TEMA 16

Transformada $\mathcal{Z}$

Problemes

1. Calcula la $\mathcal{Z}$-transformada de les successions

$(1,0,1,0,1,0,1,\dots)$
$(0,1,0,1,0,1,0,\dots)$
$(1,0,0,1,0,0,1,\dots)$
$(0,1,0,0,1,0,0,\dots)$
$(0,0,1,0,0,1,0,\dots)$

◁ **Solució.**

$\mathcal{Z}\left[(1,0,1,0,1,0,1,\dots)\right](z)=1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}+\cdots=\frac{1}{1-1/z^2}=\frac{z^2}{z^2-1}.$

$\mathcal{Z}\left[(0,1,0,1,0,1,0,\dots)\right](z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^5}+\cdots=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\dots\right)=\frac{1/z}{1-1/z^2}=\frac{z}{z^2-1}$ (1-retardada).

$\mathcal{Z}\left[(1,0,0,1,0,0,1,\dots)\right](z)=1+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^6}+\cdots=\frac{1}{1-1/z^3}=\frac{z^2}{z^3-1}.$

$\mathcal{Z}\left[(0,1,0,0,1,0,0,\dots)\right](z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^7}+\cdots=\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^6}+\dots\right)=\frac{1/z}{1-1/z^3}=\frac{z^2}{z^3-1}$ (1-retardada).

$\mathcal{Z}\left[(0,0,1,0,0,1,0,\dots)\right](z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^8}+\cdots=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^6}+\dots\right)=\frac{1/z^2}{1-1/z^3}=\frac{z}{z^3-1}$ (2-retardada).▷

2. Demostreu, per inducció que

$$\mathcal{Z}\left[\binom{k}{N}\right](z)=\frac{z}{(z-1)^{N+1}},\quad N\in\mathbb{N}.$$

◁ **Solució.** Amb la definició dels coeficients binomials, notem que la successió:

$$(y(k))_{k\in\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}}=\left(\binom{k}{N}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}=\left(0,\overset{N)}{\dots},0,\binom{N}{N},\binom{N+1}{N},\binom{N+2}{N},\dots,\binom{k}{N},\dots\right),\tag{1}$$

i. e.:

$$y(0)=\binom{0}{N}=0,\quad y(1)=\binom{1}{N}=0,\dots,y(N-1)=\binom{N-1}{N}=0.\tag{2}$$

En particular, $\left(\binom{k}{1}\right)_{k\in\mathbb{N}_0} = (0,1,2,3,\dots)$ i llavors:

$$\mathcal{Z}\left[\binom{k}{1}\right](z) = \mathcal{Z}\left[k\right](z) = \mathcal{Z}\left[k\cdot 1\right](z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}, \tag{3}$$

on hen fet servir la transformada del producte per polinòmiques. Així doncs, veiem que la fórmula és certa per $N=1$.

Suposarem a continuació que es satisfà per $N=m>1$ (hipòtesi d'inducció) i —sota aquesta hipòtesi—, comproverem si també és cert per $N=m+1$. A partir de:

$$\binom{k}{m+1} = \frac{k-m}{m+1}\binom{k}{m},$$

aplicant la $\mathcal{Z}$-transformada a totes dues bandes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[\binom{k}{m+1}\right](z) &= \frac{1}{m+1}\mathcal{Z}\left[k\cdot\binom{k}{m}\right](z) - \frac{m}{m+1}\mathcal{Z}\left[\binom{k}{m}\right](z)\\
&= -\frac{z}{m+1}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mathcal{Z}\left[\binom{k}{m}\right](z)\right) - \frac{m}{m+1}\times\frac{z}{(z-1)^{m+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{z}{m+1}\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{(z-1)^{m+1}}\right) - \frac{m}{m+1}\times\frac{z}{(z-1)^{m+1}}\\
&= -\frac{z}{m+1}\times\frac{(z-1)^{m+1}-(m+1)z(z-1)^m}{(z-1)^{2m+2}} - \frac{m}{m+1}\times\frac{z}{(z-1)^{m+1}}\\
&= -\frac{z}{m+1}\times\frac{(z-1-mz-z)(z-1)^m + m(z-1)^{m+1}}{(z-1)^{2m+2}}\\
&= -\frac{z}{m+1}\times\frac{z-1-mz-z+m(z-1)}{(z-1)^{m+2}}\\
&= \frac{1}{m+1}\times\frac{(m+1)z}{(z-1)^{m+1}} = \frac{z}{(z-1)^{m+2}},
\end{aligned}$$

que és la fòrmula de l'enunciat per $N=m+1$. Llavors els principi d'inducció assegura que la fórmula és certa per tot $N\in\mathbb{N}$.

Remarca 1.1. Al pas inductiu es pot fer servir també, alternativament:

$$\binom{k}{m+1} = \frac{k}{m+1}\binom{k-1}{m},$$

d'on, aplicant la $\mathcal{Z}$-transformada a totes dues bandes:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[\binom{k}{m+1}\right](z) &= \frac{1}{m+1}\mathcal{Z}\left[k\binom{k-1}{m}\right](z) \overset{(*)}{=} -\frac{z}{m+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z}\mathcal{Z}\left[\binom{k}{m}\right](z)\right) =\\
&\overset{(\dagger)}{=} -\frac{z}{m+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z}\times\frac{z}{(z-1)^{m+1}}\right) = -\frac{z}{m+1}(-m-1)\frac{1}{(z-1)^{m+1}} = \frac{z}{(z-1)^{m+2}}
\end{aligned}$$

i així s'aconsegueix una certa simplificació respecte del procés de dalt.

Remarca 1.2. A partir d'aquí es pot provar que:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^M}{(z-\lambda)^N}\right](k) = \lambda^{k+M-N}\binom{k+M-1}{N-1}, \tag{4}$$

(*) Aplicant la fórmula de la $\mathcal{Z}$-transformada del producte per polinòmiques i de la $\mathcal{Z}$-transformada de la retardada.
(†) Es fa servir ara la hipòtesi d'inducció.

per M, N enters amb: $0 \leq M \leq N$, $N \geq 1$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. En efecte:

$$\mathcal{Z}\left[\lambda^{k+M-N}\binom{k+M-N}{N-1}\right](z) = \lambda^{M-N}\mathcal{Z}\left[\binom{k+M-1}{N-1}\right]\left(\frac{z}{\lambda}\right) =$$

$$\lambda^{M-N}\left\{\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{M-1}\mathcal{Z}\left[\binom{k}{N-1}\right]\left(\frac{z}{\lambda}\right) - \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{M-1}\binom{0}{M-1} - \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{M-2}\binom{1}{N-1} - \dots\right.$$

$$\left.\dots - \frac{z}{\lambda}\binom{M-2}{N-1}\right\} = \lambda^{M-N}\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{M-1}\frac{\frac{z}{\lambda}}{\left(\frac{z}{\lambda}-1\right)^{N}} = \frac{z^M}{(z-\lambda)^N}$$

on hem aplicat la transformada del producte per geomètriques i les fórmules d'avançament (transformada de l'avançada) a la successió $(y(k))_{k\in\mathbb{N}_0} = \left(\binom{k}{N}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ definida per (1), (2) i que llavors $y(0) = \binom{0}{N} = 0, y(1) = \binom{1}{N}, \dots, y(M-2) = \binom{M-2}{N}, \dots, y(N-2) = \binom{N-2}{N-1} = 0$. Notem, a més que és necessari que $M \leq N$. Així, per exemple és clar que no existeix $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2}{z-1}\right](k)$, puix d'altra banda si existís $(y(k))_{k\in\mathbb{N}_0}$ tal que $\mathcal{Z}[y(k)](z) = \frac{z^2}{z-1}$ aleshores: $\mathcal{Z}[y(k-1)](z) = \frac{z}{z-1}$, d'on $y(k-1) = 1$ per $k = 1, 2, \dots$ però llavors $y(k) = 1$ per $k = 0, 1, 2, \dots$ la qual cosa és una contradicció perquè $\mathcal{Z}[(1,1,1,\dots)](z) = \frac{z}{z-1}$. ▷

2. Calculeu:

(a) $\mathcal{Z}[k^z]$. (b) $\mathcal{Z}[k^3]$. (c) $\mathcal{Z}[k^4]$.

◁ **Solució.** Cal aplicar la fórmula de la $\mathcal{Z}$-transformada del producte per polinòmiques. Recordem:

$$\mathcal{Z}[k^p y(k)](z) = (-z\,D) \overset{p)}{\dots} (-z\,D)\mathcal{Z}[y(k)](z), \qquad p \in \mathbb{N} \tag{5}$$

on D denota derivació respecte de z, i. e.: $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$. Llavors:

(a)
$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[k^2\right](z) &= (-z\,D)(-z\,D)\mathcal{Z}[1](z) = (-z\,D)(-z\,D)\frac{z}{z-1} = -z\,D\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right]\\ &= -z\frac{(z-1)^2 - 2z(z-1)}{(z-1)^4} = -z\frac{(z-1)(z-1-2z)}{(z-1)^4}\\ &= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}.\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[k^3\right](z) &= -z\,D\,\mathcal{Z}k^2(z) = -z\,D\left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}\right]\\ &= -z\frac{(z-1)^3(1+2z) - 3(z^2+z)(z-1)^2}{(z-1)^6}\\ &= -z\frac{(z-1)^2(z+2z^2-1-2z-3z^2-3z)}{(z-1)^6}\\ &= z\frac{z^2+4z+1}{(z-1)^4}.\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[k^4\right](z) &= -z\,D\,\mathcal{Z}\left[k^3\right](z) = -z\,D\left[\frac{z^2+4z+1}{(z-1)^4}\right]\\ &= -z\frac{(z-1)^4(3z^2+8z+1) - 4(z^3+4z^2+z)(z-1)^3}{(z-1)^8}\\ &= -z\frac{(z-1)^3(3z^3+8z^2+z-3z^2-8z-1-4z^3-16z^2-4z)}{(z-1)^8}\\ &= z\frac{z^3+11z^2+11z+1}{(z-1)^5}.\end{aligned}$$ ▷

3. Calculeu:

(a) $\mathcal{Z}[\cos\beta k]$, $\mathcal{Z}[\sin\beta k]$.

(b) $\mathcal{Z}\left[\mathrm{e}^{-\alpha k}\cos\beta k\right]$, $\mathcal{Z}\left[\mathrm{e}^{-\alpha k}\sin\beta k\right]$.

◁ **Solució.** *(a)* Tenint en compte que $\cos\beta k = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta k}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta k}\right)$, essent $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, i la linealitat de la $\mathcal{Z}$-transformada resulta:

$$\mathcal{Z}[\cos\beta k](z) = \mathcal{Z}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta k}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta k}}{2}\right](z) = \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right)^k\right](z) + \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left[\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\right)^k\right](z) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}/2}{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}-1} + + \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}/2}{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}-1}\right) = \frac{z^2 - z\cos\beta}{z^2-2z\cos\beta+1} = \frac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1}.$$

Per l'altra, faren ús de $\sin\beta k = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta k}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta k}\right)$. Llavors:

$$\mathcal{Z}[\sin\beta k](z) = \mathcal{Z}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta k}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta k}}{2}\right](z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathcal{Z}\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right)^k\right](z) - \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathcal{Z}\left[\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\right)^k\right](z) =$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}}{z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}-1} - \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}-1}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \times \frac{z^2 - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} - z^2 + z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}}{z^2-2z\cos\beta+1} = \frac{z\sin\beta}{z^2-2z\cos\beta+1}$$

(b) aplicarem la fórmula per la transformada del "producte per geomètriques", i. e.:

$$\mathcal{Z}\left[\lambda^k y(k)\right](z) = \mathcal{Z}y(k)(z/\lambda), \qquad 0\neq\lambda\in\mathbb{C} \tag{6}$$

Amb això i els resultats de l'apartat anterior tenim, per la primera transformada:

$$\mathcal{Z}\left[\mathrm{e}^{-\alpha k}\cos\beta k\right](z) = \mathcal{Z}[\cos\beta k](\mathrm{e}^{\alpha}z) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha}z\left(\mathrm{e}^{\alpha}z-\cos\beta\right)}{\mathrm{e}^{2\alpha}z^2-2\mathrm{e}^{\alpha}z\cos\beta+1}$$

i per la segona,

$$\mathcal{Z}\left[\mathrm{e}^{-\alpha k}\sin\beta k\right](z) = \mathcal{Z}[\sin\beta k](\mathrm{e}^{\alpha}z) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha}z\sin\beta}{\mathrm{e}^{2\alpha}z^2-2\mathrm{e}^{\alpha}z\cos\beta+1}. \triangleright$$

4. Calculeu, en funció de $\mathcal{Z}[y(k)](z)$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{y(k)}{k+\alpha}\right](z)$$

◁ **Solució.**

$$\mathcal{Z}\left[\frac{y(k)}{k+\alpha}\right](z) = \sum_{k\geq 0}\frac{y(k)}{k+\alpha}z^{-k} = -z^{\alpha}\sum_{k\geq 0}y(k)\frac{-z^{-k-\alpha}}{k+\alpha} =$$
$$-z^{\alpha}\sum_{k\geq 0}y(k)\int z^{-k-\alpha-1}\mathrm{d}z = -z^{\alpha}\int\frac{\sum_{k\geq 0}y(k)z^{-k}}{z^{\alpha+1}}\mathrm{d}z = -z^{\alpha}\int\frac{\mathcal{Z}[y(k)](z)}{z^{\alpha+1}}\mathrm{d}z. \triangleright$$

5. Demostreu les següents $\mathcal{Z}$-antitransformades

a) $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-\lambda)^3}\right] = \lambda^{k-3}\frac{(k-2)(k-1)}{2}$.

b) $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-\lambda)^3}\right] = \lambda^{k-2}\frac{(k-1)k}{2}$.

c) $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-\lambda)^3}\right] = \lambda^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}$.

◁ **Solució.**

(a) $$y(k) := \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-\lambda)^3}\right](k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\lambda^{-3}\frac{1}{(z/\lambda-1)^3}\right](k) = \lambda^{-3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z/\lambda}\times\frac{z/\lambda}{(z/\lambda-1)^3}\right](k)$$
$$\overset{16.2}{=} \lambda^{-3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z/\lambda}\mathcal{Z}\left[\binom{k}{2}\right]\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right](k) = \lambda^{-3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\mathcal{Z}\left[\binom{k}{2}\right]\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right](k)$$
$$= \lambda^{-3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\mathcal{Z}\left[\binom{k-1}{2}\right]\left(\frac{z}{\lambda}\right)\right](k) = \lambda^{-3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\mathcal{Z}\left[\lambda^k\binom{k-1}{2}\right](z)\right](k)$$
$$= \lambda^{k-3}\binom{k-1}{2} = \lambda^{k-3}\frac{(k-1)(k-2)}{2}.$$

(b) $$y(k) := \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-\lambda)^3}\right](k) \Longrightarrow y(k-1) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-\lambda)^3}\right](k) \overset{(a)}{=} \lambda^{k-3}\frac{(k-1)(k-2)}{2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-\lambda)^3}\right](k) = \lambda^{k-2}\frac{k(k-1)}{2}$$

(c) $$y(k) := \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z`2}{(z-\lambda)^3}\right](k) \Longrightarrow y(k-1) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-\lambda)^3}\right](k) \overset{(b)}{=} \lambda^{k-2}\frac{k(k-1)}{2}.$$
$$\Longrightarrow y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-\lambda)^3}\right](k) = \lambda^{k-1}\frac{(k+1)k}{2}.$$ ▷

Remarca 1.3. Aquest resultat surt de manera immediata aplicant la fórmula (4) —remarca 1.2, problema 2. En efecte:

(a) $M = 0 \le N = 3 \ge 1 : \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{(z-\lambda)^3}\right](k) = \lambda^{k-3}\binom{k-1}{2} = \lambda^{k-3}\frac{(k-1)(k-2)}{2}.$

(b) $M = 1 \le N = 3 \ge 1 : \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-\lambda)^3}\right](k) = \lambda^{k-2}\binom{k}{2} = \lambda^{k-2}\frac{k(k-1)}{2}.$

(c) $M = 2 \le N = 3 \ge 1 : \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-1)^3}\right](k) = \lambda^{k-1}\binom{k+1}{2} = \lambda^{k-1}\frac{(k+1)k}{2}.$ ▷

6. Calculeu les $\mathcal{Z}$-antitransformades de les següents fraccions racionals:

$$\text{(a) } \frac{z+2}{z-1}, \qquad \text{(b) } \frac{z-3}{z^2-3z+2}, \qquad \text{(c) } \frac{2z^2-3z}{z^2-3z+2}, \qquad \text{(d) } \frac{z}{z^2-6z+8}.$$

◁ **Solució.** *(a)* Arran de la descomposició en fraccions simples s'obté:

$$\frac{z+2}{z-1} = 1 + \frac{3}{z-1} \Longrightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z+2}{z-1}\right](k) = \mathcal{Z}^{-1}[1](k) + \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{3}{z-1}\right](k) =$$
$$= (1,0,0,\dots,0,\dots) + (0,3,3,\dots,3,\dots) = \left\{\begin{array}{ll} 1, & k=0 \\ 3, & k\ge 1 \end{array}\right\} = (1,3,3,\dots,3,\dots).$$

(b) Igualment, descomposant en fraccions simples:

$$\frac{z-3}{z^2-3z+2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} \Longrightarrow (z-2)A + (z-1)B = z-3 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} z=2 & \Longrightarrow & B=-1, \\ z=1 & \Longrightarrow & A=2. \end{array}\right.$$

S'obté:

$$\begin{aligned} y(k) &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z-3}{z^2-3z+2}\right](k) \\ &= 2\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right](k) - \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-2}\right](k) \\ &= 2(0,1,1,\dots,1,\dots) + (0,2,2^2,2^3,\dots,2^k,\dots) \\ &= (0,0,2-2^2,2-2^3,\dots,2-2^k,\dots), \end{aligned}$$

o, en notació més compacta:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z-3}{z^2-3z+2}\right](k) = \begin{cases} 0, & k=0, \\ 2-2^k, & k\geq 1. \end{cases}$$

(c) De la mateixa manera, descomposem primer en fraccions simples:

$$\frac{2z^2-3z}{z^2-3z+2} = z\left(\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}\right) \Longrightarrow (z-2)A+(z-1)B = 2z-3 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} z=2 & \Longrightarrow & B=1, \\ z=1 & \Longrightarrow & A=1, \end{array}\right\}$$

i després, per la linealitat de la $\mathcal{Z}$-transformada (i per tant de la $\mathcal{Z}$-antitransformada):

$$\begin{aligned} y(k) &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{2z^2-3z}{z^2-3z+2}\right](k) \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right](k) + \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right](k) \\ &= (1,1,1,\dots,1,\dots) + (1,2,2^2,\dots,2^k,\dots) \\ &= (2,3,5,\dots,1+2^k,\dots) \\ &= \left(1+2^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \end{aligned}$$

on, recordem, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\} = \{0,1,2,3,\dots\}$.

(d) Un cop més, descomposem en fraccions simples:

$$\frac{z}{z^2-6z+8} = z\left(\frac{A}{z-4}+\frac{B}{z-2}\right) \Longrightarrow (z-2)A+(z-4)B = 1 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} z=2 & \Longrightarrow & B=-1/2, \\ z=4 & \Longrightarrow & A=1/2. \end{array}\right.$$

Amb això:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z^2-6z+8}\right](k) = \frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-4}\right](k) - \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right](k) = \left(\frac{1}{2}\left(4^k-2^k\right)\right).\triangleright$$

7. Resoleu, mitjançant la $\mathcal{Z}$-transformació, les equacions en diferències següentes:

a) $y(k+1)+2y(k)=4^k, y(0)=0$.
b) $y(k+2)-3y(k+1)+2y(k)=1, y(0)=y(1)=2$.
c) $y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=k, y(0)=0, y(1)=1/2$.
d) $y(k+2)-5y(k+1)+6y(k)=0, y(0)=y(1)=1$.
e) $y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=2, y(0)=0, y(1)=1$.

$\triangleleft$ **Solució.** Sigui:

$$Y(z) := \mathcal{Z}\left[y(k)\right](z).$$

Amb aquesta definició.

(a) Apliquem la $\mathcal{Z}$-transformada a totes dues bandes de l'equació:

$$zY(z) - zy(0) + 2Y(z) = (z+2)Y(z) = \frac{z}{z-4},$$

on hem substituït la condició inicial, $y(0) = 0$. Això clarament produeix una equació lineal algebraica en la $\mathcal{Z}$-transformada de $y(k)$, $Y(z)$. Aleshores, per trobar la solució, $(y(k))_{k\in\mathbb{N}_0}$, caldrà primer aïllar la funció $Y(z)$,

$$Y(z) = \frac{z}{(z+2)(z-4)} = \frac{1}{6}\left(\frac{z}{z-4} + \frac{z}{z+2}\right)$$

i després trobar la seva $\mathcal{Z}$-antitransformada:

$$(y(k))_{k\in\mathbb{N}_0} = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right](k) = \left(\frac{1}{6}\left(4^k - (-2)^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_0}.$$

(b) Com a l'apartat anterior, apliquem la $\mathcal{Z}$-transformada a la dreta i a l'esquerra de l'equació per obtenir

$$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - 3zY(z) + 3zy(0) + 2Y(z) = (z^2 - 3z + 2)Y(z) - 2z^2 + 4z = \frac{z}{z-1},$$

on hem substituit les condicions inicials: $y(0) = y(1) = 2$. Aïllant $Y(z)$ de l'equació de dalt s'arriba a:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)^2} + \frac{2z}{z-1}$$

(suposem $|z| > 2$). A continuació, descomposem en fraccions simples

$$\frac{z}{(z-1)^2(z-2)} = z\left(\frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2}\right) \Rightarrow (z-2)A + (z-2)(z-1)B + (z-1)^2C = 1;$$

$$\text{d'on:}\quad \begin{cases} z = 2 & \Rightarrow \quad C = 1, \\ z = 1 & \Rightarrow \quad A = -1, \\ z = 0 & \Rightarrow \quad -2A + 2B + C = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -1. \end{cases}$$

Amb això,

$$\frac{z}{(z-1)^2(z-2)} = -\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}$$

i obtenim doncs la descomposició:

$$Y(z) = -\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2} + \frac{2z}{z-1} = -\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}.$$

Per últim, s'haurà de calcular $\mathcal{Z}$-antitransformada. Explícitament:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right](k) = -\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right](k) + \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right](k) + \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right](k) = -\binom{k}{1} + 1 + 2^k$$

on la primera surt directament aplicant el resultat problema 2 amb $N = 1$ o bé de la fórmula (4) amb $M = 1$, $N = 2$, $\lambda = 1$ (veure remarca 1.2 al mateix problema). Resumint:

$$(y(k))_{k\in\mathbb{N}_0} = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right](k) = \left(-k + 1 + 2^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}.$$

(c) Aplicant la $\mathcal{Z}$-transformada a totes dues bandes de l'equació resulta:

$$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1) - 5zY(z) + 5zy(0) + 6Y(z) = (z^2 - 5z + 6)Y(z) - \frac{z}{2} = \frac{z}{(z-1)^2},$$

on es substitueixen les condicions inicials $y(0) = 0$ i $y(1) = 1/2$. D'aquí, aïllant $Y(z)$ i descomposant en fraccions simples obtenim:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)(z-3)} + \frac{z/2}{(z-2)(z-3)} = \frac{-3z/2}{z-2} + \frac{3z/4}{z-3} + \frac{z/2}{(z-1)^2} + \frac{3z/4}{z-1}.$$

Finalment, per tenir la solució de l'equació en diferències cal prendre la $\mathcal{Z}$-antitransformada de $Y(z)$, i. e.:

$$\begin{aligned}(y(k))_{k\in\mathbb{N}} &= \mathcal{Z}^{-1}\left[y(k)\right](k)\\ &= -\frac{3}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right](k)+\frac{3}{4}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-3}\right](k)+\frac{1}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right](k)+\frac{3}{4}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right](k)\\ &= \left(\frac{1}{2}\left(-3\cdot 2^k+\frac{1}{2}3^{k+1}+k+\frac{3}{2}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_0}.\end{aligned}$$

(d) Al igual que hem fet als apartats anteriors, aplicarem la $\mathcal{Z}$-transformada a dreta i esquerra de la igualtat, substituirem les condicions inicials ($y(0)=y(1)=1$ en aquest cas) i agruparem per tenir una equació lineal algebraica en $Y(z)$, i. e.:

$$z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)-5zY(z)+5zy(0)+6Y(z)=(z^2-5z+6)Y(z)-z^2+4z=0,$$

d'on:

$$Y(z)=z\frac{z-4}{(z-3)(z-2)}=z\left(\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-3}\right)\Rightarrow (z-3)A+(z-2)B=z-4$$

$$\text{d'aquí: } \left\{\begin{array}{l} z=3 \;\Rightarrow\; B=-1,\\ z=2 \;\Rightarrow\; A=2.\end{array}\right. \quad \text{i per tant: } Y(z)=z\frac{z-4}{(z-3)(z-2)}=\frac{2z}{z-2}+\frac{z}{z-3}.$$

Ara, amb $Y(z)$ descomposat en fraccions simples resulta fàcil trobar la seva $\mathcal{Z}$-antitransformada i amb aquesta, la solució:

$$(y(k))_{k\in\mathbb{N}_0}=\mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right](k)=2\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right](k)-\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-3}\right](k)=\left(2^{k+1}-3^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}.$$

(h) L'aplicació de la $\mathcal{Z}$-transformada a tots dos costats de l'equació ens duu a:

$$z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)+3zY(z)-3zy(0)+2Y(z)=(z^2+3z+2)Y(z)-z=\frac{2z}{z-1}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow Y(z)=\frac{2z}{(z+2)(z+1)(z-1)}+\frac{z}{(z+2)(z+1)}$$

i descomposant en fraccions simples:

$$Y(z)=\frac{z/3}{z-1}-\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}+\frac{2z/3}{z+2}+\frac{z}{z+1}=\frac{z/3}{z-1}-\frac{z/3}{z+2}$$

d'on es dedueix que la solució de l'equació en diferències ve donada per:

$$(y(k))_{k\in\mathbb{N}_0}=\mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right](k)=\frac{1}{3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right](k)-\frac{1}{3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+2}\right](k)=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(-2)^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}. \triangleright$$

8. (INTRESSOS I AMORTITZACIONS)

A) Suposeu que al començament de cada any s'ingressa en un compte bancari una quantitat constant b, més el rèdit produït durant l'any anterior a un interés anual i. Per a l'any k, designeu per $y(k)$ la quantitat acumulada al començament de l'any, després de les operacions anteriors: $y(1)=b,\ldots$

Plantegeu l'equació en difrerències que verifica $y(k)$, i resoleu-la per a trobar la seva expressió en funció de k, i i b.

B) De manera anàloga, considereu un procès d'amortització d'un deute D, a un interés anual i, mitjançant l'abonament anual d'una quota constant B. Designeu per $d(k)$ el deute pendent al cap de cap anys: $d(0)=D,\ldots$

Plantegeu l'equació en diferències que verifica $d(k)$, i resoleu-la per trobar la seva expressió en funció de k, i, B, D.

Deduïu quin ha de ser el valor de B per tal que el deute sigui liquidat en un termini de n anys.

$\triangleleft$ **Solució.** Sigui $y(k)$ la quantitat acumulada al final de l'any k-èsim, i. e.:

$$y(0) = 0,\ y(1) = b,\ y(2) = b + y(1) + iy(1) = b + (1+i)y(1), \dots, y(k+1) = b + (1+i)y(k), \dots$$

Així doncs, $y(k)$ vindrà donada per la solució de l'equació en diferències:

$$y(k+1) - (1+i)y(k) = b, \qquad \text{y(0)=0.}$$

Aplicant la $\mathcal{Z}$-transformada a dreta i esquerra i agrupant:

$$zY(z) - zy(0) - (1+i)Y(z) = (z - (i+1))\,Y(z) = \frac{bz}{z-1},$$

on es defineix $Y(z) := \mathcal{Z}\left[d(k)\right](z)$. A partir d'aquí:

$$Y(z) = \frac{bz}{(z-1)(z-(i+1))} = \frac{-bz/i}{z-1} + \frac{bz/i}{z-(i+1)}$$

i llavors, prenent la $\mathcal{Z}$-antitransformada s'obté:

$$y(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right](k) = -\frac{b}{i}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right](k) + \frac{b}{i}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-(i+1)}\right](k) = \frac{b}{i}\left((i+1)^k - 1\right),$$

per $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

B) Sigui $d(k)$ el deute pendent al cap de k anys, i. e.:

$$d(0) = D,\ d(1) = (1+i)d(0) - B, \dots, d(k+1) = (1+i)d(k) - B, \dots$$

i llavors $d(k)$ ve determinat per la solució de l'equació en diferències,

$$d(k+1) - (1+i)d(k) = B, \qquad d(0) = D. \tag{7}$$

Com a l'apartat anterior s'aplica la $\mathcal{Z}$-transformada a tots dos costats de l'equació. Posant ara $Y(z) := \mathcal{Z}\left[d(k)\right](z)$, s'arriba a,

$$zY(z) - zd(0) - (1+i)Y(z) = (z - (1+i))\,Y(z) - Dz = -\frac{Bz}{z-1}$$

(on s'ha substituït la "condició inicial", $d(0) = D$). Aïllant la transformada $Y(z)$ veiem que resulta ser una fracció racional, que descomposarem en fraccions simples. Explícitament:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{Dz}{z-(i+1)} - \frac{Bz}{(z-(i+1))(z-1)} = \frac{Dz}{z-(i+1)} + \frac{Bz/i}{z-1} - \frac{Bz/i}{z-(i+1)} \\ &= \left(D - \frac{B}{i}\right)\frac{z}{z-(i+1)} + \frac{Bz/i}{z-1}. \end{aligned}$$

Un cop expressada $Y(z)$ d'aquesta manera, el càlcul de la seva $\mathcal{Z}$-antitransformada és immediat. Resulta:

$$\begin{aligned} d(k) &= \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right](k) = \left(D - \frac{B}{i}\right)\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-(i+1)}\right](k) + \frac{B}{i}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right](k) \\ &= \left(D - \frac{B}{i}\right)(i+1)^k + \frac{B}{i}. \end{aligned}$$

Finalment, si volem que el deute D sigui liquidat en un termini de n anys, cal $d(n) = 0$ i llavors la quota anual a pagar ascendeix a:

$$d(k) = 0 \Longleftrightarrow B = \frac{Di(i+1)^n}{(i+1)^n - 1}. \triangleright$$

9. (MODEL DE TERANYINA)

A) Suposeu que la demanda d i la producció s d'un determinat producte depenen linealment del seu preu p segons

$$d(p) = d_0 - ap$$
$$s(p) = s_0 + bp$$

on a, b, d_0 són constants positives i s_0 és una constant negativa.

Calculeu el preu de l'equlibri p_e.

B) Considerem en endavant el cas d'una producció periòdica.

Per fixar idees, suposarem que es tracta d'un producte agrícola anual.

Si designem per $s(k)$ la collita de l'any k, i per $p(k)$ el preu de venda que resulta d'equilibrar l'oferta amb la demanda, justifiqueu les relacions

$$s(k) = d_0 - ap(k)$$
$$s(k+1) = s_0 + b\underline{p}(k+1)$$

on $\underline{p}(k+1)$ és la previsió de preu que els productors fan a un any vista, en el moment de sembrar.

C) Suposem ara que la previsió de preu és simplement

$$\underline{p}(k+1) = p(k)$$

C.1) Deduïu l'equació en diferències que verifica $p(k)$, i resoleu-la per trobar la seva expressió en funció de k, p_0, p_e i de la constant $c = \frac{b}{a}$.

C.2) Discutiu l'evolució de $p(k)$ segons els valors de c.

En particular, determineu en quins casos tendeix cap al preu d'equilibri.

C.3) Representeu gràficament l'evolució anterior, sobre els gràfics de les funcions $d(p)$ i $s(p)$.

D) Suposeu ara una estratègia de previsió més complexa, segons la qual $\underline{p}(k+1)$ és el que resulta d'extrapolar linealment l'evolució dels dos últims anys. És a dir:

$$\underline{p}(k+1) = 2p(k) - p(k-1)$$

D.1) Determineu la nova equació en diferències que verifica $p(k)$.

D.2) Comproveu que el punt d'equilibri p_e n'és també una solució particular (constant).

D.3) Trobeu la solució general d'aquesta equació.

D.4) Deiscutiu per a quins valors de c el preu evoluciona cap al d'equilibri en aquestes noves circumstàncies.

◁ **Solució.**

(A) Demanda: $d(p) = d_0 - ap$, oferta: $s(p) = s_0 + bp$. En l'equilibri, l'oferta i la demanda s'han d'igualar en un preu estable, p_e, que no provoqui variacions en cap d'ells:

$$d_0 - a_p = s_0 + b_p \Longleftrightarrow p_e = \frac{d_0 - s_0}{a+b}.$$

(B) Una vegada produïda la collita de l'any k, la demanda l'absorbirà tota i fixarà el preu de venda d'aquell any. Posarem, per tant:

$$s(k) = d_0 - ap(k).$$

D'altra banda, si es preveu que el preu de l'any següent serà $\underline{p}(k+1)$, llavors es produirà segons la llei de l'oferta. Aleshores:

$$s(k+1) = s_0 + b\underline{p}(k+1),$$

que farà màxim els beneficis.

(C) Si $\underline{p}(k+1) = p(k)$, aleshores:

(C.1) $d_0 - ap(k+1) = s_0 + bp(k) \iff ap(k+1) + bp(k) + s_0 - d_0 = 0.$

Sigui $P(z) := \mathcal{Z}[p(k)](z)$. Aplicant la $\mathcal{Z}$-transformada a totes dues bandes de l'equació en diferències deduïda adalt s'obté:

$$azP(z) - ap(0)z + bP(z) = (az+b)P(z) - ap_0 z = (d_0 - s_0)\frac{z}{z-1},$$

on $p_0 = p(0)$. D'aquí,

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{d_0 - s_0}{a} \times \frac{z}{(z-1)(z-c)} + \frac{p_0 a}{a} \times \frac{z}{z+c} \\ &\overset{(\ddagger)}{=} \frac{d_0 - s_0}{a(a+b)} \times \frac{a+b}{1+c}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+c}\right) + \frac{p_0 z}{z+c} \\ &\overset{(\mathrm{A})}{=} p_e(1+c) \times \frac{1}{1+c}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z+c}\right) + \frac{p_0 z}{z+c}. \end{aligned}$$

amb la qual cosa tenim, finalment:

$$p(k) = \mathcal{Z}^{-1}[P(z)](k) = p_e\left(1 - (-c)^k\right) + p_0(-c)^k = p_e + (-1)^k(p_0 - p_e)c^k,$$

per $k \in \mathbb{N}$ i amb $c = b/a$.

(C.2) Distingirem els casos següents:

Primer cas: $c = \dfrac{b}{a} < 1 \Longrightarrow p(k) \to p_e$, quan $k \to \infty$.

Segon cas: $c = \dfrac{b}{a} = 1$, llavors: $\nexists \lim\limits_{k\to\infty} p(k)$, però com que $p(2k) = p_0$ i $p(2k-1) = 2p_e - p_0$ per $k = 1, 2, 3, \ldots$, llavors existeixen els límits d'oscil·lació: $\{p_0, 2p_e - p_0\}$; i així $\limsup\limits_k p(k) = \max\{p_0, 2p_e - p_0\}$ i $\liminf\limits_k p(k) = \min\{p_0, 2p_e - p_0\}$.

Tercer cas: $c = \dfrac{b}{a} > 1$, llavors $\nexists \lim\limits_{k\to\infty} p(k)$, ni tampoc existeixen límits d'oscil·lació finits.

(C.3) Els diagrames de teranyina per cadascun dels casos descrits a l'apartat anterior són els que es mostren a la figura 1.

(D) Ara $\underline{p}(k+1) = 2p(k) - p(k-1)$, llavors:

(D.1) $$\left.\begin{array}{rcl} s(k+1) &=& d_0 - ap(k+1) \\ s(k+1) &=& s_0 + 2bp(k) - bp(k-1) \end{array}\right\} \Longrightarrow ap(k+1) + 2bp(k) - bp(k-1) = d_0 - s_0,$$
per $k = 1, 2, 3, \ldots$

(D.2) $p(k) = p_e$ per tot $k = 1, 2, 3, \ldots$; d'on:

$$ap_e + 2bp_e - bp_e = (a+b)p_e = (a+b)\frac{d_0 s_0}{a+b} = d_0 - s_0.$$

(D.3) $azP(z) - azp(0) + 2bP(z) - b\dfrac{P(z)}{z} = (d_0 - s_0)\dfrac{z}{z-1} \Longrightarrow$

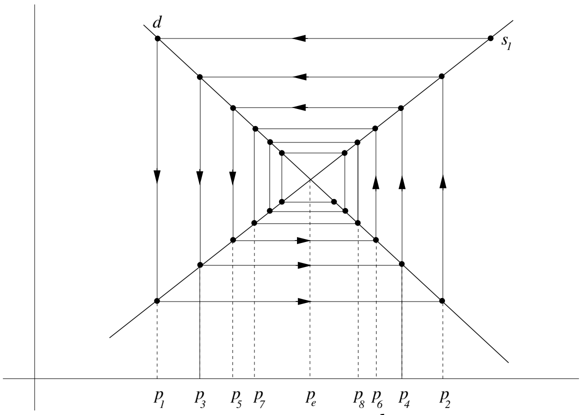
$$a\left(z + 2c - \frac{c}{z}\right)P(z) - ap_0 z = \frac{a}{z}(z - \lambda_+)(z - \lambda_-)P(z) - ap_0 z = (d_0 - s_0)\frac{z}{z-1}, \text{ on:}$$

$$p_0 = p(0), \qquad \lambda_\pm = -c \pm \sqrt{c^2 + c}, \qquad c = \frac{b}{a},$$

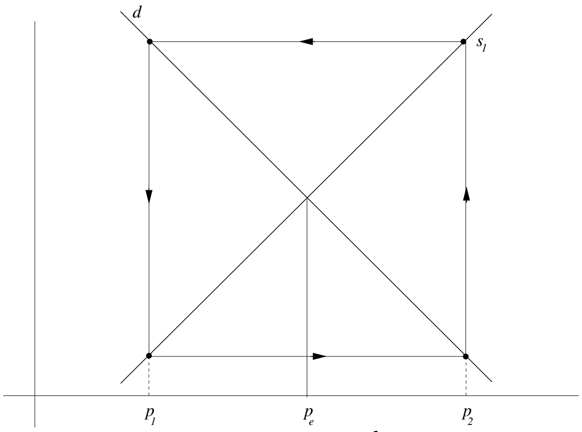
$(\ddagger)$Descomposició en fraccions simples:

$$\frac{1}{(z-1)(z-c)} = \frac{A}{z+c} + \frac{B}{z-1} = -\frac{1}{1+c} \times \frac{1}{z+c} + \frac{1}{1+c} \times \frac{1}{z-1}$$

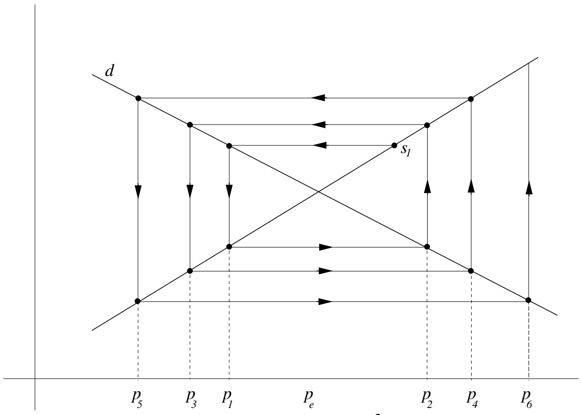
donat que de: $(z-1)A + (z+c)B = 1$ es té, per $z = 1$: $(1+c)B = 1 \Rightarrow B = \dfrac{1}{1+c}$ i per $z = -c$: $-(1+c)A = 1 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{1+c}$.



(a) **Primer cas:** $c = \dfrac{b}{a} < 1$.



(b) **Segon cas:** $c = \dfrac{b}{a} = 1$.



(c) **Tercer cas:** $c = \dfrac{b}{a} > 1$.

Figura 1

i aïllant $P(z)$ s'obté:

$$P(z) = \frac{d_0 - s_0}{a+b}(1+c)z\frac{z}{(z-1)(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)} + p_0 z\frac{z}{(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)}. \tag{8}$$

A continuació, per calcular l'antitransformada de $P(z)$ cal primer trobar la descomposició en fraccions simples de les funcions racionals que hi intervenen. Així:

$$\frac{z}{(z-1)(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-\lambda_+} + \frac{C}{z-\lambda_-} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (z-\lambda_+)(z-\lambda_-)A + (z-1)(z-\lambda_-)B + (z-1)(z-\lambda_+)C = z$$

i donant valors a z,

$$\begin{aligned}
z = \lambda_+ &: (\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)B = \lambda_+ \Longrightarrow B = \frac{\lambda_+}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)},\\
z = \lambda_- &: (\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)C = \lambda_- \Longrightarrow C = \frac{\lambda_-}{(\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)},\\
z = 1 &: (1 - \lambda_+)(1 - \lambda_-)A = 1 \Longrightarrow A = \frac{1}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_- - 1)}.
\end{aligned}$$

De la mateixa manera, per la segona fracció racional que apareix en l'expressió (8) per $P(z)$:

$$\frac{z}{(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)} = \frac{\widetilde{A}}{z-\lambda_+} + \frac{\widetilde{B}}{z-\lambda_-} \Longrightarrow (z-\lambda_-)\widetilde{A} + (z-\lambda_+)\widetilde{B} = z.$$

Com abans, trobem els valors dels coeficients indeterminats $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$ donant valors a z, i. e.:

$$\begin{aligned} z &= \lambda_+ &: \quad (\lambda_+ - \lambda_-)\widetilde{A} &= \lambda_+ &\Longrightarrow \quad \widetilde{A} &= \frac{\lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_-}, \\ z &= \lambda_- &: \quad (\lambda_- - \lambda_+)\widetilde{B} &= \lambda_- &\Longrightarrow \quad \widetilde{B} &= \frac{\lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+}. \end{aligned}$$

D'altra banda:

$$\begin{aligned} (\lambda_+ - 1)(\lambda_- - 1) &= (c - \sqrt{c^2+c} + 1)(c + \sqrt{c^2+c} + 1) \\ &= c + 1, \\ \lambda_+ - \lambda_- &= -c + \sqrt{c^2+c} + c + \sqrt{c^2+c} \\ &= 2\sqrt{c^2+c}. \end{aligned}$$

Així (8) es pot escriure com:

$$\begin{aligned} P(z) = p_e(1+c) &\left\{ \frac{1}{1+c} \times \frac{z}{z-1} + \frac{\lambda_+}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)} \times \frac{z}{z-\lambda_+} \right. \\ &\left. + \frac{\lambda_-}{(\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)} \times \frac{z}{z-\lambda_-} \right\} \\ &+ p_0 \left\{ \frac{\lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_-} \times \frac{z}{z-\lambda_+} + \frac{\lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+} \times \frac{z}{z-\lambda_-} \right\} \end{aligned}$$

i per últim, calculem l'antitransformada:

$$\begin{aligned} p(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[P(z)\right](k) &= p_e + \frac{(1+c)p_e}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)}\lambda_+^{k+1} + \frac{(1+c)p_e}{(\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)}\lambda_-^{k+1} \\ &\quad + \frac{p_0}{\lambda_+ - \lambda_-}\lambda_+^{k+1} + \frac{p_0}{\lambda_- - \lambda_+}\lambda_-^{k+1} \\ &= p_e + \left[\frac{(1+c)p_e}{(\lambda_+ - 1)(\lambda_+ - \lambda_-)} + \frac{p_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \right] \lambda_+^{k+1} \\ &\quad + \left[\frac{(1+c)p_e}{(\lambda_- - 1)(\lambda_- - \lambda_+)} + \frac{p_0}{\lambda_- - \lambda_+} \right] \lambda_-^{k+1}. \end{aligned}$$

Finalment doncs el preu, $p(k)$, vindrà donat per:

$$\begin{aligned} p(k) = p_e + (-1)^k &\left[\frac{(1+c)p_e}{2(c+1-\sqrt{c^2+1})\sqrt{c^2+c}} - \frac{p_0}{2\sqrt{c^2+c}} \right] \left(\sqrt{c^2+c} - c\right)^{k+1} \\ + (-1)^{k+1} &\left[\frac{(1+c)p_e}{2(c+1+\sqrt{c^2+1})\sqrt{c^2+c}} - \frac{p_0}{2\sqrt{c^2+c}} \right] \left(\sqrt{c^2+c} + c\right)^{k+1}, \end{aligned}$$

per $k = 1, 2, 3, \ldots$

(D.4) Temin que $|\lambda_+| < |\lambda_-|$ i perquè la solució tendeixi cap a l'equilibri cal que siguin < 1, i. e.:

$$0 < |\lambda_+| < |\lambda_-| = c + \sqrt{c^2+c} < 1,$$

o equivalentment:

$$0 < \sqrt{c^2+c} < 1 - c \Longleftrightarrow c^2 + c < 1 - 2c + c^2 \Longleftrightarrow 3c < 1,$$

i recordem que $c = b/a > 0$. O sigui, el preu tendirà cap a l'equilibri si i només si:

$$0 < c < \frac{1}{3}.\triangleright$$

10. Trobeu la llei de formació i el límit de la successió

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{12}{5}, \quad \frac{29}{12}, \quad \frac{70}{29}, \quad \frac{169}{70}, \ldots$$

$\triangleleft$ **Solució.** Clarament la llei de formació ve donada per:

$$\frac{a(k+2)}{b(k+2)} = \frac{a(k) + 2a(k+1)}{a(k+1)} = 2 + \frac{a(k)}{a(k+1)}.$$

És a dir:

$$a(k+2) = a(k) + 2a(k+1), \tag{9}$$

per $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ i amb $a(0) = 2, b(0) = 1, a(1) = 5, b(1) = a(0) = 2$; $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$. Sigui ara: $A(z) := \mathcal{Z}\left[a(k)\right](z)$; aplicant la $\mathcal{Z}$-transformada a totes dues bandes de (9) s'obté,

$$z^2 A(z) - z^2 a(0) - za(1) = A(z) + 2zA(z) - 2za(0) \iff (z^2 - 2z - 1)A(z) = z(2z + 1).$$

A continuació, aïllant $A(z)$ i descomposant en fraccions simples,

$$A(z) = z\frac{2z+1}{(z-(1+\sqrt{2}))(z-(1-\sqrt{2}))} = \frac{4+3\sqrt{2}}{4} \times \frac{z}{z-(1+\sqrt{2})} + \frac{4-3\sqrt{2}}{4} \times \frac{z}{z-(1-\sqrt{2})}$$

i calculem la transformada inversa:

$$a(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[A(z)\right](k) = \frac{4+3\sqrt{2}}{4} \times (1+\sqrt{2})^k + \frac{4-3\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^k.$$

Aleshores els termes de la successió,

$$c(0) = \frac{a(0)}{b(0)} = \frac{2}{1}, \quad c(1) = \frac{a(1)}{b(1)} = \frac{5}{2} \ldots, c(k) = 2 + \frac{a(k-2)}{a(k-1)}, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots$$

vidran donats explícitament per:

$$c(k) = 2 + \frac{a(k-2)}{a(k-1)} = 2 + \frac{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{k-2}\left\{1 + \left(12\sqrt{2}-17\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)^{k-2}\right\}}{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^{k-1}\left\{1 + \left(12\sqrt{2}-17\right)\left(2\sqrt{2}-17\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)^{k-1}\right\}},$$

per $k = 2, 3, 4, \ldots$ Finalment:

$$c(0) = \frac{2}{1}, \quad c(1) = \frac{5}{2}; \quad c(k) = 2 + \frac{1 + \left(12\sqrt{2}-17\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)^{k-2}}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left\{1 + \left(12\sqrt{2}-17\right)\left(2\sqrt{2}-3\right)^{k-1}\right\}}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

i com que $0 < \left|2\sqrt{2} - 3\right| = 0{,}171\,57\cdots < 1$, resulta:

$$\lim_k c(k) = 2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.\triangleright$$

11. (NÚMEROS DE FIBONACCI)
Considereu els números de Fibonacci F_k definits per

$$F_1 = F_2 = 1,$$
$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \qquad k \geq 2.$$

a) Trobeu una fòrmula explícita de F_k, en funció de k.

b) Calculeu $\lim_k \frac{F_{k+1}}{F_k}$ ("relació aúria").

c) Demostreu que

$$F_1^2 + \cdots + F_k^2 = F_k F_{k+1}.$$

(Nota: per a (b) i (c), no cal utilitzar (a)).

◁ **Solució.** *(a)* Equivalentment, s'escriurà[1]:

$$F(k+2) = F(k+1) + F(k), \tag{10}$$

per $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ i amb

$$F(0) = 0, \qquad F(1) = 1. \tag{11}$$

Sigui $f(z) = \mathcal{Z}\left[F(k)\right](z)$; llavors, aplicant la $\mathcal{Z}$-transformada a tots dos costats de (10) i tenint en compte les condicions inicials (11) s'obté:

$$z^2 f(z) - z^2 F(0) - zF(1) - zf(z) + zF(0) - f(z) = (z^2 - z - 1)f(z) = z,$$

d'on, aïllant la $\mathcal{Z}$-transformada $f(z)$:

$$f(z) = z\frac{z}{\left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{z/\sqrt{5}}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z/\sqrt{5}}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

i a continuació, per trobar $F(k)$,, calculem l'antitransformada:

$$F(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[f(z)\right](k) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(b) Claculem el límit

$$\lim_k \frac{F(k+1)}{F(k)} = \lim_k \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{k+1}\right]}{\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{k}\right]} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Aquest valor és l'anomenat "nombre d'or", "relació aúria" o "proporció aúria".

Remarca 1.4. Tal com diu l'enunciat, per fer aquest apartat no calen els resultats de l'apartat *(a)*. En efecte, si definim $a_k = F_{k+1}/F_k$, per $k = 1, 2, 3, \dots$; de la relació de recurrència del números de Fibonacci i dels seus valors inicials, es dedueix:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{k+1} &= 1 + \frac{1}{a_k}, \qquad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \tag{12}$$

D'aquí, per induccció, es demostra (exercici) que la subsuccessió parella, a_{2k}, és monòtona decreixent i acotada inferiorment mentre que la subsuccessió senar, a_{2k+1}, és monòtona creixent i acotada superiorment i llavors totes dues són convergents. Siguin ℓ_1 i ℓ_2 els seus respectius límits, i. e.:

$$\ell_1 = \lim_k a_{2k}, \qquad \ell_2 = \lim_k a_{2k+1}$$

amb $\ell_1, \ell_2 > 0$, com es comprova d'immediat. Així, si prenem límits en (12):

$$\begin{aligned} \lim_k a_{2k+2} &= \lim_k \left(1 + \frac{1}{a_{2k+1}}\right) \Longrightarrow \ell_1 = 1 + \frac{1}{\ell_2} \Longleftrightarrow \ell_1\ell_2 = \ell_2 + 1, \\ \lim_k a_{2k+1} &= \lim_k \left(1 + \frac{1}{a_{2k}}\right) \Longrightarrow \ell_2 = 1 + \frac{1}{\ell_1} \Longleftrightarrow \ell_1\ell_2 = \ell_1 + 1 \end{aligned}$$

i igualant queda clar que $\ell_1 = \ell_2 = \ell$, on ℓ és ara l'arrel positiva de l'equació $x^2 - x - 1 = 0$. Resumint:

$$\ell = \lim_k a_k = \lim_k a_{2k} = \lim_k a_{2k+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

[1]En aquest apartat i al següent farem servir la notació habitual, posant $F_1 = F(1), F_2 = F(2), \dots, F_k = F(k), \dots$

(c) Per inducció: veiem que és cert per $k = 1$. En efecte $F_1^2 = 1 = F_1 F_2$. Suposem a continuació que és cert per $k = m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ (hipòtesi d'inducció) i comprovarem que també es satisfà per $k = m + 1$:

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_m^2 + F_{m+1}^2 = F_m F_{m+1} + F_{m+1}^2 = (F_m + F_{m+1})F_{m+1} = F_{m+1} + F_{m+2}.$$

On s'ha aplicat, al primer pas, la hipòtesi d'inducccció i a l'últim pas, la relació de recurrència (10). Veiem així que la relació:

$$F_1^2 + \cdots + F_k^2 = F_k F_{k+1},$$

es satisfà per tot $k \in \mathbb{N}$.$\triangleright$