Desenvolupaments en sèrie

Problemes

1. Trobeu els desenvolupaments en sèrie a l'origen de

(a) $f(x) = \arcsin x$,
(b) $f(x) = \text{argsinh } x$,
(c) $f(x) = \arctan x$,
(d) $f(x) = \text{argtanh } x$.

◁ **Solució.** *(a)* desenvoluparem la seva funció derivada, $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, fent ús del desenvolupament de la funció binòmica i després obtindrem el desenvolupament de $f(x)$ per integració. Així:

$$f'(x) = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-1/2}{p} (-x^2)^p \tag{1}$$

on calculant els coeficients binomials a partir de la seva definició, s'obté:

$$\binom{-1/2}{0} = 1, \qquad \binom{-1/2}{1} = -\frac{\frac{1}{2}}{1!}, \qquad \binom{-1/2}{2} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2!} = \frac{1\cdot 3}{2!\cdot 2^2}, \dots$$

i es pot demostrar per inducció que, per $p \in \mathbb{N}$ ($p = 1, 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{p} &= \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\dots(-\frac{1}{2}-p+1)}{p!} \\ &= (-1)^p \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot (2p-1)}{p!\cdot 2^p} = (-1)^p \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \end{aligned} \tag{2}$$

on s'ha fet servir que $2^p p! = (2p)!!$ per $p \in \mathbb{N}$, com també és comprova per inducció. Amb l'expressió de dalt pels coeficients binomials, la sèrie (1) es pot escriure com:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3!!}{4!!}x^4 + \frac{5!!}{6!!}x^6 + \dots + \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}x^{2p} + \dots \tag{3}$$

per $-1 < x < 1$ i és clar que:

$$F(x) = x + \frac{1!!}{3\cdot 2!!}x^3 + \frac{3!!}{5\cdot 4!!}x^5 + \frac{5!!}{7\cdot 6!!}x^7 + \dots + \frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!}x^{2p+1} + \dots$$

és una primitiva de (3) amb $F(0) = 0$. Aleshores, necessàriament: $F(x) - F(0) = \arcsin x - \arcsin 0$ per $-1 < x < 1$ d'on: $\arcsin x = F(x) + \arcsin 0 = F(x)$ en aquest interval (com a mínim). Finalment, el desenvolupament resulta:

$$\begin{aligned}\arcsin x &= x + \frac{1!!}{3\cdot 2!!}x^3 + \frac{3!!}{5\cdot 4!!}x^5 + \frac{5!!}{7\cdot 6!!}x^7 + \cdots + \frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!}x^{2p+1} + \dots \\ &= x + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!}x^{2p+1}, \qquad \text{per } -1 < x < 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Remarca 1.1. L'interior del camp de validesa (l'interval $-1 < x < 1$) s'ha deduït del camp de validesa del desenvolupament de la sèrie binòmica fent servir que: *(i)* per tota sèrie de potències amb radi de convergència positiu, $r > 0$ —i que per tant defineix una funció suma, $S(x)$, a l'interval $(-r, r)$—, els radis de convergència de les sèries derivades (i. e., les obtingudes per derivació "terme a terme") són els mateixos i iguals al radi de convergència, r, de la sèrie; *(ii)* a més, a l'interval de convergència $(-r, r)$, les funcions suma de les successives sèries derivades coincideixen amb les derivades successives de la funció suma $(S'(x), S''(x), \dots)$.

Per discutir la validesa del desenvolupament (4) als extrems de l'interval, i. e., a $x = \pm 1$, substituïm x per 1 a (4) i veiem d'una banda que la corresponent sèrie numèrica:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p = 1 + \frac{1!!}{3\cdot 2!!} + \frac{3!!}{5\cdot 4!!} + \frac{5!!}{7\cdot 6!!} + \cdots + \frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!} + \dots$$

és convergent. Per exemple aplicant el criteri de Raabe[(1)]:

$$\begin{aligned}&\lim_{p\to\infty}\left(1 - \frac{a_{p+1}}{a_p}\right)p = \\ &= \lim_{p\to\infty}\left(1 - \frac{(2p+1)!!}{(2p+3)(2p+2)!!} \times \frac{(2p+1)(2p)!!}{(2p-1)!!}\right)p = \lim_{p\to\infty}\left(1 - \frac{(2p+1)^2}{(2p+3)(2p+2)}\right)p = \\ &= \lim_{p\to\infty} \frac{(6p+5)p}{(2p+3)(2p+2)} = 3/2 > 1 \Longrightarrow \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!} \text{ convergent}\end{aligned}$$

(anàlogament per $x = -1$, on només canvia el signe de tots els termes de la sèrie i per tant el de la seva suma). D'altra banda, com que la funció $f(x) = \arcsin x$ és contínua per la dreta i per l'esquerra en $x = -1$ i $x = 1$, l'aplicació del teorema d'Abel porta a:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} \arcsin x &= 1 + \frac{1!!}{3\cdot 2!!} + \frac{3!!}{5\cdot 4!!} + \frac{5!!}{7\cdot 6!!} + \cdots + \frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!} + \cdots = \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x\to -1^+} \arcsin x &= -1 - \frac{1!!}{3\cdot 2!!} - \frac{3!!}{5\cdot 4!!} - \frac{5!!}{7\cdot 6!!} - \cdots - \frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!} - \cdots = -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

d'on es conclou "l'ampliació" del camp de convergència del desenvolupament (4) al extrems de l'interval. És a dir, el camp de validesa del desenvolupament (4) ve donat per l'interval (tancat): $-1 \le x \le 1$.

(b) Procedim de manera anàloga a l'apartat anterior: es desenvolupa la funció derivada $f'(x) = \mathrm{D}(\operatorname{argsinh} x) = (1 + x^2)^{-1/2}$ a partir del desenvolupament de la funció binòmica:

$$\begin{aligned}(1+x^2)^{-1/2} &= 1 - \frac{1!!}{2!!}x^2 + \frac{3!!}{4!!}x^4 - \frac{5!!}{6!!}x^6 + \cdots + (-1)^p\frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}x^{2p} + \dots \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}x^{2p}, \qquad \text{per } -1 < x < 1\end{aligned} \tag{5}$$

---

(1) *Criteri de Raabe:* sigui $\sum_{p\ge 0} a_p$ una sèrie de termes positius. Si existeix el límit L:

$$L = \lim_{p\to\infty}\left(1 - \frac{a_{p+1}}{a_p}\right)p,$$

llavors $\sum_{p\ge 0} a_p$ convergeix si $L > 1$ i divergeix si $L < 1$.

(aquí s'ha "aprofitat" l'expressió (2) dels coeficients binomials deduïda a l'apartat *(a)*). Sigui $F(x)$ la funció suma de la seva primitiva (i. e., de la sèrie obtinguda de la de dalt integrada "terme a terme"). Llavors:

$$\begin{aligned} F(x) &= x - \frac{1!!}{3\cdot 2!!}x^3 + \frac{3!!}{5\cdot 4!!}x^5 - \frac{5!!}{7\cdot 6!!}x^7 + \cdots + (-1)^p\frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!}x^{2p+1} + \ldots, \\ &= x + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!}x^{2p+1}, \qquad \text{per } -1 < x < 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Així doncs $F(x)$ i $\operatorname{argsinh} x$ són, a l'interval $(-1,1)$, funcions primitives de la funció suma de la sèrie (5), i. e., de $f'(x) = (1+x^2)^{-1/2}$. Llavors, per $x \in (-1,1)$

$$\operatorname{argsinh} x - \operatorname{argsinh} 0 = F(x) - F(0) \Longrightarrow \operatorname{argsinh} x = x + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!}x^{2p+1}$$

puix, en aquest cas: $F(0) = 0$ i $\operatorname{argsinh} 0 = 0$. Com a l'apartat *(a)*, la validesa del desenvolupament pels extrems de l'interval es segueix de la convergència de la sèrie numèrica corresponent a substituir x per 1 (per -1) a (6). Això produeix, per $x = 1$, una sèrie alternada de la forma $\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p a_p$ ($\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^{p+1}a_p$, per $x = -1$) amb:

$$a_0 = 1, \qquad a_p = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2p-1}{2p}\times\frac{1}{2p+1}, \qquad \text{per } p = 1,2,3,\ldots$$

on clarament es veu que $a_{p+1} < a_p$ per $p = 0,1,2,3,\ldots$ i a més que $\lim_{p\to\infty} a_p = 0$. Per tant $a_p \searrow 0$ i així aquestes sèries numèriques són convergents (ja que són alternades amb a_p convergint decreixentment cap a zero). Com que d'altra banda, la funció $\operatorname{argsinh} x$ és contínua per la dreta i per l'esquerra respectivament a -1 i a 1, el teorema d'Abel ens assegura que

$$\begin{aligned} \operatorname{argsinh} 1 &= \lim_{x\to 1^-} \operatorname{argsinh} x = 1 + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!} = \ln(1+\sqrt{2}), \\ \operatorname{argsinh}(-1) &= \lim_{x\to -1^+} \operatorname{argsinh} x = -1 + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!} = \ln(-1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

on per obtenir els valors (numèrics) de la dreta també hem aplicat la fórmula:

$$\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

per $x = 1$ i $x = -1$ respectivament. En resum, el desenvolupament esdevé:

$$\begin{aligned} \operatorname{argsinh} x &= x - \frac{1!!}{3\cdot 2!!}x^3 + \frac{3!!}{5\cdot 4!!}x^5 - \frac{5!!}{7\cdot 6!!}x^7 + \cdots + (-1)^p\frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!}x^{2p+1} + \ldots \\ &= x + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{(2p-1)!!}{(2p+1)(2p)!!}x^{2p+1}, \end{aligned}$$

per $-1 \le x \le 1$.

(c) Els passos són els mateixos que els dels apartats *(a)* i *(b)*. En els dos últims apartats d'aquest problema, farem essencialment el mateix però des d'una manera molt més "pràctica", sense tots els detalls formals descrits dalt. En primer lloc, el desenvolupament en sèrie de la derivada i el seu camp de validesa es dedueix de l'expressió per la funció suma de la sèrie geomètrica. En efecte:

$$\mathrm{D}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^p x^{2p} + \cdots = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p x^{2p},$$

per $-1 < x < 1$. A continuació, integrant terme a terme:

$$\arctan x = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \cdots = c + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}x^{2p+1},$$

per $-1 < x < 1$. Aquí, c és la "constant d'integració". Per determinar-la només cal avaluar la sèrie a $x = 0$ i tenir en compte que el valor de la suma ha de coincidir amb el de la funció en el mateix punt; o sigui: $c = \arctan 0 = 0$. Tanmateix, als extrems de l'interval, $x = \pm 1$, la sèrie coincideix amb la sèrie harmònica alternada i per tant convergeix. Com que d'altra banda la funció $\arctan x$ és contínua en aquests punts, pel teorema d'Abel es té:

$$\lim_{x\to 1^-} \arctan x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}, \tag{7}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \arctan x = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p+1} = -\frac{\pi}{4}. \tag{8}$$

Amb tot això, el desenvolupament en sèrie de potències de la funció $f(x) = \arctan x$ en $x = 0$ és:

$$\begin{aligned} \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \ldots, \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1}, \end{aligned} \tag{9}$$

amb camp de validesa: $-1 \le x \le 1$.

(d) Com a l'apartat anterior, el desenvolupament en sèrie a l'origen de la funció derivada $f'(x) = \mathrm{D}(\text{argtanh } x)$ i el seu camp de validesa s'obtenen de l'expressió de la funció suma de la sèrie geomètrica:

$$\mathrm{D}(\text{argtanh } x) = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2p} + \cdots = \sum_{p=0}^{\infty} x^{2p},$$

per $-1 < x < 1$. A continuació, integrant:

$$\text{argtanh } x = c + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \ldots,$$

per $-1 < x < 1$, amb la constant d'integració $c = \text{argtanh } 0 = 0$. En aquest cas, la sèrie de potències és divergent (coincideix amb la sèrie harmònica) tant a $x = 1$ com a $x = -1$. No hi ha doncs convergència als extrems de l'interval. El desenvolupament en sèrie de potències a l'origen de la funció $f(x) = \text{argtanh } x$ s'escriu llavors:

$$\text{argtanh } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \cdots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}, \tag{10}$$

per $-1 < x < 1$. ▷

2. Feu el desenvolupament en sèrie de

$$f(x) = \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

a l'origen. Determineu el radi de convergència.

◁ **Solució.** Derivant la funció i fent servir la funció suma de la sèrie geomètrica, s'obté:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} \times \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x}{2+2x^4} = \frac{-2x}{1+x^4} \\ &= -2x \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p x^{4p} = 2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} x^{4p+1} = 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p x^{4p-3}, \end{aligned}$$

per $-1 < x < 1$. Per integració terme a terme:

$$f(x) = c + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{4p-2}}{2p-1}, \tag{11}$$

per $-1 < x < 1$ i on la constant d'integració, c, és ara: $c = \arctan 1 = \pi/4$. Pel que fa a la validesa del desenvolupament als extrems, es veu clar que tant a $x = 1$ com a $x = -1$, les corresponents sèries numèriques coincideixen (notem que la funció és parella) en una sèrie alternada, en concret, per $x = \pm 1$ es té la sèrie numèrica:

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p = \frac{\pi}{4} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p-1}$$

que és convergent, ja que $a_p = \dfrac{1}{2p+1} \searrow 0$ (veure els comentaris al problema 1(b)); com que a més, la funció $f(x)$ és contínua en $x = \pm 1$, el teorema d'Abel porta doncs a:

$$f(\pm 1) = \lim_{x \to \pm 1^{\mp}} \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p-1} = 0 \Longrightarrow \frac{\pi}{4} = -\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p-1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

(compareu amb (7)) i aleshores el desenvolupament (11) és vàlid també en els extrems de l'interval, $x = \pm 1$. Finalment doncs, el desenvolupament de la funció a l'origen és:

$$\arctan \frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - x^2 + \frac{x^6}{3} - \frac{x^{10}}{5} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{4p-2}}{2p-1} + \cdots = \frac{\pi}{4} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{4p-2}}{2p-1}, \quad \text{per } -1 \le x \le 1. \triangleright$$

3. Trobeu el desenvolupament en sèrie de la funció

$$f(x) = \frac{1}{2x} - \sqrt{\frac{1}{4x^2} - 1},$$

per $x > 0$. Comproveu que la suma de la sèrie no coincideix amb la funció donada.

$\triangleleft$ **Solució.** Aplicant el desenvolupament en sèrie de la funció binòmica tenim, per $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2x} - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2\sqrt{x^2}} \overset{(x>0)}{=} \frac{1-(1-4x^2)^{1/2}}{2x} = \frac{1}{2x}\left(1 - \sum_{p=0}^{\infty} \binom{1/2}{p} (-4x^2)^p\right) \\ &= x + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^p (2p-1)!!}{(p+1)!} x^{2p+1}. \end{aligned}$$

On s'ha fet servir l'expressió dels coeficients binomials, els quals es calculen com ja vàrem fer al problema **1***(a)*. En efecte, a partir de la definició:

$$\binom{1/2}{0} = 1, \quad \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!} = -\frac{1!!}{2^2 \cdot 2!}, \quad \binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!} = \frac{3!!}{2^3 \cdot 3!}, \dots$$

i es comprova per inducció que la fórmula general per aquests coeficients ve donada per:

$$\binom{1/2}{0} = 1, \qquad \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \binom{1/2}{p} = (-1)^{p+1} \frac{(2p-3)!!}{2^p p!}, \quad \text{per } p = 2, 3, \dots \tag{12}$$

Tot això però, és per $0 < x < 1$, i. e.: tenim la sèrie de $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}$. En canvi, si $x < 0$ és:

$$f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2x} = \frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x} \neq \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x}.$$

Aleshores f no és desenvolupable en sèrie de potències a cap entorn de l'origen. $\triangleright$

Remarca 1.2. Notem que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, però $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$. És a dir, $f(x)$ no és ni tan sols contínua en $x = 0$ i conseqüentment, no pot ser desenvolupable en sèrie de potències a cap entorn de l'origen.

4. Trobeu el desenvolupament en sèrie de $f(x) = x\sqrt{1-2x^2}$. Trobeu el terme general i el radi de convergència.

◁ **Solució.** Per la fórmula del binomi, amb els coeficients binomials donats per (12):

$$f(x) = x\sqrt{1-2x^2} = x(1-2x^2)^{1/2} = x\sum_{p=0}^{\infty}\binom{1/2}{p}(-2x^2)^p = x - x^3 - \sum_{p=2}^{\infty}\frac{(2p-3)!!}{p!}x^{2p+1} =$$
$$= x - x^3 - \frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{2}x^7 - \frac{5}{8}x^9 - \frac{7}{8}x^{11} - \frac{21}{16}x^{13} - \frac{33}{16}x^{15} - \frac{429}{128}x^{17} - \frac{715}{128}x^{19} - \frac{2431}{256}x^{21} - \dots,$$

vàlida per $x : |2x^2| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pel que fa a la validesa del desenvolupament als extrems, haurem d'estudiar primer la convergència de la sèrie numèrica: $\displaystyle\sum_{p=2}^{\infty}\frac{(2p-3)!!}{2^p p!}$. De fet, pel criteri de Raabe (veure nota al problema **1**(*a*)) es veu que convergeix. En efecte:

$$\lim_{p\to\infty}\left(1-\frac{a_{p+1}}{a_p}\right)p = \lim_{p\to\infty}\left(1-\frac{(2p-1)!!}{(2p-3)!!}\times\frac{2^p p!}{2^{p+1}(p+1)!}\right)p$$
$$= \lim_{p\to\infty}\left(1-\frac{2p-1}{2(p+1)}\right)p = \lim_{p\to\infty}\frac{3p}{2(p+1)} = \frac{3}{2} > 1.$$

D'altra banda, la funció $f(x) = x\sqrt{1-2x^2}$ és contínua per l'esquerra i per la dreta respectivament en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Aleshores, pel teorema d'Abel, el camp de validesa del desenvolupament trobat inclou els extrems i resulta: $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. ▷

5. Feu el desenvolupament de

$$f(x) = \frac{x+60}{x^3-10x^2+31x-30}$$

a l'origen.

◁ **Solució.** Com a primer pas descomposarem la funció racional $f(x)$ en fraccions simples. Fent els càlculs:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+60}{x^3-10x^2+31x-30} = \frac{x+60}{(x-5)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} = \frac{-65/6}{5(1-x/5)}+\frac{-62/3}{2(1-x/2)}+\frac{63/2}{3(1-x/3)}. \end{aligned} \tag{13}$$

A continuació, podem desenvolupar cadascuna d'aquestes les fraccions usant la fórmula de la suma de la sèrie geomètrica. Explícitament:

$$\frac{1}{1-x/5} = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^p, \qquad \frac{1}{1-x/2} = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^p, \qquad \frac{1}{1-x/3} = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^p.$$

Combinant aquest desenvolupaments amb la descomposició en (13) trobem el desenvolupament de la funció donada:

$$\frac{x+60}{x^3-10x^2+31x-30} = \sum_{p=0}^{\infty}\left(-\frac{65}{30\cdot 5^p}-\frac{62}{6\cdot 2^p}+\frac{63}{6\cdot 3^p}\right)x^p,$$

per $-2 < x < 2$. Es comprova d'immediat que fora d'aquest interval la sèrie divergeix (el terme general de la corresponent sèrie numèrica no tendeix cap a zero: i. e., per $|x| \ge 2$ no es satisfà la condició necessària de convergència de Cauchy). ▷

6. Trobeu el desenvolupament en sèrie de $f(x) = \ln(1+x+x^2)$.

◁ **Solució.** Per trobar el desenvolupament de $\ln(1+x+x^2)$ aplicarem el desenvolupament de $\ln(1-t)$:

$$\mathrm{D}(\ln(1-t)) = \frac{-1}{1-t} = -1-t-t^2-t^3-\dots-t^p-\dots,$$

per $-1 < t < 1$. Per integració terme a terme, obtenim:

$$\begin{aligned}\ln(1-t) &= \ln 1 + \int_0^t \frac{-\mathrm{d}u}{1-u} = \ln 1 + \int_0^t (-1-u-u^2-\cdots-u^p-\dots)\mathrm{d}u \\ &= -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} - \cdots - \frac{t^{p+1}}{p+1} - \cdots = -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{p+1}}{p+1}, \qquad (14)\end{aligned}$$

per $-1 \le t < 1$. Comentari: en $t = -1$ el desenvolupament de dalt també és vàlid perquè la sèrie convergeix en $t = -1$ (la sèrie numèrica coincideix amb la harmònica alternada) i la funció $\ln(1-t)$ és contínua per la dreta en $t = -1$. Notem que, en particular:

$$\lim_{t\to -1^+} \ln(1-t) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^p}{p+1} + \cdots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} = \ln 2.$$

Amb tot això, el desenvolupament a l'origen de $\ln(1+x+x^2)$ es pot obtenir fent

$$\begin{aligned}f(x) = \ln(1+x+x^2) = \ln\frac{1-x^3}{1-x} = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = -\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{3p+3}}{3p+3} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{p+1}}{p+1} = \\ = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{8}x^8 - \frac{2}{9}x^9 + \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{6}x^{12} + \dots\end{aligned}$$

Aquest desenvolupament també es pot expressar com[(2)]:

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p x^p, \quad \text{amb} \quad a_p = \begin{cases} \frac{1}{p}, & \text{si } p \neq \dot{3}, \\ -\frac{2}{p}, & \text{si } p = \dot{3}, \end{cases} \qquad (15)$$

($\mathbb{N} \ni p \ge 1$). Per construcció, el desenvolupament obtingut és vàlid almenys per a $-1 < x < 1$ i per tant el radi de convergància, r, és $r \ge 1$. De fet, un càlcul directe prova que:

$$\frac{1}{r} = \limsup \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_{p\to\infty}\left(\frac{2}{p}\right)^{1/p} = 1.$$

Per discutir la validesa del desenvolupament obtingut als extrems de l'interval, calculem en primer lloc la successió de sumes parcials de la sèrie $\sum_{p\ge 1} a_p$, on els coeficients a_p són els especificats a (15):

$$\begin{aligned}&A_1 = 1,\ A_2 = 1 + \frac{1}{2}\ A_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3},\ A_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},\ A_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \\ &A_6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},\ A_7 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7},\ A_8 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \\ &A_9 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9},\ A_{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}, \dots\end{aligned}$$

d'on es comprova per inducció que:

$$A_{3k} = \sum_{p=k}^{3k-1} \frac{1}{p+1}, \quad A_{3k+1} = A_{3k} + \frac{1}{3k+1}, \quad A_{3k+2} = A_{3k} + \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2},$$

per $k = 0, 1, 2, \dots$ si posem $A_0 = 0$, i notem que aquestes tres subsuccessions A_{3k}, A_{3k+1}, A_{3k+2} recobreixen tota la successió de sumes parcials A_k (això és, qualsevol terme de la successió de sumes parcials hi figura en alguna de les subsuccessions). D'altra banda:

$$\ln\left(\frac{3k+1}{k+1}\right) = \int_k^{3k} \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \le A_{3k} = \sum_{p=k}^{3k-1} \frac{1}{p+1} \le \int_{k-1}^{3k-1} \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln\left(\frac{3k}{k}\right) = \ln 3$$

d'on, pel "lema de l'entrepà":

$$\lim_{k\to\infty} A_{3k} = \ln 3 \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} A_{3k+1} = \lim_{k\to\infty} A_{3k+2} = \ln 3$$

(2)Notació: $p = \dot{m}$ es llegeix com "p és múltiple de m".

i d'acord amb el que hem comentat en el paràgraf antrior sobre el recobriment de la successió A_k per les tres subsuccessions $A_{3k}, A_{3k+1}, A_{3k+2}$, es dedueix:

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \sum_{k\geq 1} a_k = \ln 3.$$

De la mateixa menera, si $B_k = \sum_{p=1}^{k} b_p$ és:

$$\begin{aligned}
B_1 &= -1\\
B_2 &= -1+\frac{1}{2},\\
B_3 &= \left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+1,\\
B_4 &= \left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+1+\frac{1}{4},\\
B_5 &= \left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{5},\\
B_6 &= \left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right),\\
B_7 &= \left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{7},\\
B_8 &= \left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{7}+\frac{1}{8},\\
B_9 &= \left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right),\\
&\vdots\\
B_{3k} &= \sum_{p=1}^{3k}\frac{(-1)^p}{p}-\sum_{p=1}^{k}\frac{(-1)^p}{p},\\
B_{3k+1} &= \sum_{p=1}^{3k}\frac{(-1)^p}{p}-\sum_{p=1}^{k}\frac{(-1)^p}{p}+\frac{(-1)^{3k+1}}{3k+1},\\
B_{3k+1} &= \sum_{p=1}^{3k}\frac{(-1)^p}{p}-\sum_{p=1}^{k}\frac{(-1)^p}{p}+\frac{(-1)^{3k+1}}{3k+1}+\frac{(-1)^{3k+2}}{3k+2},
\end{aligned}$$

Com al cas anterior, les tres subsuccessions B_{3k}, B_{3k+1} i B_{3k} recobreixen la successió de sumes parcials B_k. Per això:

$$\lim_{k\to\infty} B_{3k} = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{p=1}^{3k}\frac{(-1)^p}{p}-\sum_{p=1}^{k}\frac{(-1)^p}{p}\right) = 0 = \lim_{k\to\infty} B_{3k+1} = \lim_{k\to\infty} B_{3k+2} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} B_k = \sum_{k\geq 1} b_p = 0,$$

(recordem que la sèrie $\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p}{p}$ és convergent, per tant les seves sumes parcials són una successió de Cauchy).

Es veu d'immediat que, en substituir al desenvolupament trobat a l'apartat (a) x per 1 i per -1 les sèries numèriques que s'obtenen coincideixen respectivament amb les sèries $\sum_{p\geq 1} a_p$ i $\sum_{p\geq 1} b_p$ especificades a l'apartat (b). Com que la funció $\ln(1+x+x^2)$ és contínua per $x=\pm 1$, pel teorema d'Abel és:

$$\lim_{x\to 1^-}\ln(1+x+x^2) = \sum_{p\geq 1} a_p = \ln 3,$$

$$\lim_{x\to -1^+}\ln(1+x+x^2) = \sum_{p\geq 1} b_p = 0.$$

En conseqüència, el camp de validesa inclou també els extrems de l'interval. Així, el desenvolupament és vàlid per: $-1 \leq x \leq 1$. ▷

7. Trobeu el desenvolupament en sèrie de $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$.

◁ **Solució.** Tenint en compte la identitat trigonomètrica $\sin^2 z = \dfrac{1-\cos 2z}{2}$, que $\cos z$ ve definida per la sèrie:

$$\cos z = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{10}}{10!} + \ldots, \quad z \in \mathbb{C}$$

i les operacions amb sèries de potències, s'obté el desenvolupament:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1-\cos 2x}{2x^2} = \frac{1}{2x^2}\left(1 - \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{2p}(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2^{2p+1}}{(2p+2)!} x^{2p} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{45}x^4 - \frac{1}{315}x^6 + \frac{2}{14175}x^8 - \frac{2}{467775}x^{10} + \frac{4}{42567525}x^{12} - \frac{1}{638512875}x^{14} + \ldots,$$

per $x \in \mathbb{R}$. ▷

8. A partir del desenvolupament en sèrie de potències a l'origen de $\ln(1-x)$:

(a) Calculeu el desenvolupament en sèrie de potències a l'origen (incloent el terme general) de la funció

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

(b) Deduïu el de la funció

$$g(x) = \frac{1 + \ln(1-x)}{1-x}.$$

(c) Ídem. el de la funció

$$h(x) = \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}$$

(Suggeriment: relacioneu-la, per primitivització amb alguna de les anteriors).

◁ **Solució.** *(a)* Multipliquem el desenvolupament de $\ln(1-x)$ obtingut al problema 6 (fórmula (14)) pel desenvolupement en sèrie de potències a l'origen de $(1-x)^{-1}$:

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^p + \ldots\right)\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^p}{p} - \ldots\right)$$

$$= -\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}\right) x^p$$

on hem fet el producte (de convolució) de les dues sèries. Atès que el radi de convergència de la sèrie producte no és més petit que el mínim dels radis de convergència; com que en aquest cas, els radis de convergància de totes dues sèries són 1 i la sèrie producte

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}\right) x^p,$$

divergeix per $x = \pm 1$, el desenvolupament serà vàlid per $-1 < x < 1$.

(b) Basant-nos en el desenvolupament de l'apartat *(a)*:

$$g(x) = \frac{1 + \ln(1-x)}{(1-x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \sum_{p=0}^{\infty} x^p - \sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}\right) x^p = \sum_{p=0}^{\infty} b_p x^p,$$

amb

$$b_0 = 1; \qquad b_1 = 0; \qquad b_p = \sum_{n=2}^{p} \frac{1}{n}, \quad \mathbb{N} \ni p \geq 2$$

i vàlid per $-1 < x < 1$.

(c) Derivant $g(x)$ i desenvolupant en sèrie la derivada es veu que

$$g'(x) = \frac{-1 + 1 + \ln(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2} = h(x)$$

Per tant en desenvolupament en sèrie de potències a l'origen de $h(x)$ vindrà donat per

$$h(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p x^p,$$

amb

$$c_0 = b_1 = 0; \qquad c_p = (p+1)b_{p+1} = -(p+1)\sum_{n=2}^{p+1} \frac{1}{n}, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

i vàlid per $-1 < x < 1$. $\triangleright$

9. (a) Trobeu el desenvolupament en sèrie de $f(x) = \arctan x$, determinant el camp de convergència. Com pot utilitzar-se aquest desenvolupament per calcular el valor de π? Quants termes s'han de prendre per calcular el valor de π amb un error $\varepsilon < \frac{1}{1\,000}$?
(b) Posant $\alpha = \arctan(1/5)$, calculeu $\tan 2\alpha$ i $\tan 4\alpha$.
(c) Posant $\pi/4 = 4\alpha - \beta$, calculeu el valor de $\tan\beta$.
(d) Demostreu que es compleix la igualtat $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$ (fórmula de John Machin (1680-1751)).
(e) Calculeu π amb un error $\varepsilon < 10^{-6}$.

$\triangleleft$ **Solució.** *(a)* Al problema 1(c) vàrem trobar el desenvolupament en sèrie de potències de $f(x) = \arctan x$ que recordem, era:

$$\arctan x = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \ldots, \tag{16}$$

per $-1 \leq x \leq 1$. Avaluant el desenvolupament (16) a $x = 1$ (notem que $x = 1$ pertany al seu camp de validesa) s'obté:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

que és coneix com sèrie de Gregory (i també com sèrie de Leibnitz). Si volem aproximar π amb un error $\varepsilon < \frac{1}{1\,000}$ caldrà agafar p termes de la successió amb p satisfent:

$$\frac{4}{2p+1} < \frac{1}{1\,000} \Leftrightarrow 2p + 1 > 4\,000 \Leftrightarrow p > \frac{3\,999}{2} = 1\,999{,}5.$$

El primer terme exclòs seria doncs $\frac{1}{4\,001}$ i per tant hauríem de sumar $2\,000$ termes (des de $p = 0$ fins a $p = 1\,999$: $\frac{1}{2 \cdot 1\,999 + 1} = \frac{1}{3\,999}$). Això és debut a que la sèrie $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ convergeix molt lentament.

Remarca 1.3. Recordem que si $a_p \geq 0$ amb $a_p \to 0$ i $a_{p+1} \leq a_p$ per tot p; aleshores: la sèrie alternada *(1)* $\sum_{p\geq 0}(-1)^p a_p$ és convergent. Essent $A_q = \sum_{p=0}^{q}(-1)^p a_p$ i A la seva suma, llavors es verifiquen les desigualtats: *(2)* $A_{2q+1} \leq A \leq A_{2q}$ i *(3)* $|R_p| = |A - A_p| \leq a_{p+1}$.

(b) Sigui: $\alpha = \arctan \frac{1}{5} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{5}$, llavors:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \qquad \tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}\ (>1).$$

Remarca 1.4. S'ha fet servir la identitat trigonomètrica:

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b}$$

primer amb $a = b = \alpha$ i després amb $a = b = 2\alpha$.

(c) $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta \Leftrightarrow \beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$ i llavors:

$$\tan\beta = \frac{\tan 4\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\alpha \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

(veure remarca 1.4).

(d) De $\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta$ es té: $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$.

(e) Fent servir el desenvolupament en sèrie de potències a l'origen de la funció $\arctan x$ (vegeu (9)) i el resultat de l'apartat anterior s'arriba a:

$$\begin{aligned}\pi &= 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}\\ &= \frac{16}{5}\left(1-\frac{4}{3\cdot 100}+\frac{2^4}{5\cdot 10^4}-\frac{2^6}{7\cdot 10^6}+\dots\right)-\frac{4}{239}\left(1-\frac{1}{3\cdot 239^2}+\frac{1}{5\cdot 239^4}-\dots\right) = S_1 - S_2,\end{aligned}$$

essent S_1, S_2 les sèries numèriques:

$$\begin{aligned}S_1 &= \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{16}{2p+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{2p+1} = \frac{16}{5}-\frac{16}{3\cdot 5^3}+\frac{16}{7\cdot 5^7}-\frac{16}{11\cdot 5^{11}}+\dots,\\ S_2 &= \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{4}{2p+1}\left(\frac{1}{239}\right)^{2p+1} = \frac{4}{239}-\frac{4}{3\cdot 239^3}+\frac{4}{5\cdot 239^5}-\dots\end{aligned}$$

Donat el seu caràcter alternant, si ara S_{1,N_1} i S_{2,N_2} denoten les sumes parcials N_1 i N_2-èsima de S_1 i S_2 respectivament, tindrem:

$$\begin{aligned}&\left|16\arctan\frac{1}{5}-4\arctan\frac{1}{239}-(S_{1,N_1}-S_{2,N_2})\right| \le\\ &\le \left|16\arctan\frac{1}{5}-S_{1,N_1}\right| + \left|4\arctan\frac{1}{239}-S_{2,N_2}\right| \le \frac{16}{2N_1+3}\left(\frac{1}{5}\right)^{2N_1+3}+\frac{4}{2N_2+3}\left(\frac{1}{239}\right)^{2N_2+3}\end{aligned}$$

(veure remarca 1.3). En particular, per $N_1 = 4$ i $N_2 = 0$, aquesta fita pren el valor:

$$\frac{16}{11\cdot 5^{11}}+\frac{4}{3\cdot 239^3} = 0{,}127\,455\,458\,057\,426\cdot 10^{-6} < 10^{-6},$$

la qual cosa ens assegura que:

$$\begin{aligned}\pi &= 16\arctan\frac{1}{5}-4\arctan\frac{1}{239} \approx S_{1,4}+S_{2,0}\\ &= \frac{16}{5}\left(1-\frac{4}{3\cdot 100}+\frac{4^2}{5\cdot 100^2}-\frac{4^3}{7\cdot 100^3}+\frac{4^4}{9\cdot 100^4}\right)-\frac{4}{239} = 3{,}141\,592\,585\end{aligned}$$

amb un error més petit que 10^{-6} (per assolir la mateixa precisió amb la fórmula de Gregory-Leibnitz ens caldrien 2 000 000 termes!). De fet, amb 30 xifres decimals el valor de π és:

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279.$$

Es veu llavors que la sèrie a què dóna lloc la fórmula de Machin convergeix força més ràpidament. Així, per exemple, Fent servir aquest mètode, Shanks calculà 527 xifres decimals de π... Al 1873!(3) $\triangleright$

10. Utilitzant desenvolupaments en sèrie, calculeu aproximadament

(a) $\sqrt{530}$, (b) $\sqrt[3]{1333}$, (c) e, (d) $\arctan 0{,}1$.

$\triangleleft$ **Solució.** *(a)* Expressant $\sqrt{530}$ de manera adequada i utilitzant el desenvolupament de la funció binòmica s'obté:

$$\sqrt{530} = 23\sqrt{1+\frac{1}{23^2}} = 23\sum_{p=0}^{\infty}\binom{1/2}{p}\frac{1}{23^{2p}}$$

$$\overset{\text{Prob. 3}}{=} 23\left(1+\frac{1}{2\cdot 23^2}+\sum_{p=2}^{\infty}(-1)^{p+1}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}\left(\frac{1}{23}\right)^{2p}\right) = 23\left(1+\frac{1}{2\cdot 23^2}-\frac{1}{8\cdot 23^4}+\dots\right),$$

on s'han substituït els coeficients binomials calculats al problema 3. Aleshores,

$$\sqrt{530} \approx 23\left(1+\frac{1}{2\cdot 23^2}-\frac{1}{8\cdot 23^4}\right) = 23{,}021\,728\,86\dots$$

amb un error

$$\varepsilon < \frac{3!!}{23^5\cdot 6!!} = \frac{1}{16\cdot 23^5} = 9{,}710\,48\dots\cdot 10^{-9} < 10^{-8}$$

Comentari: debut al caràcter alternanat de la sèrie numèrica l'error comès en aproximar el valor de la suma per la suma d'un nombre finit de termes és més petit que el primer terme que s'omet (veure remarca 1.3). Amb 30 xifres decimals bones el valor de l'arrel és:

$$\sqrt{530} = 23{,}021\,728\,866\,442\,676\,441\,948\,415\,864\,202.$$

(b) Procedint com a l'apartat anterior:

$$\sqrt[3]{1333} = \sqrt[3]{2+11^{33}}$$

$$= 11\left(1+\frac{2}{11^3}\right)^{1/3} = 11\sum_{p=0}^{\infty}\binom{1/3}{p}\left(\frac{2}{11^3}\right)^p = 11\left(1+\frac{2}{3\cdot 11^3}-\frac{4}{9\cdot 11^6}+\dots\right),$$

i s'han hagut de calcular els coeficients binomials següents:

$$\binom{1/3}{0}=1,\ \binom{1/3}{1}=\frac{1}{3},\ \binom{1/3}{2}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}=-\frac{2}{3^2\cdot 2!},\ \binom{1/3}{3}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}=\frac{5\cdot 2}{3^3\cdot 3!},\dots$$

Agafarem com valor aproximat de l'arrel:

$$\sqrt[3]{1333} \approx 11\left(1+\frac{2}{3\cdot 11^3}-\frac{4}{9\cdot 11^6}\right) = 11{,}005\,506\,882\dots$$

amb un error

$$\varepsilon < \frac{11\cdot 5\cdot 2\cdot 2^3}{3^3\cdot 11^9\cdot 3!} = \frac{40}{81\cdot 11^8} = 2{,}303\,74\dots\cdot 10^{-9}$$

D'altra banda, el valor de l'arrel amb 30 xifres decimals és:

$$\sqrt[3]{1333} = 11{,}005\,506\,884\,524\,388\,440\,018\,589\,535\,993.$$

(3)Bé, de fet ell arribà a calcular fins al decimal 707 —en va dedicar 20 anys de la seva vida—. Malauradament, al 1945 D. F. Ferguson va descobrir que el decimal 528 era incorrecte i a partir d'aquest, obviament, tots els següents...

(c) Per calcular e sense fer servir un nombre excessiu de termes de la sèrie numèrica

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{p!} + \dots$$

seguirem el següent mètode. Primer calcularem el desenvolupament de Taylor a l'origen (amb el romanent inclòs) de e^x. Avaluant el desenvolupament a $x = 1/8$ es té:

$$\mathrm{e}^{1/8} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2\cdot 8^2} + \frac{1}{6\cdot 8^3} + \frac{1}{24\cdot 8^4} + \frac{\mathrm{e}^{\vartheta}}{120\cdot 8^5},$$

amb $0 \le \vartheta \le 1/8$. Si denotem el romanent de dalt per Δx, podem fitar aquesta quantitat fent, per exemple:

$$\Delta x = \frac{\mathrm{e}^{\vartheta}}{120\cdot 8^5} \le \frac{\mathrm{e}^{1/8}}{120\cdot 8^5} < \frac{3^{1/8}}{120\cdot 8^5} < \frac{1{,}2}{120\cdot 32\,768} = \frac{10^{-2}}{32768} < 4\cdot 10^{-7},$$

atès que $0 \le \vartheta \le 1/8$, que $2 < \mathrm{e} < 3$ i que llavors: $\mathrm{e}^{\vartheta} < \mathrm{e}^{1/8} < 3^{1/8} < 1{,}2$. Aleshores:

$$\mathrm{e}^{1/8} \approx 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{2\cdot 8^2} + \frac{1}{6\cdot 8^3} + \frac{1}{24\cdot 8^4} = 1{,}133\,148\dots$$

A continuació es calcula (millor dit, s'aproxima) e fent[(4)]

$$\mathrm{e} = (\mathrm{e}^{1/8})^8 = \left[\left(\mathrm{e}^{1/8}\right)^2 \times \left(\mathrm{e}^{1/8}\right)^2\right] \times \left[\left(\mathrm{e}^{1/8}\right)^2 \times \left(\mathrm{e}^{1/8}\right)^2\right] \approx 2{,}718\,28\dots =: \mathring{\mathrm{e}}$$

Per estudiar la precisió d'aquest resultat s'ha de tenir en compte com es propaguen els errors en les fórmules. Si x^* és la quantitat exacta i $\mathring{x}$ l'aproximació obtinguda, definim: $\Delta x := x^* - \mathring{x}$ ($\Leftrightarrow x^* = \mathring{x} + \Delta x$). Suposem que la magnitud que estem estudiant, y, depèn de x a través d'una funció coneguda f, i. e., $y = f(x)$. Si x és una quantitat afectada d'error (per exemple perquè és el resultat de mesures experimentals o bé com ara, perquè ha estat obtinguda truncant un desenvolupament, etcètera), aquests errors es propagaran a la varible depenent y. En efecte: denotem per $y^* = f(x^*)$ el valor de y calculat a partir del valor exacte de $x = x^*$ i $\mathring{y} = f(\mathring{x})$ l'obtingut a partir del seu valor aproximat $x = \mathring{x}$. Sigui $\Delta y := y^* - \mathring{y}$ ($\Leftrightarrow y^* = \mathring{y} + \Delta y$) i suposem a més que f és derivable amb continuïtat a l'interval $I \subseteq \mathbb{R}$ que conté $x^*, \mathring{x}$ (i. e.: $x^*, \mathring{x} \in I$); llavors pel teorema del valor mitjà existeix $\xi \in \langle \mathring{x}, \mathring{x} + \Delta x\rangle \subseteq I$ tal que:

$$|\Delta y| = |y^* - \mathring{y}| = |f(x^*) - f(\mathring{x})| = |f'(\xi)|\cdot|x^* - \mathring{x}| \Longrightarrow |\Delta x| \le \max_{x\in\langle\mathring{x},\mathring{x}+\Delta x\rangle} |f'(x)|\cdot|\Delta x|. \qquad (17)$$

En el nostre cas, és clar que $f(x) = x^8$, $x^* = \mathrm{e}^{1/8}$, $\mathring{x} = 1{,}133\,148\dots$ i $\epsilon = |\Delta x| = 4\cdot 10^7$. Es calcula doncs:

$$\varepsilon := \left|\mathrm{e} - (1{,}133\,148\dots)^8\right| = 8\xi^7\epsilon \le 8\mathrm{e}^{7/8}\epsilon < 24\cdot 4\cdot 10^{-7} = 96\cdot 10^{-7} < 10^{-5},$$

ja que $\xi \in [1{,}133\,148, \mathrm{e}^{1/8}]$ i per tant $\xi < \mathrm{e}^{1/8} \Rightarrow \xi^7 < \mathrm{e}^{7/8} < 3$. Finalment, agafem com aproximació del nombre e:

$$\mathrm{e} = 2{,}718\,28$$

i hem justificat que l'error ε d'aquesta aproximació és $\varepsilon < 10^{-5}$. Per comparar, afegirem que el nombre e amb 30 xifres decimals és $\mathrm{e} = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,353$.

(d) Amb el desenvolupament de la funció $\arctan x$ obtingut al problema **1***(c)* (fórmula (9)) tenim, per $x = 0{,}1$:

$$\arctan 0{,}1 = 10^{-1} - \frac{10^{-3}}{3} + \frac{10^{-5}}{5} + \frac{10^{-7}}{7} + \frac{10^{-9}}{9} - \dots. \qquad (18)$$

Si calculem l'aproximació amb els quatre primers termes, obtenim:

$$\arctan 0{,}1 \approx 10^{-1} - \frac{10^{-3}}{3} + \frac{10^{-5}}{5} + \frac{10^{-7}}{7} = 0{,}099\,668\,652\,380\,95\dots$$

i donat el caràcter alternant de (18) (veure remarca 1.3, al problema **9**) podem garantir que l'error, ε, comès en aquesta aproximació serà: $\varepsilon < 10^{-9}/9 = 1{,}\widehat{1}\cdot 10^{-9} < 1{,}2\cdot 10^{-9}$. ▷

(4) Algorisme: `x=1.133148; x2=x*x; x4=x2*x2; x8=x4*x4=2.718272.`

11. Calculeu $\mathrm{D}^{10} \arctan 0{,}1$ amb un error menor que 10^{-1}, mitjançant el desenvolupament en sèrie a l'origen de la funció arctan.

◁ **Solució.** Tenim que:

$$\mathrm{D} \arctan x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p x^{2p},$$

per $-1 < x < 1$; d'on:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^2 \arctan x &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p (2p) x^{2p-1},\\
\mathrm{D}^3 \arctan x &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p 2p(2p-1) x^{2p-2},\\
\mathrm{D}^4 \arctan x &= \sum_{p=2}^{\infty} (-1)^p 2p(2p-1)(2p-2) x^{2p-3},\\
\mathrm{D}^5 \arctan x &= \sum_{p=2}^{\infty} (-1)^p 2p(2p-1)(2p-2)(2p-3) x^{2p-4},\\
&\ \vdots\\
\mathrm{D}^{10} \arctan x &= \sum_{p=5}^{\infty} (-1)^p 2p(2p-1)(2p-2)\dots(2p-8) x^{2p-9} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{(2p+10)!}{(2p+1)!} x^{2p+1},
\end{aligned}$$

vàlid també per $-1 < x < 1$. En particular, avaluant a $x = 0{,}1$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{10} \arctan 10^{-1} &= -10^1 \cdot 10! + 10^{-3} \frac{12!}{3!} - 10^{-5} \frac{14!}{5!} + 10^{-7} \frac{16!}{7!} - 10^{-9} \frac{18!}{9!} + 10^{-11} \frac{20!}{11!} - 10^{-13} \frac{22!}{13!} + \dots\\
&= -3\,628\,800 \cdot 10^{-1} + 79\,833\,600 \cdot 10^{-3} - 726\,485\,760 \cdot 10^{-5} + 4\,151\,347\,200 \cdot 10^{-7}\\
&\quad - 17\,643\,225\,600 \cdot 10^{-9} + 60\,949\,324\,800 \cdot 10^{-11} - 180\,503\,769\,600 \cdot 10^{-13} + \dots
\end{aligned}$$

El valor absolut de l'últim terme calculat és $0{,}018\,050\,376\,960\,0 < 10^{-1}$ –noteu també que el penúltim, o sigui $0{,}609\,493\,248$, és encara més gran que 10^{-1}–, i donat el caràcter alternant de la sèrie (veure remarca 1.3 al problema **9**), l'error que es comet en avaluar la sèrie numèrica per la suma dels sis termes anteriors és –en valor absolut– més petit que el valor absolut d'aquest (setè) terme. Aleshores,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{10} \arctan 10^{-1} &\approx -10^1 \cdot 10! + 10^{-3} \frac{12!}{3!} - 10^{-5} \frac{14!}{5!} + 10^{-7} \frac{16!}{7!} - 10^{-9} \frac{18!}{9!} + 10^{-11} \frac{20!}{11!}\\
&= -362\,880{,}0 + 79\,833{,}6 - 7\,264{,}857\,60 + 415{,}134\,720\,0 - 17{,}643\,225\,600 + 0{,}609\,493\,248\,00\\
&= 289\,913{,}156\,6
\end{aligned}$$

i prenem com valor de $\mathrm{D}^{10} \arctan 10^{-1}$,

$$\mathrm{D}^{10} \arctan 10^{-1} \approx 289\,913{,}16$$

amb un error ε més petit que $\varepsilon < 0{,}02$. En canvi, el valor de $\mathrm{D}^{10} \arctan x$ amb 30 xifres decimals és $\mathrm{D}^{10} \arctan x \approx -289\,913{,}174\,199\,354\,729\,797\,676\,797\,642\,786\,999$. ▷

12. Calculeu $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{16 + x^4}\, \mathrm{d}x$ amb un error menor que 10^{-4}.

◁ **Solució.** Fent el desenvolupament de la funció binòmica a l'origen calculem primer el desenvolupament de la funció subintegral:

$$\sqrt{16 + x^4} = 4 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^4} = 4 \left(1 + \frac{x^4}{2 \cdot 2^4} - \frac{x^8}{8 \cdot 2^8} + \frac{x^{12}}{16 \cdot 2^{12}} - \cdots\right)$$

el qual té per camp de validesa l'interval $[-1,1]$. Aleshores per calcular la integral es pot integrar terme a terme aquest desenvolupament i trobar (o aproximar, com és ara el nostre cas) la suma de la sèrie numèrica resultant. Aleshores:

$$\int_0^1 \sqrt{16+x^4}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^4}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 4\int_0^1 \left(1+\frac{x^4}{2^5}-\frac{x^8}{2^{11}}+\frac{x^{12}}{2^{16}}-\dots\right)\mathrm{d}x = 4\left(1+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{9\cdot 2^{11}}+\frac{1}{13\cdot 2^{16}}-\cdots\right), \quad (19)$$

i com que és una sèrie alternada amb el valor absolut del terme general decreixent, sabem (veure remarca 1.3 al problema **9**) que l'error comès en aproximar la suma de la sèrie per la suma d'un nombre finit de termes és (en valor absolut) més petit que (el valor absolut) del primer terme que es desprecia. L'últim terme calculat a la sèrie (19) de dalt és:

$$\frac{4}{13\cdot 2^{16}} = \frac{1}{212\,992} < 10^{-4}$$

mentre que l'anterior és

$$\frac{4}{9\cdot 2^{11}} = \frac{1}{18\,432} > 10^{-4},$$

i per tant:

$$I := \int_0^1 \sqrt{16+x^4}\,\mathrm{d}x \approx 4\left(1+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{9\cdot 2^{11}}\right) = 4\left(1+\frac{1}{160}-\frac{1}{18\,432}\right) = \frac{92\,731}{23\,040} = 4{,}024\,782\,986\widehat{1};$$

amb la qual cosa es pot prendre com aproximació al valor de la integral $I \approx 4{,}024\,8$, amb un error $\varepsilon < 10^{-4}$. Finalment, es pot comprovar que un càlcul més precís porta a: $I \approx 4{,}024\,787\,545\,656\,309\,766\,456\,8$ $73\,630\,892$, amb 30 xifres decimals "bones". ▹

13. Calculeu $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ amb un error menor que 10^{-6}.

◃ **Solució.** El desenvolupament de $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ en sèrie de potències a l'origen ve donat per

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}}{x} = \sum_{p=o}^{\infty}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p+1)!} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\dots,$$

vàlid per tot $x \in \mathbb{R}$. A continuació, integrant terme a terme:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-\dots\right)\mathrm{d}x = 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\frac{1}{9\cdot 9!}-\dots \quad (20)$$

del valor dels dos últims termes calculats:

$$\frac{1}{7\cdot 7!} = \frac{1}{35\,280} > 10^{-6}, \qquad \frac{1}{9\cdot 9!} = \frac{1}{3\,265\,920} < 10^{-6}$$

i del caràcter alternant –en el sentit establert a la remarca 1.3, problema **9**– de la sèrie (20) es dedueix que es pot agafar com valor aproximat de la integral:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}$$
$$= \frac{166\,889}{176\,400} = 0{,}946\,08\overbrace{276\,643\,990\,929\,705\,215\,419\,501\,133\,786\,848\,072\,562\,358}$$

o arrodonint,

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}946\,082\,8$$

amb un error $\varepsilon < \dfrac{1}{9 \cdot 9!} = 0{,}306\ldots \cdot 10^{-6} < 10^{-6}$. En canvi, un càlcul més precís, amb 30 xifres decimals bones, porta a:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}946\,083\,070\,367\,183\,014\,941\,353\,313\,823\,2. \triangleright$$

14. Calculeu $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2}$ amb un error menor que 10^{-3}.

$\triangleleft$ **Solució.** Desenvolupant e^{-x^2} en sèrie de potencies al voltant de l'origen i integrant terme a terme:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!} - \ldots\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} + \frac{1}{13\cdot 6!} - \ldots\right).\end{aligned}$$

L'últim terme de la sèrie que hem calculat explícitament és el primer que té un valor més petit que la tolerància demanada. En efecte, comparant-lo amb l'immediatament anterior:

$$\frac{2}{11\cdot 5!} = \frac{1}{660} > 10^{-3}, \qquad \frac{2}{13\cdot 6!} = \frac{1}{4\,680} < 10^{-3}.$$

Aleshores, donat el caràcter alternant de la sèrie numèrica (veure remarca 1.3 al problema **9**), podrem aproximar la integral per la suma dels sis primers termes de la sèrie, i. e.,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x &\approx 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!}\right) \\ &= 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{21} + \frac{1}{108} - \frac{1}{660} = \frac{31\,049}{20\,790} = 1{,}4\widehat{934\,583}\end{aligned}$$

garantint que l'error comès, ε, és $\varepsilon < \dfrac{1}{4\,680} = 0{,}213\,675\ldots \cdot 10^{-3} < 10^{-3}$. Per contrastar el resultat obtingut, donem la mateixa integral amb trenta xifres decimals correctes:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 1{,}493\,648\,265\,624\,854\,050\,798\,934\,872\,264. \triangleright$$