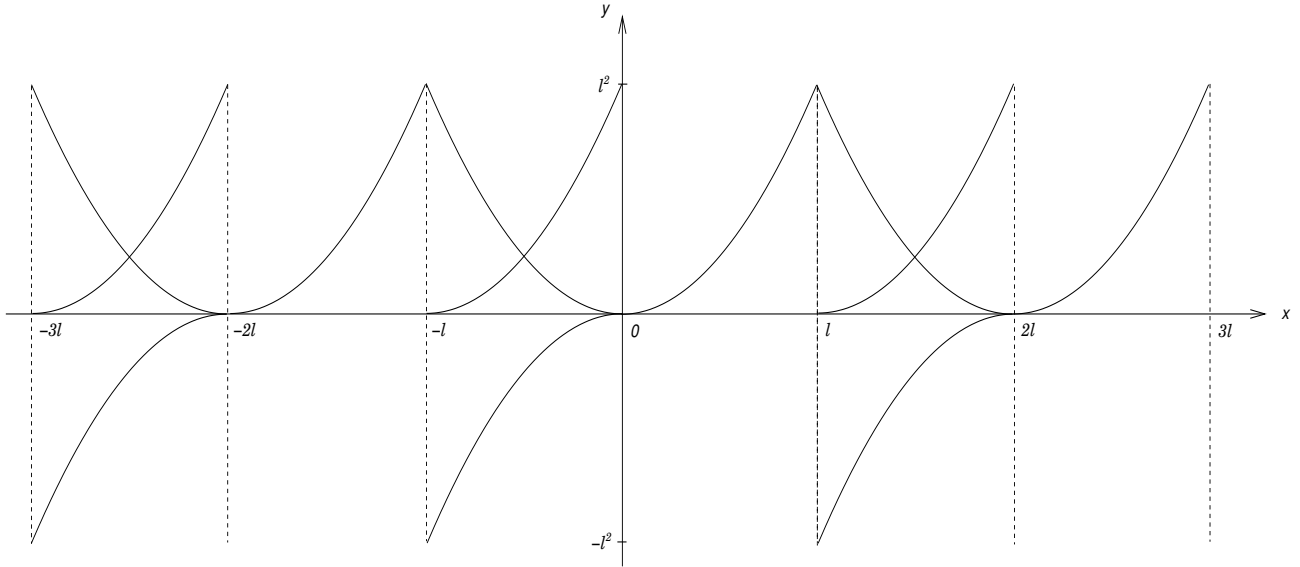


Figura 5. A partir de $f(x) = x^2$, definida a l'interval $0 < x < l$, es representen les seves extensions parella, senar i l -periòdica.

dels termes en cosinus:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f_p(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{2}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{2}{3} l^2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f_p(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^l x^2 d \left(\sin \frac{n\pi x}{l} \right) = \frac{2}{n\pi} \underbrace{\left[x^2 \sin \frac{n\pi x}{l} \right]_0^l}_{=0} \\ &+ \frac{4l}{n^2\pi^2} \int_0^l x d \left(\cos \frac{n\pi x}{l} \right) = \frac{4l}{n^2\pi^2} \left[x \cos \frac{n\pi x}{l} \right]_0^l - \frac{4l}{n^2\pi^2} \underbrace{\int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx}_{=0} = \frac{4l^2}{n^2\pi^2} (-1)^n \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$

En resum, tenim que la sèrie de Fourier en cosinus (és a dir, la corresponent a l'extensió parella) de la funció ve donada per

$$\mathcal{F}[f_p](x) = \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

amb $\mathcal{F}[f_p](x) = x^2$ a $0 < x < l$. *Observació:* de fet també a $-l \leq x \leq l$ atès que —en aquest cas—, la funció $f(x) = x^2$ coincideix amb la seva extensió parella a l'interval $-l < x < l$ i a més pren els mateixos valors als extrems.

(b) Ara considerarem l'extensió senar:

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x) = x^2, & 0 < x < l, \\ -f(-x) = -x^2, & -l < x \leq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Com que obviament $f_s(x)$ és una funció senar, els coeficients del terme independent i dels termes en cosinus són tots nuls, i. e.: $a_0 = 0$ i $a_n = 0$ per tot $n = 1, 2, 3, \dots$. Els coeficients dels termes en sinus

es calculen per la fórmula:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f_s(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\ell} x^2 d\left(\cos \frac{n\pi x}{\ell}\right) \\
 &\stackrel{\text{parts}}{=} -\frac{2}{n\pi} \left[x^2 \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^{\ell} + \frac{4}{n\pi} \times \frac{\ell}{n\pi} \int_0^{\ell} x d\left(\sin \frac{n\pi x}{\ell}\right) \stackrel{\text{parts}}{=} -\frac{2\ell^2}{n\pi} (-1)^n + \frac{4\ell}{n^2\pi^2} \left[x \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^{\ell} \\
 &\quad + \frac{4\ell}{n^2\pi^2} \times \frac{\ell}{n\pi} \int_0^{\ell} d\left(\cos \frac{n\pi x}{\ell}\right) = -\frac{2\ell^2}{n\pi} (-1)^n + \frac{4\ell^2}{n^3\pi^3} ((-1)^n - 1)
 \end{aligned}$$

on a la segona integració per parts de dalt tenim que

$$\frac{4\ell}{n^2\pi^2} \left[x \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right]_0^{\ell} = \frac{4\ell^2}{n^2\pi^2} \sin n\pi = 0,$$

per tot $n = 1, 2, 3, \dots$; i els coeficients b_n resulten

$$b_n = \begin{cases} -\frac{2\ell^2}{n\pi}, & n = 2, \\ \frac{2\ell^2}{n\pi} - \frac{8\ell^2}{n^3\pi^3}, & n \neq 2. \end{cases}$$

Aleshores, la sèrie de Fourier en sinus de la funció és:

$$\mathcal{F}[f_s](x) = -\frac{\ell^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi x}{\ell} + \frac{\ell^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{8}{(2n-1)^3\pi^2} \right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{\ell} = x^2,$$

per $0 \leq x < \ell$.

(c) Busquem el desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció en $0 < x < \ell$, per tant una sèrie del tipus:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{\ell} \right), \tag{14}$$

on els coeficients vénen donats ara per:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 dx = a_0(f_p) = \frac{2}{3}\ell^2; \\
 a_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 \cos \frac{2n\pi x}{\ell} dx = a_{2n}(f_p) = \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}, \\
 b_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 \sin \frac{2n\pi x}{\ell} dx = b_{2n}(f_s) = -\frac{\ell^2}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

Substituint aquests coeficients en (14):

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{\ell^2}{3} + \frac{\ell^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2\pi} \cos \frac{2n\pi x}{\ell} - \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi x}{\ell} \right) = x^2, \quad 0 < x < \ell.$$

A la figura 5 es representen l'extensió parella, senar i ℓ -periòdica a partir de la funció $f(x) = x^2$ definida a l'interval $0 < x < \ell$. \triangleright

9. (a) Trobeu la forma general de la sèrie de Fourier en cosinus i de la sèrie de Fourier en sinus a $[0, C]$ per funcions que compleixen la relació $f(C-x) = f(x)$.

(b) Mateixa pregunta per $f(C-x) = -f(x)$.

\triangleleft **Solució.** (a.1) Sèrie de Fourier en cosinus:

$$\mathcal{F}[f_p](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{C}, \tag{15}$$

essent f_p l'extensió parella de la funció, i. e.:

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq C, \\ f(-x), & -C \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (16)$$

Aleshores, calculant explícitament els coeficients:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{C} \int_0^C f(x) dx = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx + \frac{2}{C} \int_{C/2}^C f(x) dx = \left. \begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } dx = -dy; \\ x = C/2 \Rightarrow y = C/2; \\ x = C \Rightarrow y = 0. \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx - \frac{2}{C} \int_{C/2}^0 f(C-y) dy \stackrel{f(C-y)=f(y)}{=} \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx; \\ a_n &= \frac{2}{C} \int_0^C f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} \int_{C/2}^C f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx \\ &= \left. \begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } dx = -dy; \ x = C/2 \Rightarrow y = C/2; \ x = C \Rightarrow y = 0; \\ \cos \frac{n\pi}{C}(C-y) = \cos \left(n\pi - \frac{n\pi y}{C} \right) = (-1)^n \cos \frac{n\pi y}{C}. \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} (-1)^n \int_0^{C/2} f(C-y) \cos \frac{n\pi y}{C} dy \\ &\stackrel{f(C-y)=f(y)}{=} \frac{2}{C} (1 + (-1)^n) \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx = \begin{cases} 0, & n \neq \dot{2}, \\ \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx, & n = \dot{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$ Resumint:

$$a_0 = \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx; \quad b_n = a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{C} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Finalment, substituïnt al desenvolupament (15):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_p](x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \cos \frac{2n\pi x}{C} \\ &= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(y) dy + \frac{4}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{C/2} f(y) \cos \frac{2n\pi y}{C} dy \right) \cos \frac{2n\pi x}{C}. \end{aligned}$$

(a.2) Ara, desenvoluparem l'extensió senar de la funció, i. e.:

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq C, \\ -f(-x), & -C \leq x < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Sabem que la sèrie de Fourier serà de la forma:

$$\mathcal{F}[f_s](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{C}.$$

(sèrie en sinus). Calculem a continuació els coeficients b_n per $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{C} \int_0^C f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} \int_{C/2}^C f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } dx = -dy; \ x = C/2 \Rightarrow y = C/2; \ x = C \Rightarrow y = 0; \\ \sin \frac{n\pi x}{C} = \sin \frac{n\pi}{C}(C - y) = \sin \left(n\pi - \frac{n\pi y}{C} \right) = (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi y}{C} \end{array} \right\} \\
 &= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} (-1)^{n+1} \int_0^{C/2} f(C - y) \sin \frac{n\pi y}{C} dy \\
 &\stackrel{f(C-y)=f(y)}{=} \frac{2}{C} (1 + (-1)^{n+1}) \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx = \begin{cases} 0, & n = 2, \\ \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx, & n \neq 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Així doncs, els coeficients queden:

$$a_0 = 0; \quad a_n = b_{2n} = 0, \quad b_{2n-1} = \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{C} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

de manera que per substitució en (17):

$$\mathcal{F}[f_s](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{C} = \frac{4}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{C/2} f(y) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{C} dy \right) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{C}.$$

(b.1) Com als dos apartats anteriors considerarem les extensions parella i senar —les quals vénen donades, de manera genèrica per (16) i (13) respectivament—. Els coeficients per la sèrie en cosinus es calcularan igual que a l'apartat (a.1) tenint en compte però la nova simetria (és a dir: $f(C - x) = -f(x)$). De nou, fent els càlculs:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{C} \int_0^C f(x) dx = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx + \frac{2}{C} \int_{C/2}^C f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } dx = -dy; \\ x = C/2 \Rightarrow y = C/2; \\ x = C \Rightarrow y = 0. \end{array} \right\} \\
 &= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx - \frac{2}{C} \int_{C/2}^0 f(C - y) dy = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) dx + \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(C - x) dx \\
 &\stackrel{f(C-y)=-f(y)}{=} 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{C} \int_0^C f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} \int_{C/2}^C f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } dx = -dy; \ x = C/2 \Rightarrow y = C/2; \ x = C \Rightarrow y = 0; \\ \cos \frac{n\pi}{C}(C - y) = \cos \left(n\pi - \frac{n\pi y}{C} \right) = (-1)^n \cos \frac{n\pi y}{C}. \end{array} \right\} \\
 &= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} (-1)^n \int_0^{C/2} f(C - y) \cos \frac{n\pi y}{C} dy \\
 &\stackrel{f(C-y)=-f(y)}{=} \frac{2}{C} (1 + (-1)^{n+1}) \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx = \begin{cases} 0, & n = 2, \\ \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{C} dx, & n \neq 2, \end{cases}
 \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$. O sigui:

$$a_0 = 0; \quad b_n = a_{2n} = 0, \quad a_{2n-1} = \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{C} dx, \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots$$

En conseqüència, la sèrie de Fourier en cosinus vindrà ara donada per:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_p](x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{C} \\ &= \frac{4}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{C/2} f(y) \cos \frac{(2n-1)\pi y}{C} dy \right) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{C}. \end{aligned}$$

(b.2) Procedirem exactament com a (a.2) aplicant però, al final del càlcul, que $f(C-x) = -f(x)$, i. e.:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{C} \int_0^C f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx = \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} \int_{C/2}^C f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx \\ &= \left. \begin{array}{l} \text{c. v.: } y = C - x, \\ \text{d'on: } dx = -dy; \quad x = C/2 \Rightarrow y = C/2; \quad x = C \Rightarrow y = 0; \\ \sin \frac{n\pi x}{C} = \sin \frac{n\pi}{C}(C - y) = \sin \left(n\pi - \frac{n\pi y}{C} \right) = (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi y}{C} \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx + \frac{2}{C} (-1)^{n+1} \int_0^{C/2} f(C-y) \sin \frac{n\pi y}{C} dy \\ &= \stackrel{f(C-y) = -f(y)}{=} \frac{2}{C} (1 + (-1)^n) \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx = \begin{cases} 0, & n \neq \dot{2}, \\ \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{C} dx, & n = \dot{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$. Per tant, els coeficients vénen donats per:

$$a_0 = 0; \quad a_n = b_{2n-1} = 0, \quad b_{2n} = \frac{4}{C} \int_0^{C/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{C} dx, \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \dots$$

i el desenvolupament:

$$\mathcal{F}[f_s](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin \frac{2n\pi x}{C} = \frac{4}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{C/2} f(y) \sin \frac{2n\pi y}{C} dy \right) \sin \frac{2n\pi x}{C}$$

és el desenvolupament de Fourier en sinus buscat. \triangleright

10. Desenvolueu la funció $\cos xz$ en sèrie de Fourier a l'interval $[-\pi, \pi]$, on z és un paràmetre real. Proveu les igualtats:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \pi z} &= \frac{2z}{\pi} \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2} \right) \\ \cot \pi z &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2} \right) \end{aligned}$$

i deduïu que

$$\begin{aligned} \pi &= 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \\ \pi &= 4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{16k^2 - 1}. \end{aligned}$$

◁ **Solució.** Sigui $f(x) = \cos xz$, $x \in [-\pi, \pi]$, $z \in \mathbb{R}$. Notem que és una funció parella i per tant, la seva sèrie de Fourier és una sèrie en cosinus (aleshores $b_n = 0$ per tot $n \in \mathbb{N}$). Si es calculen els seus coeficients s'obté:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos xz \, dx = \frac{2}{\pi z} \int_0^\pi d(\sin xz) = \frac{2}{\pi z} \sin \pi z;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos xz \cos nx \, dx \stackrel{(\dagger)}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(z+n)x + \cos(z-n)x] \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(z+n)x}{z+n} + \frac{\sin(z-n)x}{z-n} \right]_0^\pi \stackrel{(\ddagger)}{=} (-1)^n \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) \sin \pi z = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2 - z^2} z \sin \pi z,$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$

REMARCA 1.5. Aquí suposem que $z \notin \mathbb{Z}$ (notem que si $z = k \in \mathbb{Z}$, el desenvolupament en sèrie de Fourier de $f(x) = \cos xz$ és trivial).

Amb els coeficients calculats a dalt, la sèrie de Fourier esdevé:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2} \cos kx \right).$$

Per determinar cap a on convergeix la sèrie a l'interval $[-\pi, \pi]$ tenim, per aplicació directa del teorema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f](x) &= \cos xz, \quad \text{per } -\pi < x < \pi, \\ \mathcal{F}[f](\pm\pi) &= \frac{1}{2} (f(-\pi^+) + f(\pi^-)) = \frac{1}{2} (\cos(-\pi z) + \cos \pi z) = \cos \pi z \end{aligned} \tag{18}$$

o sigui:

$$\mathcal{F}[f](x) = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2} \cos kx \right) = \cos xz, \quad \text{per tot } -\pi \leq x \leq \pi.$$

D'acord amb això, agafant $x = 0 \in (-\pi, \pi)$:

$$\mathcal{F}[f](0) = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2} \right) = \cos(z \cdot 0) = 1$$

i dividint a tots dos costats per $\sin \pi z$:

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \frac{2z}{\pi} \left(\frac{1}{2z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2} \right), \tag{19}$$

on es suposa $z \notin \mathbb{Z}$. Tanmateix, prenent $x = \pi$ i d'acord amb (18),

$$\mathcal{F}[f](\pi) = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - z^2} (-1)^k \right) = \frac{2z \sin \pi z}{\pi} \left(\frac{1}{z^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - z^2} \right) = \cos \pi z.$$

Com dalt, assumint que $z \notin \mathbb{Z}$, dividim a dreta i esquerra per $\sin \pi z$ per obtenir

$$\cot \pi z = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{k^2 - z^2} \right). \tag{20}$$

Per últim, prenent en (19) $z = 1/2$:

$$1 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2 \times \frac{1}{4}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 - \frac{1}{4}} \right) \implies \pi = 2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1}$$

(†) Fem servir la mateixa identitat trigonomètrica del problema 5: $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$, ara però identificant $a = xz$ i $b = nx$.

(‡) En aplicar la "regla" de Barrow per $x = 0$ tots dos termes es fan zero: $\sin(z+n) \cdot 0 = \sin(z-n) \cdot 0 = 0$, mentre que a $x = \pi$ és $\sin(z \pm n)\pi = \sin \pi z \cos n\pi \pm \cos \pi z \sin n\pi = (-1)^n \sin \pi z$ (recordem que, per tot $n \in \mathbb{Z}$: $\cos n\pi = (-1)^n$ i $\sin n\pi = 0$).

i $z = 1/4$ en (20),

$$1 = \frac{1}{\pi} \left(4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \times \frac{1}{4}}{k^2 - \frac{1}{16}} \right) \implies \pi = 4 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{16k^2 - 1}$$

s'obtenen les dues últimes sumes proposades a l'enunciat. \triangleright