13(B) Resolució d'EDO per sèries de potències

1. Determineu el radi de convergència de

$$\sum a_n x^n = x + \frac{x^3}{1\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5} + \dots$$

Proveu que la suma de la sèrie $F(x)$ verifica $F' = 1 + xF$.

$\underline{S}$ · $\sum_n a_n x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} = x \cdot \left(\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{(2n+1)!!} \right) \circ (x^2)$

i la sèrie $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{(2n+1)!!}$ té radi de convergència $\hat{r} = +\infty$. En efecte, sigui $d_n = \frac{1}{(2n+1)!!}$

aleshores $\lim_n \left| \frac{d_{n+1}}{d_n} \right| = \lim_n \frac{(2n+1)!!}{(2n+3)!!} = \lim_n \frac{1}{2n+3} = 0 \Rightarrow \hat{r} = +\infty$

I per tant $\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{(2n+1)!!}$ és convergent $\forall t \in \mathbb{C} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ convergent $\forall x \in \mathbb{C}$

(i.e. aquesta sèrie té radi de convergència $r = +\infty$).

· $F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} = x + \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} \Rightarrow F'(x) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(2n+1)}{(2n+1)!!} x^{2n} =$

$= 1 + x \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!} = 1 + x \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} = 1 + xF(x) \quad \forall x \in \mathbb{C}$. ∎

$$\boxed{\frac{2n+1}{(2n+1)!!} = \frac{\cancel{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)\,\cancel{(2n+1)}}}$$

2. Sigui la sèrie $\sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p}}{2p-1}$

i) Si S és la suma, calculeu S', S''

ii) Calculeu els radis de convergència de S, S' i S''

iii) Proveu que $(1-x^2)S''(x) - 2xS'(x) + 2S(x)$

S. (i) $S'(x) = \sum_{p\geq 1} \frac{2p}{2p-1} x^{2p-1}$, $S''(x) = \sum_{p\geq 1} \frac{2p(2p-1)}{2p-1} x^{2p-2} =$

$= \sum_{p\geq 1} 2p\, x^{2p-2}$.

(ii) $\sum_{p\geq 0} \frac{x^{2p}}{2p-1} = \left(\sum_{p\geq 0} \frac{u^p}{2p-1}\right) \circ x^2$ i tenim que $\lim_p \frac{2p-1}{2p+1} = 1 \Rightarrow r_u = 1$

$\Rightarrow r_x = 1$. Llavors el radi de convergència de S és 1 i per tant el de S' i S'' també serà 1.

(iii) $(1-x^2)S''(x) - 2xS'(x) + 2S(x) = \sum_{p\geq 1} 2p x^{2p-2} - \sum_{p\geq 1} 2p x^{2p} - \sum_{p\geq 1} \frac{4p}{2p-1} x^{2p}$

$+ \sum_{p\geq 0} \frac{2}{2p-1} x^{2p} = \sum_{p\geq 0} (2p+2) x^{2p} - \sum_{p\geq 1} 2p x^{2p} - \sum_{p\geq 1} \frac{4p}{2p-1} x^{2p} + \sum_{p\geq 0} \frac{2}{2p-1} x^{2p} =$

$= \cancel{2} - \cancel{2} + \sum_{p\geq 1} \left(2\cancel{p}+2 - \cancel{2p} - \frac{4p}{2p-1} + \frac{2}{2p-1}\right) x^{2p} = \sum_{p\geq 1} \underbrace{\left(2 - \frac{2(2p-1)}{2p-1}\right)}_{0 \ \forall p \in \mathbb{N}} x^{2p}$

$= 0$. ■

3. Considereu la sèrie de potències

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

a) Trobeu el seu radi convergència.

b) Essent f la seva funció suma, calculeu

$$f'' - x f' + f$$

c) Determineu per quins valors de $\alpha \geq 0$ i $\beta \in \mathbb{R}$ la funció f és solució de l'edo

$$y'' - x^\alpha y' + y + \beta x^{\alpha+1} = 0$$

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!} x^{2n+2} = x^2 \left(\sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!} u\right) \circ x^2$

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!}\ ;\ \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{(2n+1)!!}{(2n+4)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{(2n-1)!!} = \lim_n \frac{2n+1}{(2n+4)(2n+3)} = 0$$

$$\Longrightarrow r_u = +\infty \Rightarrow r_x = +\infty.$$

b) $\displaystyle f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!}(2n+2)\, x^{2n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!} x^{2n+1},$

$$f''(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!}(2n+1)\, x^{2n} = \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} x^{2n}$$

$$f'' - xf' + f = \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} x^{2n} - \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!} x^{2n+2} + \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!} x^{2n+2} - \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!} x^{2n+2} + \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!} - \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!} + \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!}\right) x^{2n+2} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n\geq 1} \frac{(2n+1)!! - (2n-1)!!(2n+2) + (2n-1)!!}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n\geq 1} \frac{(2n-1)!!(2n+1-2n-2+1)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

c) $y'' - x^\alpha y' + y + \beta x^{\alpha+1} = \frac{1}{2}x^2 + O(x^{3+\alpha}) + O(x^4) + \beta x^{\alpha+1}$

per tant, cal: $\alpha = 1$ i $\beta = -\frac{1}{2}$; i no hi ha cap altra possibilitat donat que per a qualsevol altra elecció dels paràmetres $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ no s'anul·larà el 1^er^ terme de y''. ■

4. Trobeu la solució de $y' = xy$ en un entorn de l'origen usant sèries de potències

S. $y = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$

Substituint a l'edo:

$$\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n\geq 1} a_{n-1} x^n = a_1 + \sum_{n\geq 1} \left((n+1)a_{n+1} - a_{n-1}\right) x^n = 0, \text{ d'on: } \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{n+1}, n \in \end{cases}$$

$n=1$: $a_2 = \frac{a_0}{2}$; $n=2$: $a_3 = \frac{a_1}{3} = 0$; $n=3$: $a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{4\cdot 2}$; $n=4$: $a_5 = \frac{a_3}{5} = 0$; $n=5$: $a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0}{6\cdot 4 \cdot}$

... per inducció: $a_{2p+1} = 0\ \forall p = 0,1,2,3,\ldots$ i $a_{2p} = \frac{a_0}{(2p)!!} = \frac{a_0}{2^p p!}$ per $p = 1,2,3,\ldots$ $\left((2p)!! = 2p(2p-2)(2p-4)\cdots 4\cdot 2\cdot 1 = 2^p p!\right)$.

notem que a_0 queda indeterminada ($a_0 \in \mathbb{R}$ qualsevol). Llavors, la solució de l'edo ve donada per la funció suma de la s.d.p.:

$$y(x) = \sum_{p \geq 0} \frac{a_0}{2^p p!} x^{2p} = a_0 \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^p = a_0 e^{x^2/2}, \; a_0 \in \mathbb{R}$$

Remarca. Aquesta és la solució general que s'obté fent separació de variables a l'equació: $y' = xy \Rightarrow \ln|y| = x^2/2 + C \Rightarrow y = Ce^{x^2/2}, \; C \in \mathbb{R}$. ∎

Resolen les següents equacions:

5. $y' = x^2 + y$ a un entorn de l'origen

S. $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = x^2 + \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$

$$\Longrightarrow \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_1 - a_0 + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + $$

$$+ \sum_{n \geq 3} \left((n+1) a_{n+1} - a_n\right) x^n = x^2$$

d'on: $a_1 = a_0$, $a_2 = \frac{1}{2} a_1$, $a_3 = \frac{1}{3}(a_2 + 1) = \frac{1}{6} a_1 + \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$, per $\mathbb{N} \ni n \geq 3$.

$n = 3: \; a_4 = \frac{a_3}{4}$; $n = 4: \; a_5 = \frac{a_4}{5} = \frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{3! a_3}{5!}$; $n = 5: \; a_6 = \frac{a_5}{6} = \frac{3! a_3}{6!}, \ldots$

..., (inducció): $a_n = \frac{3! a_3}{n!}$, per $\mathbb{N} \ni n \geq 3$

$$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + a_0 x + \frac{1}{2} a_0 x^2 + \left(\frac{1}{6} a_0 + \frac{1}{3}\right) \sum_{n \geq 3} \frac{3!}{n!} x^n = a_0 \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} + 2\left(\sum_{n \geq 3} \frac{x^n}{n!} + \right.$$

$$\left. + 1 + x + x^2/2 - 1 - x - x^2/2\right) = (a_0 + 2) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} - x^2 - 2x - 2 = \underbrace{C e^x}_{\substack{\text{solució} \\ \text{general de l'edo} \\ \text{homogènia}}} \underbrace{- x^2 - 2x - 2}_{\text{solució particular}} \quad ∎$$

6. $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$.

S. Agafem, com abans, $y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y''(x) = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$ i substituint a l'edo:

$$(1+x^2)y'' + xy' - y = \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n \geq 1} n a_n x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n \geq 1} n a_n x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 2a_2 - a_0 + (6a_3 + a_1 - a_0)x$$

$$+ \sum_{n \geq 2} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + \left(n(n-1) + (n-1)\right) a_n \right] x^n = 2a_2 - a_0 + (6a_3 + a_1 - x_0)x +$$

$$+ \sum_{n \geq 2} \left[(n+1)(n+2) a_{n+2} + (n+1)(n-1) a_n \right] x^n = 0$$

d'on, comparant els coeficients:

$$a_2 = \frac{1}{2}a_0, \quad a_3 = 0, \quad a_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}a_n, \text{ per } \mathbb{N} \ni n \geq 2.$$

$n=2$: $a_4 = -\frac{1}{4}a_2 = \frac{-1}{4\cdot 2}a_0$; $n=3$: $a_5 = -\frac{2}{5}a_3 = 0$; $n=4$: $a_6 = -\frac{3}{6}a_4 = \frac{3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}a_0$;
$n=5$: $a_7 = -\frac{4}{7}a_5 = 0$; $n=6$: $a_8 = -\frac{5}{8}a_6 = -\frac{5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}a_0$; ...

i per inducció es comprova que:

$$a_{2p} = (-1)^{p+1}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}a_0, \quad a_{2p-1} = 0, \text{ per } p = 2,3,4,\ldots$$

i la solució ve donada per la suma de la sèrie

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_1 x + a_0\left(1 + x^2/2 + \sum_{p\geq 2}(-1)^{p+1}\frac{(2p-3)!!}{(2p)!!}x^{2p}\right)$$

amb $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ coeficients arbitraris (són els paràmetres de la família de solucions)

Remarca. Es pot comprovar que, quan $a_0 \neq 0$ el camp de convergència de la sèrie ve donat per l'interval $[-1,1]$. ■

7) $xy'' - 3x^2y' + xy = 0$

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \Longrightarrow y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} \Longrightarrow y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

Substituint a l'edo:

$$xy'' - 3x^2y' + xy = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} - 3\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} - 3\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n+1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1}$$

$$= (2a_2 + a_0)x + \sum_{n\geq 1}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (3n-1)a_n\right]x^{n+1}$$

d'on, comparant els coeficients:

$$a_2 = -a_0/2, \quad a_{n+2} = \frac{3n-1}{(n+2)(n+1)}a_n \text{ per } n \geq 1.$$

$n=1$: $a_3 = \frac{2}{3\cdot 2}a_1$; $n=2$: $a_4 = \frac{5}{4\cdot 3}a_2 = \frac{-5}{4\cdot 3\cdot 2}a_0$; $n=3$: $a_5 = \frac{8}{5\cdot 4}a_3 = \frac{8\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$;
$n=4$: $a_6 = \frac{11}{6\cdot 5}a_4 = -\frac{11\cdot 5}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a_0$; $n=5$: $a_7 = \frac{14}{7\cdot 6}a_5 = \frac{14\cdot 8\cdot 2}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}a_1$, ...

... i per inducció es prova que:

$$\left.\begin{aligned} a_{2p} &= -\frac{(6p-7)(6p-13)(6p-19)\cdots 5}{(2p)!}\,a_0 = -\frac{\prod_{k=2}^{p}(6k-7)}{(2p)!}\,a_0 \\ a_{2p-1} &= \frac{(6p-10)(6p-16)\cdots 2}{(2p-1)!}\,a_1 = \frac{\prod_{k=2}^{p}(6k-10)}{(2p-1)!}\,a_1 \end{aligned}\right\} \; p=2,3,4,\ldots \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

I llavors la solució vindrà donada per les funcions sumes de les sèries de potències:

$$y(x) = a_0\left(1-\frac{1}{2}x^2-\sum_{p\geq 2}\frac{\prod_{k=2}^{p}(6k-7)}{(2p)!}x^{2p}\right)+a_1\left(x+\sum_{p\geq 2}\frac{\prod_{k=2}^{p}(6k-10)}{(2p-1)!}x^{2p-1}\right)$$

amb $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ ctnts arbitràries i on es comprova (exercici!) que el radi de convergència de les dues sèries és $r=+\infty$. ■

8) Estudiem la convergència de la sèrie: $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2n}}{n!\,(n+p)!}$.

La suma de la sèrie s'anomena funció de Bessel d'ordre p i s'escriu $J_p(x)$. Proveu que $J_p(x)$ satisfà l'equació diferencial

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0.$$

S. $$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}}{n!\,(n+p)!} = \left(\frac{x}{2}\right)^p\left[\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+p)!}u^n\right)\circ\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]$$

Estudiem la convergència de: $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+p)!}u^n$: $\displaystyle\lim_n\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n\frac{n!\,(n+p)!}{(n+1)!\,(n+p+1)!} =$

$\displaystyle= \lim_n\frac{1}{(n+1)(n+p+1)} = 0 \Rightarrow r_u=+\infty \Longrightarrow$ el radi de convergència de $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2n}}{n!\,(n+p)!}$ és també $r_x=+\infty$

Sigui: $\displaystyle J_p(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{p+2n}}{n!\,(n+p)!} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{p+2n}n!\,(n+p)!}x^{p+2n}$; llavors:

$$J_p'(x) = \sum_{n\geq 0}(p+2n)\frac{(-1)^n}{2^{p+2n}n!\,(n+p)!}x^{p+2n-1};$$

$$J_p''(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(p+2n)(p+2n-1)}{2^{p+2n}n!\,(n+p)!}x^{p+2n-2}$$

$$x^2J_p''(x)+xJ_p'(x)+(x^2-p^2)J_p(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(p+2n)(p+2n-1)}{2^{p+2n}n!\,(n+p)!}x^{p+2n}+\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(p+2n)}{2^{p+2n}n!\,(n+p)!}x^{p+2n}$$

$$+\boxed{\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{p+2n}n!\,(n+p)!}x^{p+2n+2}}-\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n p^2}{2^{p+2n}n!\,(p+n)!}x^{p+2n} =$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{p+2n-2}(n-1)!\,(n+p-1)!}x^{p+2n}$$

$$= \frac{p(p-1)}{2^p p!} + \frac{p}{2^p p!} - \frac{p^2}{2^p p!} + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \Big[\frac{(p+2n)(p+2n-1)}{2^{p+2n} n!\,(n+p)!} + \frac{p+2n}{2^{p+2n} n!\,(n+p)!} -$$

$$- \frac{1}{2^{p+2n-2}(n-1)!\,(n+p-1)!} - \frac{p^2}{2^{p+2n} n!\,(p+n)!} \Big] x^{p+2n} =$$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2^{p+2n} n!\,(n+p)!} \Big((p+2n)(p+2n-1) + p+2n - 2^2 n(n+p) - p^2 \Big) x^{p+2n}$$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2^{p+2n} n!\,(n+p)!} \Big((p+2n)^2 - 4n^2 - 4np - p^2 \Big) x^{p+2n} = 0. \quad \blacksquare$$

$$(p+2n)^2 = p^2 + 4pn + 4n^2$$

$$\Rightarrow (p+2n)^2 - 4n^2 - 4pn - p^2 = 0$$