(A) Sèries de Potències

Problemes

1. Calculeu el radi de convergència de les sèries

(a) $\sum \frac{2^p}{p^2} z^p$, (b) $\sum \frac{(p!)^2}{(2p)!} z^p$, (c) $\sum p! z^p$.

◁ **Solució.**

(a) Pel criteri de Hadamard: $\limsup \sqrt[p]{|a_p|} = \limsup \sqrt[p]{\frac{2^p}{p^2}} = \lim \sqrt[p]{\frac{2^p}{p^2}} = 2 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$.

(b) Pel criteri del quocient: $\lim \left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| = \lim \frac{((p+1)!)^2}{(p!)^2} \times \frac{(2p)!}{(2p+2)!} = \frac{(p+1)^2}{(2p+2)(2p+1)} = \frac{1}{4}$, i el radi és doncs: $r = 4$.

(c) Pel criteri del quocient: $\lim \left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| = \lim \frac{(p+1)!}{p!} = \lim(p+1) = +\infty \Rightarrow r = 0$. ▷

2. Calculeu el radi de convergència de:

(a) $\sum p^{\ln p} z^p$, (b) $\sum \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p^2} z^p$.

◁ **Solució.**

(a) $\limsup_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim \left(p^{\ln p}\right)^{1/p} = \lim_p \mathrm{e}^{\frac{(\ln p)^2}{p}} = 1 \Rightarrow r = 1$.

(b) $\limsup_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \left(\left(1+\frac{1}{p}\right)^{p^2}\right)^{1/p} = \lim_p \left(1+\frac{1}{p}\right)^{1/p} = \mathrm{e} \Rightarrow r = \frac{1}{\mathrm{e}}$.▷

3. Calculeu el radi de convergència de:

(a) $\sum p^p z^{p^2}$, (b) $\sum 2^p z^{p!}$.

◁ **Solució.**

(a) $\left\{\sqrt[p]{|a_p|}\right\}_{p\geq 1} = \left\{1, 0, 0, 2^{1/2}, 0, 0, 0, 3^{1/3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4^{1/4}, \dots\right\}$. Els límits d'oscil·lació d'aquesta successió clarament són 0 i $\lim_p \sqrt[p]{p} = 1$. Aleshores $\limsup_p \sqrt[p]{|a_p|} = 1 \Rightarrow r = 1$.

(b) $\left\{\sqrt[p]{|a_p|}\right\}_{p\geq 1} = \left\{2, 2^{1/2}, 0, 0, 0, 2^{3/6!}, \dots\right\}$. Els límits d'oscil·lació d'aquesta successió són: 0 i $\lim_p 2^{1/(p-1)!} = 1$. Per tant, $\limsup_p \sqrt[p]{|a_p|} = \sup\{0, 1\} = 1 \Rightarrow r = 1$.▷

4. Calculeu el radi de convergència de

(a) $\sum (1+\mathrm{i}p)z^p$, (b) $\sum \left(\dfrac{1+2\mathrm{i}p}{p+2\mathrm{i}}\right) z^p$.

◁ **Solució.**

(a) $\limsup_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \sqrt[p]{(1+p^2)^{1/2}} = \lim_p (1+p^2)^{\frac{1}{2p}} = \lim_p \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+p^2)}{2p}} = 1 \Rightarrow r = 1.$

(b) $\limsup_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \left|\frac{1+4p^2}{p^2+4}\right|^{\frac{1}{2p}} = \lim_p \mathrm{e}^{\frac{1}{2p}\ln\left|\frac{1+4p^2}{p^2+4}\right|} = 1 \Rightarrow r = 1.$▷

5. Calculeu el camp de convergència de:

(a) $\sum \dfrac{3^p+(-2)^p}{p} x^p$, (b) $\sum \dfrac{\ln p}{2+\sqrt{p}} x^p$.

◁ **Solució.**

(a) Radi de convergència:

$$\lim_p \left(\frac{3^p+(-2)^p}{p}\right)^{1/p} = \lim_p 3\left(\frac{1+(-2/3)^p}{p}\right)^{1/p} = 3 \Longrightarrow r = 1/3.$$

Per tant la sèrie és absolutament convergent si $x \in (-1/3, 1/3)$. D'altra banda, per $x = 1/3$, s'obté la sèrie numèrica:

$$\sum_{p\geq 1} \frac{3^p+(-2)^p}{p}\cdot\frac{1}{3^p} = \sum \left(\frac{1}{p} + \frac{(-2)^p}{3^p p}\right)$$

i com que,

$$\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p} \text{ div.} \quad \text{i} \quad \sum_{p\geq 1}\frac{(-2)^p}{3^p p} \text{ conv.} \Longrightarrow \sum_{p\geq 1}\frac{3^p+(-2)^p}{p}\cdot\frac{1}{3^p} \text{ div.}$$

En canvi, per $x = -1/3$, la corresponent sèrie numèrica és:

$$\sum_{p\geq 1}\frac{(-1)^p+(-2/3)^p}{p} = \sum_{p\geq 1}\left(\frac{(-1)^p}{p} + \frac{(2/3)^p}{p}\right)$$

ara però,

$$\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p} \text{ conv.} \quad \text{i} \quad \sum_{p\geq 1}\frac{(-2)^p}{3^p p} \text{ conv.} \Longrightarrow \sum_{p\geq 1}\frac{3^p+(-2)^p}{p}\cdot\frac{1}{3^p} \text{ conv.}$$

Aleshores, el domini de convergència ve donat per l'interval $\left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

(b) Calculem primer el radi de convergència. Ho ferem emprant el criteri del quocient:

$$\lim_p \left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| = \lim_p \frac{\ln(p+1)}{\ln p}\cdot\frac{2+\sqrt{p}}{2+\sqrt{p+1}} = 1 \Longrightarrow r = 1.$$

Si $x = 1$: $\displaystyle\sum_{p\geq 2}\frac{\ln p}{2+\sqrt{p}}$ i com que:

$$\frac{\ln p}{2+\sqrt{p}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}} \text{ per } p \geq 7 \Longrightarrow \sum_{p\geq 2}\frac{\ln p}{2+\sqrt{p}} \text{ divergent}$$

(comparació per majorització amb $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{1}{\sqrt{p}}$, que és divergent). D'altra banda per $x = -1$,

$$\sum_{p\geq 0}(-1)^p\frac{\ln p}{2+\sqrt{p}} \text{ és convergent puix: } \frac{\ln p}{2+\sqrt{p}} \searrow 0$$

|i. e. decreix monotònicament cap a zero|. Exercici: comproveu que això és cert, per p suficientment gran. En resum, el domi de convergència és l'interval: $[-1, 1)$.$\triangleright$

6. Determineu el camp de convergència de:

(a) $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\left(\frac{x-9}{4}\right)^p$, (b) $\displaystyle\sum_{p\geq 2}\frac{2p+1}{1-p}x^{3p}$, (c) $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{\left(x^2+1\right)^{2p}}{2^p p}$.

$\triangleleft$ **Solució.**

(a) Calculem primer el radi de convergència. Posem: $t = x - 9$; aleshores, pel criteri de Cauchy-Hadamard aplicat a la sèrie $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{t^p}{4^p}$:

$$\limsup_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \sqrt[p]{\frac{1}{4^p}} = \frac{1}{4} \Longrightarrow r = 4.$$

Per tant, la sèrie convergeix absolutament per $|t| = |x-9| < 4 \Longleftrightarrow -4 < x-9 < 4 \Longleftrightarrow 5 < x < 13$. D'altra banda, per $x = 5$ i $x = 13$ s'obtenen respectivament les sèries numèriques $\sum_{p\geq 0}(-1)^p$ i $\sum_{p\geq 0} 1$, totes dues divergents. En conclusió, el camp de convergència de la sèrie vé donat per l'interval: $(5, 13)$.

(b) Fem primer el canvi $t = x^3$. Sigui doncs la sèrie:

$$\sum_{p\geq 2}\frac{2p+3}{2p-1}t^p.$$

Pel criteri del quocient:

$$\lim_p \left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| = \lim_p \frac{2p+3}{2p+1}\cdot\frac{p-1}{p} = 1 \Longrightarrow r = 1,$$

tindrem convergència absoluta si $t = x^3 \in (-1, 1) \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$. Veiem què passa als extrems. Per $x = 1$ i $x = -1$ s'obtenen respectivament les sèries numèriques:

$$\sum_{p\geq 2}\frac{2p+1}{1-p}, \qquad \sum_{p\geq 1}(-1)^p\frac{2p+1}{1-p}$$

que són totes dues divergents: cap d'elles satisfà la condició necessària de convergència derivada del criteri de Cauchy: el terme genral de la sèrie ha de tendir cap a zero. En efecte, veiem que el terme general de la primera tendeix cap a -2, mentre que el terme general de la segona no convergeix (és el terme general d'una successió oscil·lant, on la subsuccessió parella convergeix cap a -2, mentre que la subsuccessió senar convergeix cap a 2. D'aquesta menera, el camp de convergència de la série és el donat per l'interval obert $(-2, 2)$.

(c) Radi de convergència. Introduïm el canvi: $t = (x^2+1)^2$. Amb això la sèrie esdevé:

$$\sum_{p\geq 1}\frac{t^p}{2^p p},$$

d'on, pel criteri de Cauchy-Hadamard, el seu radi de convergència és:

$$\limsup_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \left(\frac{1}{2^p p}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{2} \Longrightarrow r = 2.$$

La qual cosa implica que hi ha convergència absoluta per

$$x : t = (x^2+1)^2 \in (-2, 2) \Longleftrightarrow x^2 + 1 < \sqrt{2} \Longleftrightarrow x \in \left(-\sqrt{\sqrt{2}-1}, \sqrt{\sqrt{2}-1}\right).$$

En canvi als extrems: $x = \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}$, la sèrie és divergent, donat que per aquests punts es té la sèrie numèrica $\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p}$, la sèrie harmònica, que és divergent. El camp de convergècia es redueix doncs a: $\left(-\sqrt{\sqrt{2}-1}, \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$.▷

7. Calculeu el camp de convergència de:

(a) $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}\right)x^p$, (b) $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{p^p}\right)x^p$.

◁ **Solució.**

(a) Per calcular el radi de convergència, aplicarem el criteri del quocient:

$$\lim_p\left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| = \lim_p \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}} = \lim_p\left(1+\frac{\frac{1}{p+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}}\right) = 1 \Longrightarrow r = 1.$$

Remarca 1.1. notem que,

$$0 < \frac{\frac{1}{p+1}}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p}} < \frac{1}{p+1}$$

d'on, aplicant el "lema de l'entrepà", s'obté el límit de dalt.

D'altra banda, com que $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p} > 1$ per tot $p\in\mathbb{N}$, és clar que la sèrie divergeix per $x=\pm 1$ (el terme general de les sèries numèriques corresponents no pot tendir cap a zero). Aleshores, el camp de convergència ve donat per l'interval: $(-1,1)$.

(b) Calculem el radi de convergència, també utilitzant el criteri del quocient:

$$\lim_p\left|\frac{a_{p+1}}{a_p}\right| = \lim_p \frac{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(p+1)^{p+1}}}{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{p^p}} = \lim_p\left(1+\frac{\frac{1}{(p+1)^{p+1}}}{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{p^p}}\right) = 1 \Longrightarrow r = 1$$

Remarca 1.2. Com a l'apartat anterior, tenim que,

$$0 < \frac{\frac{1}{(p+1)^{p+1}}}{1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{p^p}} < \frac{1}{(p+1)^{p+1}}$$

d'on, aplicant el "lema de l'entrepà", s'obté el límit de dalt.

Tanmateix $1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{p^p} > 1$, per tot $p\in\mathbb{N}$, llavors la sèrie no pot ser convergent per $x=\pm 1$ (el terme general de les sèries numèriques corresponents no tendirà cap a zero). El camp e convergència és doncs l'interval obert $(-1,1)$. ▷

8. Discutiu, segons el valor de $\alpha\in\mathbb{R}$ i de $a,b>0$ respectivament, els camps de convergència de:

(a) $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\frac{x^p}{p^\alpha}$, (b) $\displaystyle\sum_{p\geq 0}\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^p}{p^2}\right)$.

◁ **Solució.**

(a) Pel criteri de Cauchy-Hadamard tenim que el radi de convergència és:

$$\limsup_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p\left(\frac{1}{p^\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} = 1 \Longrightarrow r = 1.$$

D'altra banda:

- Si $x=-1: \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{p^\alpha}$ és convergent $\Leftrightarrow \alpha > 0$.
- Si $x=-1: \sum_{p\geq 0} \frac{1}{p^\alpha}$ és convergent $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Per tant, el camp de convergència és:
- $(-1,1)$, si $\alpha \leq 0$.
- $[-1,1)$, si $0 < \alpha \leq 1$.
- $[-1,1]$, si $\alpha > 1$. ▷

(b) Radi de convergència. Aplicant el criteri de Cauchy-Hadamard:

$$\limsup_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^p}{p^2}\right) = \max\{a,b\}.$$

Per tant:
- Si $a \geq b : r = 1/a$ i en aquest cas, per:
  - Per $x = \frac{1}{a} : \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p}$ div., $\sum_{p\geq 1} \frac{(b/a)^p}{p^2}$ (abs.) conv. $\Rightarrow \sum_{p\geq 1} \left[\frac{1}{p} + \frac{(b/a)^p}{p^2}\right]$ div.
  - Per $x = -\frac{1}{a} : \sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^p}{p}$ conv., $\sum_{p\geq 1} \frac{(-b/a)^p}{p^2}$ (abs.) conv. $\Rightarrow \sum_{p\geq 1} \left[\frac{(-1)^p}{p} + \frac{(-b/a)^p}{p^2}\right]$ conv.
- Si $a < b : r = 1/b$ i en aquest cas, per:
  - $x = \frac{1}{b} : \sum_{p\geq 1} \frac{(a/b)^p}{p}$ (abs) conv., $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$ (abs.) conv. $\Rightarrow \sum_{p\geq 1} \left[\frac{(a/b)^p}{p} + \frac{1}{p^2}\right]$ conv.
  - $x = -\frac{1}{b} : \sum_{p\geq 1} \frac{(-a/b)^p}{p}$ (abs.) conv., $\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^p}{p^2}$ (abs.) conv., i llavors la sèrie suma d'aquestes dues, $\sum_{p\geq 1} \left[\frac{(-a/b)^p}{p} + \frac{(-1)^p}{p^2}\right]$, és també convergent.

En conclusió, el camp de convergència de la sèrie ve donat per l'interval:

$$\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right), \text{ si } a \geq b \quad \text{i} \quad \left[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right], \text{ si } a < b. \triangleright$$

9. Essent $\sum a_n$ uns sèrie divergent de termes positius, indiquem per A_n la suma parcial n-èsima de la sèrie i suposem que $\lim \frac{a_n}{A_n} = 0$. Determineu els radis de convergència de les sèries $\sum a_n x^n$ i $\sum A_n x^n$.

◁ **Solució.** Denotarem per r i R els radis de convergencia respectius de les sèries $\sum_{n\geq 0} a_n$ i $\sum_{n\geq 0} A_n$. Com que $\sum a_n$ és una sèrie de termes positius, la successió de sumes parcials $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ és monòtona creixent i |essent la sèrie divergent|, $\{A_n\}_{n\geq 0}$ no pot ser acotada. En conseqüència, $\lim_n A_n = +\infty$. Amb això, aplicant el criteri del quocient:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_{n+1} - a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{a_{n+1}}{A_{n+1}}} = 1 \Longrightarrow R = 1$$

(ja que, d'acord amb l'enunciat: $\lim_n \frac{a_n}{A_n} = 0$). Tanmateix, és clar que la sèrie $\sum_{n\geq 0} A_n x^n$ es pot posar com el producte de convolució (veure la remarca 1.3 al final) següent:

$$\sum_{n\geq 0} A_n x^n = \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right)$$

i com que el radi de convergència de la sèrie geomètrica $\sum_{n\geq 0} x^n$ és 1, llavors $R \geq \min\{r, 1\} = r$. En efecte, doncs $r > 1$ no pot ser, ja que si fos així $\sum_{n\geq 0} a_n$ seria convergent, contrari a hipòtesi. Així, necessàriament $r \leq 1$. D'altra banda:

$$0 \leq a_n \leq A_n \Longrightarrow 0 < \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{A_n} \Longrightarrow 0 < \limsup_n \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{A_n} \Longrightarrow 0 < \frac{1}{r} \leq \frac{1}{R} \Longrightarrow R \leq r,$$

i com que s'ha provat amb anterioritat que $1 = R \geq r$ llavors, necessàriament és: $r = R = 1$.$\triangleright$

Remarca 1.3. Recordem que si $\mathcal{S}_1(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\mathcal{S}_2(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ són dues sèries de potències amb radis de convergència respectius $\rho_{S_1}, \rho_{S_2} > 0$, llavors definirem el seu *producte de convolució* (o simplement el seu *producte*), com la sèrie de potències:

$$\mathcal{S}(z) = (S_1 S_2)(z) = \left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n,$$

amb

$$c_0 = a_0 b_0, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k,$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots$ Es pot, a més, demostrar[(1)] que llavors el radi de convergència de la sèrie $\mathcal{S}(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ no és més petit que el mínim dels radis de convergència de $\mathcal{S}_1(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ i $\mathcal{S}_2(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, i. e.:

$$\rho_S \geq \min\{\rho_{S_1}, \rho_{S_2}\}.$$

Remarca 1.4. Notem que no pot ser $\limsup_n \sqrt[n]{a_n} = 0$ perquè això implicaria $r = +\infty$ i cal $r \leq R = 1$.

10. Calculeu $\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^p}{(p!)^2}\right)\mathrm{d}x$ amb un error meor que 10^{-3}.

$\triangleleft$ **Solució.** Es comprova que el radi de convergència de la sèrie de potències és $R = +\infty$, llavors l'interval d'integració està inclòs al camp de convergència de la sèrie. Podem, per tant, integrar terme a terme, aplicar la regla de Barrow, i el valor de la integral definida vindrà donat per la suma de la sèrie numèrica així obtinguda, i. e.:

$$\int_{-1}^{0}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^p}{(p!)^2}\right)\mathrm{d}x = \sum_{p\geq 0}\frac{x^{p+1}}{(p+1)(p!)^2}\Bigg|_{x=-1}^{x=0} = \sum_{p\geq 0}\frac{(-1)^p}{(p+1)(p!)^2},$$

que és alternada, amb terme general decreixent monotònicament. Així, en aproximar la seva suma amb un nombre finit de termes, l'error comés serà (en valor absolut), més petit que el primer terme menyspreat. D'aquesta manera, sumem fins que surti un terme $< 10^{-3}$. Per fer això, notem que tenim $\displaystyle\sum_{p\geq 0}(-1)^p a_p$ amb

$$a_{p+1} = -\frac{a_p}{(p+1)(p+2)}, \qquad p = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

En efecte,

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+2)((p+1)!)^2} \times \frac{(p+1)((p)!)^2}{(-1)^p} = -\frac{a_p}{(p+1)(p+2)}, \qquad p = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

d'on es deriva la fórmula (1), amb la qual s'obté: $a_0 = 1$, $a_1 = -1/2$, $a_2 = 1/12$, $a_3 = -1/144$, mentre que, per $p = 4 : a_4 = 1/2880 < 10^{-3}$. Aleshores, el valor aproximat de la integral és:

$$\int_{-1}^{0}\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^p}{(p!)^2}\right)\mathrm{d}x \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{144} = \frac{83}{144}$$

[(1)] veure, per exemple, H. Cartan, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*, Dover publ. 1995; Cap. 1, secc. 3.

amb un error, ε,

$$\varepsilon := \left| \int_{-1}^{0} \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^p}{(p!)^2} \right) \mathrm{d}x - \frac{83}{144} \right| \leq a_4 = \frac{1}{2880} < 10^{-3},$$

més petit que la fita donada, 10^{-3}▷.

11. Calculeu $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{10}}$ amb un error més petit que 10^{-7}.

◁ **Solució.** Recordant que la suma de la sèrie geomètrica ve donada per:

$$1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^p + \cdots = \frac{1}{1-t},$$

per $-1 < t < 1$; tenim que

$$\frac{1}{1+x^{10}} = 1 - x^{10} + x^{20} - x^{30} + \cdots + (-1)^p x^{10p} + \ldots, \qquad \text{per } -1 < x < 1,$$

i com que l'interval d'integració $[0, 1/2] \subset (-1, 1)$, el valor de la integral definida és el de la suma de la sèrie numèrica que s'obté integrant terme a terme i aplicant la regla de Barrow, i. e.:

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{10}} = \int_0^{1/2} \left(\sum_{p\geq 0} (-1)^p x^{10p} \right) \mathrm{d}x = \sum_{p\geq 0} (-1)^p \frac{x^{10p+1}}{10p+1} \Bigg|_{x=0}^{x=1/2} = \sum_{p\geq 0} (-1)^p \frac{1}{2^{10p+1}(10p+1)}.$$

Aquesta sèrie és alternada, de la forma

$$\sum_{p\geq 0} (-1)^p a_p, \text{ amb } a_p \searrow 0 \quad (\Leftrightarrow a_{p+1} \leq a_p \forall p = 0, 1, 2, \ldots \text{ i } a_p \to 0).$$

Calculant es comprova que:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = -\frac{1}{11 \cdot 2^{11}}, \quad a_2 = \frac{1}{21 \cdot 2^{21}} = 2.27065313430060\ldots \cdot 10^{-8} (< 10^{-7}).$$

Aleshores calen només els dos primers termes de la sèrie. O sigui:

$$\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{10}} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} = 0{,}499\,955\,61\ldots,$$

mentre que l'error, ε, és més petit que el valor absolut del primer terme menyspreat a l'aproximació. En aquest cas:

$$\varepsilon := \left| \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{10}} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} \right) \right| \leq a_2 = \frac{1}{21 \cdot 2^{21}} = 2{,}270\,653\,134\,300\,60\ldots \cdot 10^{-8} < 10^{-7},$$

més petit que la tolerància demanada. ▷

12. Es considera la sèrie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} x^n$.

a) Calculeu el radi de convergència.
b) Si anomeneu $F(x)$ a la seva funció suma, calculeu $(1 - 2x + x^2)F(x)$.

◁ **Solució.**

a) Prenent $a_p = \displaystyle\binom{p+2}{p} = \frac{(p+2)(p+1)}{2}$ i aplicant el criteri del quocient:

$$\lim_p \left| \frac{a_{p+1}}{a_p} \right| = \lim_p \frac{(p+2)(p+3)}{(p+1)(p+2)} = 1 \Longrightarrow r = 1.$$

b) Essent $F(z)$ la funció suma de la sèrie, calculem:

$$\begin{aligned}(1-2z+z^2)\sum_{p\geq 0}\frac{(p+1)(p+2)}{2}z^p &= \sum_{p\geq 0}\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2}z^p-(p+2)(p+1)z^{p+1}\right)\\ &\quad+\sum_{p\geq 0}\frac{(p+2)(p+1)}{2}z^{p+2}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{p\geq 0}((p+1)(p+2)z^p-2(p+2)pz^p+(p-1)pz^p)\\ &=\frac{1}{2}\sum_{p\geq 0}(p^2+3p+2-2p^2-2p+p^2-p)z^p\\ &=\sum_{p\geq 0}z^p=\frac{1}{1-z}\end{aligned}$$

d'on, en particular:

$$F(z)=\frac{1}{(1-z)^3}.\triangleright$$

13. Considereu la sèrie potències $\sum a_n z^n$, on els coeficients a_n vénen definits per la relació de recurrència: $a_n=\alpha a_{n-1}+\beta a_{n-2}$, si $n\geq 2$ on $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Podem suposer $a_0=1$.

a) Proveu que $|a_n|\leq C^n$, per tot $n\in\mathbb{N}$ on $C=\max(|a_1|,2|\alpha|,2|\beta|,1)$.

b) Deduïu que el radi de convergència és no nul.

c) Calculeu $(1-\alpha x-\beta x^2)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, per a deduir una expressió de la funció suma de la sèrie.

$\triangleleft$ **Solució.**

a) Per inducció: obviament és cert si $p=0,1$. Suposem-ho també cert per $p=2,3,4,\ldots,n-1$ (amb $n\geq 3$). Llavors:

$$|a_n|\leq|\alpha|\cdot|a_{n-1}|+|\beta|\cdot|a_{n-2}|\leq\frac{1}{2}2|\alpha|\cdot|a_{n-1}|+\frac{1}{2}2|\beta|\cdot|a_{n-2}|\leq\frac{1}{2}C\cdot C^{n-1}+\frac{1}{2}C\cdot C^{n-1}=C^n$$

(ja que $2|\alpha|\leq C$, $2|\beta|\leq C$) i on hem fet servir la hipòtesi d'inducció.

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|a_n||z|^n\leq\sum_{n\geq 0}(C|z|)^n$ i aquesta sèrie és convergent per $|z|\leq 1/C$. Aleshores és clar que el redi de convergència $r\geq 1/C>0$. Altra manera: $\limsup|a_p|^{1/p}\leq C\Rightarrow r\geq 1/C$.

c) Calculant:

$$\begin{aligned}(1-\alpha z-\beta z^2)\sum_{n\geq 0}a_n z^n &= \sum_{n\geq 0}\left(a_n z^n-\alpha a_n z^{n+1}-\beta a_n z^{n+2}\right)\\ &=\sum_{n\geq 0}a_n z^n-\alpha\sum_{n\geq 1}a_{n-1}z^n-\beta\sum_{n\geq 2}a_{n-2}z^n\\ &=a_0+a_1 z-\alpha a_0 z+\sum_{n\geq 2}(a_n-\alpha a_{n-1}-\beta a_{n-2})z^n\\ &=a_0+(a_1-\alpha a_0)z\underset{a_0=1}{=}1+(a_1-\alpha)z,\end{aligned}$$

on hem fet servir que els coeficients a_n, $n\geq 0$ vénen donats per la relació de recurrència segons s'especifica a l'enunciat i llavors a la suma $a_n-\alpha a_{n-1}-\beta a_{n-2}=0$, per $n\geq 2$. D'aquí:

$$\sum_{n\geq 0}a_n z^n=\frac{1+(a_1-\alpha)z}{1-\alpha z-\beta z^2}.\triangleright$$

Remarca 1.5. Per exemple, si $|z| < 1/C$ llavors

$$|1 - \alpha z - \beta z^2| \geq 1 - |\alpha||z| - |\beta||z|^2 > 1 - |\alpha|/C - |\beta|/C^2 = (C^2 - C|\alpha| - |\beta|)/C^2 \geq 0.$$

14. Estudieu per a quins valors de x la sèrie $a + bx + cx^2 + ax^3 + bx^4 + cx^5 + \dots$, és convergent i calculeu-ne la suma.

◁ **Solució.** Posant $u = a + bx + cx^2$, llavors podem expressar la sèrie com:

$$\begin{aligned} f(x) &= a + bx + cx^2 + ax^3 + bx^4 + cx^5 + ax^6 + bx^7 + cx^9 + \cdots + ax^{3p} + bx^{3p+1} + cx^{3p+2} + \dots \\ &= a + bx + cx^2 + (a + bx + cx^2)x^3 + (a + bx + cx^2)x^6 + \cdots + (a + bx + cx^2)x^{3p} + \dots \\ &= u + ux^3 + ux^6 + \cdots + ux^{3p} + \dots \end{aligned}$$

i la seva suma és doncs,

$$f(x) = \frac{a + bx + cx^2}{1 - x^3}.$$

Per calcular el seu radi de convergència, veiem que

$$\left\{ \sqrt[p]{|a_p|} \right\}_{p \in \mathbb{N} \cup \{0\}} = \left\{ 1, |b|, \sqrt[2]{|c|}, \sqrt[3]{|a|}, \sqrt[4]{|b|}, \sqrt[5]{|c|}, \sqrt[6]{|a|}, \sqrt[7]{|b|}, \sqrt[8]{|c|}, \sqrt[9]{|a|}, \dots, \sqrt[3p]{|a|}, \sqrt[3p+1]{|b|}, \sqrt[3p+2]{|c|}, \dots \right\}.$$

Aleshores, és clar que si $|a| + |b| + |c| > 0$ resulta $\limsup_p \sqrt[p]{|a_p|} = 1$, i el redi de convergència és doncs $r = 1$.

Remarca 1.6. Notem que, si $|a| + |b| + |c| = 0$, la série és idènticament igual a zero, metre que si $|a| \cdot |b| \cdot |c| \neq 0$, els tres límits:

$$\lim_p \sqrt[3p]{|a_{3p}|} = \lim_p \sqrt[3p]{|a|} = 1, \quad \lim_p \sqrt[3p+1]{|a_{3p+1}|} = \lim_p \sqrt[3p+1]{|b|} = 1, \quad \lim_p \sqrt[3p+2]{|a_{3p+2}|} = \lim_p \sqrt[3p+2]{|c|} = 1$$

són idèntics i com que aquestes tres subsuccessions *recobreixen* tota la successió $\left\{ \sqrt[p]{|a_p|} \right\}_{p \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ el límit existeix i val $\lim_p \sqrt[p]{|a_p|} = 1$.▷

15. Calculeu les sumes de les sèries:

(a) $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p}$. (b) $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p+1} \frac{x^p}{p}$. (c) $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} p x^{p-1}$. (d) $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p}$.

◁ **Solució.**

a) sigui $f(x) = \displaystyle\sum_{p \geq 1} x^{p-1} = \sum_{p \geq 0} x^p = \frac{1}{1 - x}$, per $|x| < 1$, aleshores la seva (sèrie) primitiva,

$$F(x) = \sum_{p \geq 1} \frac{x^p}{p} \qquad \text{amb } F(0) = 0,$$

és precisament la sèrie de la qual volem calcular la seva suma. Per tant:

$$F(x) = \sum_{p \geq 1} \frac{x^p}{p} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1 - t} = -\ln(1 - x), \qquad \text{per } -1 \leq x \leq 1$$

b) Com a l'apartat anterior, considerem la sèrie $f(x) = \displaystyle\sum_{p \geq 1} (-1)^{p+1} x^{p-1} = \sum_{p \geq 0} (-1)^p x^p = \frac{1}{1 + x}$, per $|x| \leq 1$. La seva primitiva $F(x)$, amb $F(0) = 0$, és:

$$F(x) = \sum_{p \geq 1} (-1)^{p+1} \frac{x^p}{p} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + t} = \ln(1 + x),$$

per $1 < x \leq 1$. Notem que llavors:

$$\ln 2 = \sum_{p\geq 1}(-1)^{p+1}\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{p+1}\frac{1}{p} + \ldots .$$

c) $F(x) = \sum_{p\geq 1} px^{p-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{p\geq 0} x^p\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$, per $|x| < 1$ (recordem que $\sum_{p\geq 0} x^p$ és converget per $|x| < 1$, mentre que la sèrie clarament divergeix per $x = \pm 1$).

d) $\sum_{p\geq 0} x^{2p} = \sum_{p\geq 0}\left(x^2\right)^p = \frac{1}{1-x^2}$, per $|x| < 1$ (obviament, la sèrie divergeix per $x = \pm 1$). ▷

16. Calculeu les sumes de les sèries:

(a) $\sum_{p=1}^{+\infty} px^p$. (b) $\sum_{p=1}^{+\infty} p(p+1)x^{p-1}$. (c) $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$.

◁ **Solució.**

a) $\sum_{p\geq 1} px^p = x\sum_{p\geq 1} px^{p-1} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{p\geq 0} x^p\right) = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$, per $|x| < 1$ (és clar que la sèrie divergeix per $x = \pm 1$.

b) $\sum_{p\geq 1} p(p+1)x^{p-1} = \sum_{p\geq 0}(p+1)(p+2)x^p = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sum_{p\geq 0} x^p\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$, per $|x| < 1$. Com abans, la sèrie obviament divergeix per $x = \pm 1$: la corresponent sèrie numèrica no satisfà la condició de convergència (el terme general no tendirà cap a zero quan $x = \pm 1$).

c) Sigui $f(x) = \sum_{p\geq 0} x^{2p} = \frac{1}{1-x^2}$, per $|x| < 1$. Aleshores la seva primitiva, $F(x)$, amb $F(0) = 0$, vindrà donada per integració terme a terme:

$$F(x) = \sum_{p\geq 0}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}}{1-t} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

per $|x| < 1$ (el radi de convergència és el mateix que el de la sèrie derivada i als extrems de linterval, $x = \pm 1$, la sèrie és divergent). ▷

17. Es considera la sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \ldots$

a) Trobeu el seu radi de convergència.
b) Trobeu la funció suma.

◁ **Solució.** *a)* Per trobar el radi de convergència, r, calculem el límit superior de la successió

$$\left\{\sqrt[p]{|a_p|}\right\}_{p\in\mathbb{N}\cup\{0\}} = \left\{1, 2, 1, 2^{1/3}, 1, 2^{1/5}, \ldots, 1, 2^{1/(2p+1)}, \ldots\right\}.$$

De fet, aquesta sèrie té límit (els límits de la subsuccessió parella i de la subsuccessió senar coincideixen i valen 1). Per tant, resulta:

$$\limsup \sqrt[p]{|a_p|} = \lim \sqrt[p]{|a_p|} = 1 \Rightarrow r = 1.$$

b) A continuació, calculem la seva suma,

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} a_n x^n &= 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + \cdots + x^{2p} + 2x^{2p+1} + \dots \\ &= 1 + 2x + (1+2x)x^2 + (1+2x)x^4 + \cdots + (1+2x)x^{2p} + \dots \\ &= (1+2x)(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2p} + \dots) \\ &= \frac{1+2x}{1-x^2},\end{aligned}$$

per $|x| < 1$ (per $x = \pm 1$ no es satisfà la condició necessària de convergència). $\triangleright$

18. Considereu la sèrie de potències $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n3^n}$

a) Determineu el seu camp de convergència.
b) Calculeu la seva funció suma f.
c) Calculeu $f(-1)$ amb un error més petit que $1/50$.

$\triangleleft$ **Solució.** *a)* Calculem el radi de convergència pel criteri de l'arrel: $\displaystyle\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n3^n}} = \lim_n \frac{1}{3\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ $r = 3$.

b) Per trobar la seva suma, busquem primer:

$$g(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n\geq 1} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1/3}{1 - x/3}, \qquad \text{per } -3 < x < 3,$$

i després |integrant terme a terme|, la seva primitiva, $f(x)$, amb $f(0) = 0$. Obtenim així la funció suma de la sèrie donada. En efecte:

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n3^n} = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1 - \frac{t}{3}} = -\ln\left(1 - \frac{x}{3}\right),$$

per $-3 \leq x < 3$.

Remarca 1.7. Per justificar la inclusió de $x = -3$ en el camp de validesa, cal tenir en compte que la sèrie és convergent en $x = -3$ i que la funció suma és contínua (per la dreta) en $x = -3$. Això es veurà amb més detall al tema 15, quan parlem del teorema de s'Alembert.

c) La corresponent sèrie numèrica en $x = -1$ és:

$$f(-1) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n3^n},$$

que és una sèrie alternada amb el valor absolut del terme general tendint monotònicament cap a zero. Sabem doncs que, en aproximar la seva suma per la suma d'un nombre finit de termes, l'error comès és |en valor absolut|, més petit o igual que el valor absolut del primer terme que es menysprea en l'aproximació. En aquest cas, tenim que el primer terme amb valor absolut mès petit que la tolerància donada, $1/50$, és el corresponent a $n = 3$, puix $|a_3| = 1/3^4 = 1/81 < 1/50$ (mentre que $|a_2| = 1/(2\cdot 3^2) = 1/18 > 1/50$). Aleshores:

$$f(-1) = -\ln\frac{4}{3} \approx -\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 3^2} = -\frac{5}{18}$$

amb un error més petit que la tolerància demanda:

$$\varepsilon := \left| f(-1) - \left(-\frac{5}{18}\right)\right| = \left| -\ln\frac{4}{3} - \left(\frac{5}{18}\right)\right| \leq \frac{1}{81} < \frac{1}{50}. \triangleright$$

Remarca 1.8. De fet, fent els càlculs hom troba $\varepsilon := \left|-\ln\frac{4}{3}+\frac{5}{18}\right| = 0{,}009\,904\,294\,674\,003\,11\ldots$, mentre que la fita obtinguda aplicant el resultat esmentat dalt ha estat $1/81 = 0,\widehat{012\,345\,679}$ (és a dir, l'error "real" és encara més petit).

19. Sigui $\varphi(x)$ la funció suma d'una sèrie de potències de radi de convergència més granq ue 1:

$$\varphi(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p, \qquad r > 1.$$

Si denotem per $\alpha_k = D^k\varphi(1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, calculeu, en funció d'aquests valors:

(a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} p a_p$. (b) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}(p+2)(p+1)a_p$. (c) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} p^2 a_p$.

◁ **Solució.**

a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} p a_p = \varphi'(1) = \alpha_1$.

b) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}(p+2)(p+1)a_p = D^2\left(x^2\varphi(x)\right)\Big|_{x=1} = 2\varphi(1) + 4\varphi'(1) + \varphi''(1) = 2\alpha_0 + 4\alpha_1 + \alpha_2$.

c) $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} p^2 a_p = \sum_{p=0}^{\infty} p(p-1)a_p + \sum_{p=0}^{\infty} p a_p = \varphi''(1) + \varphi'(1) = \alpha_2 + \alpha_1$.▷