

Sèries Numèriques

Problemes

1. Estudieu la convergència de les sèries:

$$(a) \sum \ln \left(1 + \frac{2}{p} \right), \quad (b) \sum \frac{p}{1 + \sqrt{p}} \left(1 - \cos \frac{\pi}{p} \right), \quad (c) \sum \frac{\sqrt{p}}{1 + p} \sin \frac{p}{1 + p^2}.$$

◁ Solució.

$$(a) \sum \ln \left(1 + \frac{2}{p} \right) \sim \sum \frac{2}{p} \text{ divergent} \Rightarrow \sum \ln \left(1 + \frac{2}{p} \right) \text{ divergent.}$$

$$(b) \sum \frac{p}{1 + \sqrt{p}} \left(1 - \cos \frac{\pi}{p} \right) \sim \sum \frac{1}{p^{3/2}} \text{ convergent} \Rightarrow \sum \frac{p}{1 + \sqrt{p}} \left(1 - \cos \frac{\pi}{p} \right) \text{ convergent.}$$

$$(c) \sum \frac{\sqrt{p}}{1 + p} \sin \frac{p}{1 + p^2} \sim \sum \frac{1}{p^{3/2}} \text{ convergent} \Rightarrow \sum \frac{1}{p^{3/2}} \text{ convergent.} \triangleright$$

2. Estudieu la convergència de les sèries:

$$(a) \sum \frac{p}{3^p}, \quad (b) \sum \frac{p^5}{2^p + 3^p}, \quad (c) \sum \frac{2^p}{p^3 + 1}.$$

◁ Solució.

$$(a) a_p = \frac{p}{3^p} \Rightarrow \lim_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \sqrt[p]{\frac{p}{3^p}} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum \frac{p}{3^p} \text{ convergent (criteri de l'arrel/quocient).}$$

$$(b) a_p = \frac{p^5}{2^p + 3^p} \Rightarrow \lim_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \sqrt[p]{\frac{p^5}{2^p + 3^p}} = \lim_p \frac{\sqrt[p]{p^5}}{3 \sqrt[p]{1 + (2/3)^p}} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum \frac{p^5}{2^p + 3^p} \text{ convergent (criteri de l'arrel/quocient).}$$

$$(c) \lim_p a_p = \lim_p \frac{a_p}{p^3 + 1} = \frac{1}{3} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{2^p}{p^3 + 1} \text{ divergent (no se satisfà la condició necessària de convergència)} \triangleright.$$

3. Estudieu la convergència de les sèries:

$$(a) \sum \left(\frac{p+1}{p^2} \right)^p, \quad (b) \sum (\sqrt[p]{p} - 1)^p.$$

◁ Solució.

$$(a) a_p = \left(\frac{p+1}{p^2} \right)^p \Rightarrow \lim_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \sqrt[p]{\left(\frac{p+1}{p^2} \right)^p} = \lim_p \frac{p+1}{p^2} = 0 < 1 \Rightarrow \sum \left(\frac{p+1}{p^2} \right)^p \text{ convergent (criteri de l'arrel/quocient).}$$

(b) $a_p = (\sqrt[p]{p} - 1)^p \Rightarrow \lim_p \sqrt[p]{|a_p|} = \lim_p \sqrt[p]{(\sqrt[p]{p} - 1)^p} = \lim_p (\sqrt[p]{p} - 1) = 0 < 1 \Rightarrow \sum (\sqrt[p]{p} - 1)^p$
convergent (criteri de l'arrel/quocient). \triangleright

4. Estudieu la convergència de les sèries:

$$(a) \sum \frac{\ln p}{p^2}, \quad (b) \sum \frac{1}{1+2+\dots+p}.$$

\triangleleft **Solució.**

(a) $\lim_p p^{3/2} \frac{\ln p}{p^2} = \lim_p \frac{\ln p}{p^{1/2}} = 0$. I com que $\sum \frac{1}{p^{3/2}}$ és convergent, llavors $\sum_{p \geq 1} \frac{\ln p}{p^2}$ també és (abs.) convergent (criteri de Pringsheim/Riemann).

(b) Pel criteri del quocient:

$$\sum_{p \geq 1} \frac{1}{1+2+\dots+p} = \sum_{p \geq 1} \frac{2}{p(p+1)} \sim \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \text{ convergent} \Rightarrow \sum_{p \geq 1} \frac{1}{1+2+\dots+p} \text{ (abs.) convergent.} \triangleright$$

5. Estudieu la convergència de les sèries:

$$(a) \sum (\sqrt{p+1} - \sqrt{p}), \quad (b) \sum \left(\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right).$$

\triangleleft **Solució.**

(a) El terme general $a_p = (\sqrt{p+1} - \sqrt{p})$ es pot expressar com:

$$(\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) = (\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) \times \frac{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}} = \frac{p+1-p}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}},$$

llavors (pel criteri del quocient):

$$\sum_{p \geq 0} (\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}} \sim \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p^{1/2}} \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{p \geq 0} (\sqrt{p+1} - \sqrt{p}) \text{ divergent.}$$

(b) El terme general, $a_p = \frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}}$ es pot expressar com:

$$\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{p} - \sqrt{p-1}}{\sqrt{p}\sqrt{p-1}} \times \frac{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}}{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}} = \frac{p - (p-1)}{p\sqrt{p-1}(1 + \sqrt{1+1/p})} > 0$$

per tot $p \geq 2$. Aleshores:

$$\sum_{p \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \sim \sum_{p \geq 2} \frac{1}{p\sqrt{p-1}(1 + \sqrt{1+1/p})} \sim \sum_{p \geq 2} \frac{1}{p^{3/2}} \text{ (convergent)}$$

i per tant (pel criteri del quocient), la sèrie: $\sum_{p \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right)$ és (abs.) convergent. \triangleright

6. Estudieu la convergència i la convergència absoluta de les sèries:

$$(a) \sum (-1)^p \frac{p}{p\sqrt{p}+3}, \quad (b) \sum \left(\frac{1+5p}{3-p} \right)^p.$$

\triangleleft **Solució.**

(a) El terme general es pot expressar com $(-1)^p a_p$ amb:

$$a_p \geq 0 \quad \text{i} \quad a_p = \frac{p}{p\sqrt{p} + 3} \searrow 0,$$

(termes no negatius i tendint “monotònicament” cap a zero). Per tant el criteri de les sèries alternades ens assegura la convergència d’aquesta sèrie. No hi ha, en canvi, *convergència absoluta*. En efecte, aplicant el criteri del quocient a la sèrie formada pel mòdul de cadascun dels termes resulta:

$$\sum_{p \geq 0} \left| (-1)^p \frac{p}{p\sqrt{p} + 3} \right| = \sum_{p \geq 0} \frac{p}{p\sqrt{p} + 3} \sim \sum_{p \geq 1} \frac{1}{\sqrt{p}} \text{ (divergent)}$$

d’on es segueix (criteri del quocient) que $\sum_{p \geq 0} \left| (-1)^p \frac{p}{p\sqrt{p} + 3} \right|$ també és divergent.

(b) Es tracta d’una sèrie alternada, com es veu fent:

$$\sum_{p \geq 3} \left(\frac{1 + 5p}{3 - p} \right)^p = \sum_{p \geq 3} (-1)^p \left(\frac{1 + 5p}{p - 3} \right)^p,$$

però com que el seu terme general no tendeix cap a zero (de fet, ni tan sols és convergent), la sèrie no és convergent i evidentment, tampoc no ho és absolutament. \triangleright

7. Estudieu la convergència i la convergència absoluta de les sèries:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum \frac{1 + pi}{p^2}, & \text{(b)} \quad & \sum \left(\frac{1}{p+1} + i \frac{p^2}{2^p(p+2)^2} \right), & \text{(c)} \quad & \sum \left(\frac{(-1)^p}{p} + i \frac{1}{p!} \right), \\ \text{(d)} \quad & \sum \frac{(1+i)^p}{p}. \end{aligned}$$

\triangleleft **Solució.**

(a) La sèrie és divergent. En efecte:

$$\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \text{ convergent, } \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p} \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{p \geq 1} \frac{1 + ip}{p^2} \text{ divergent.}$$

Per tant, no pot ser absolutament convergent (donat que la convergència absoluta implicaria la convergència de la sèrie). De totes maneres, comprovem-ho:

$$\sum_{p \geq 1} \left| \frac{1 + pi}{p^2} \right| = \sum_{p \geq 1} \sqrt{\frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^2}} \sim \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p} \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{p \geq 1} \left| \frac{1 + pi}{p^2} \right| \text{ divergent.}$$

(b) Com abans mirem per separat les sèries formades per les parts real i imaginària del terme general,

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p+1} \text{ div.}, \quad \sum_{p \geq 0} \frac{p^2}{2^p(p+1)^2} \sim \sum_{p \geq 0} \frac{2}{2^p} \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{p \geq 0} \left(\frac{1}{p+1} + i \frac{p^2}{2^p(p+2)^2} \right) \text{ div.}$$

Aleshores, no pot haver-hi convergència absoluta. Tot i que això es segueix de manera immediata, podem comprovar-ho explícitament:

$$\sum_{p \geq 0} \left| \frac{1}{p+1} + i \frac{p^2}{2^p(p+2)^2} \right| = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{1+p} \sqrt{1 + \frac{p^4(1+p)^2}{2^{2p}(p+2)^4}} \sim \sum_{p \geq 0} \frac{1}{1+p} \text{ divergent.}$$

(c) La sèrie és convergent. En efecte:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{p} \text{ harmònica alternada (conv.),} \\ & \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p!} = e - 1 \text{ (conv.),} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{p \geq 1} \left(\frac{(-1)^p}{p} + i \frac{1}{p!} \right) \text{ conv.}$$

No és, en canvi, absolutament convergent:

$$\sum_{p \geq 1} \left| \frac{(-1)^p}{p} + i \frac{1}{p!} \right| = \sum_{p \geq 1} \sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p!)^2}} \sim \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p} \text{ div.} \Rightarrow \sum_{p \geq 1} \left| \frac{(-1)^p}{p} + i \frac{1}{p!} \right| \text{ div.}$$

(d) La sèrie és divergent perquè:

$$\left| \frac{(1+i)^p}{p} \right| = \frac{|1+i|^p}{p} = \frac{2^{p/2}}{p} \rightarrow +\infty$$

(no se satisfà la condició necessària de convergència de Cauchy). \triangleright

8. Estudieu la convergència de les sèries:

$$(a) \frac{a + (-1)^p \sqrt{p}}{p}, \quad (b) \frac{(-1)^p p + 2}{p^2}.$$

\triangleleft Solució.

$$(a) \sum_{p \geq 1} \frac{a}{p} \text{ divergent i } \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} \text{ convergent} \Rightarrow \sum_{p \geq 1} \frac{a + (-1)^p \sqrt{p}}{p} \text{ divergent.}^{(1)}$$

$$(b) \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{p} \text{ conv. (sèrie harmònica alternada), } \sum_{p \geq 1} \frac{2}{p^2} \text{ conv.} \Rightarrow \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p p + 2}{p^2} \text{ conv.} \triangleright$$

9. Estudieu la convergència de les sèries:

$$(a) \sum \sin \left(\pi \frac{p^2 + p + 1}{p + 1} \right), \quad (b) \sum \sin \left(\pi \sqrt{1 + p^2} \right).$$

\triangleleft Solució.

(a) Podem reescriure la sèrie com:

$$\sum_{p \geq 0} \sin \left(\pi \frac{p^2 + p + 1}{p + 1} \right) = \sum_{p \geq 0} \sin \left(\pi p + \frac{\pi}{p + 1} \right) = \sum_{p \geq 1} (-1)^p \sin \left(\frac{\pi}{p + 1} \right),$$

i es veu clarament que és una sèrie alternada amb $\sin \left(\frac{\pi}{p + 1} \right) \searrow 0$. Per tant, la sèrie és convergent.

(b) Es veu que es tracta d'una sèrie alternada:

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 1} \sin \left(\pi \sqrt{1 + p^2} \right) &= \sum_{p \geq 1} \sin \left(\pi \sqrt{1 + \frac{1}{p^2}} \right) = \sum_{p \geq 1} \sin \left(\pi p + \pi p \left(\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}} - 1 \right) \right) \\ &= \sum_{p \geq 1} (-1)^p \sin \left[\pi p \left(\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}} - 1 \right) \right] = \sum_{p \geq 1} (-1)^p \sin \left[\pi \left(\sqrt{p^2 + 1} - p \right) \right], \end{aligned}$$

i a més, $\sin \left[\pi p \left(\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}} - 1 \right) \right] \searrow 0$. En efecte, per $p = 1$ és: $\pi(\sqrt{2} - 1) = \pi(\sqrt{2} - 1) \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{2} + 1} < \frac{\pi}{2}$ i llavors:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &\geq \pi \left(\sqrt{p^2 + 1} - p \right) = \pi \left(\sqrt{p^2 + 1} - p \right) \times \frac{\sqrt{p^2 + 1} + p}{\sqrt{p^2 + 1} + p} = \frac{\pi}{\sqrt{p^2 + 1} + p} \geq \\ &\geq \frac{\pi}{\sqrt{(p+1)^2 + 1} + (p+1)} = \pi \left(\sqrt{(p+1)^2 + 1} - (p+1) \right) \end{aligned}$$

⁽¹⁾ $\sum a_p$ convergent, $\sum b_p$ divergent $\Rightarrow \sum (a_p + b_p)$ divergent (ja que si $\sum (a_p + b_p)$ fos convergent, aleshores $\sum b_p = \sum (a_p + b_p) - \sum a_p$ seria convergent [essent la sèrie suma de dues convergents], la qual cosa és una contradicció).

per tot $p \geq 1$. Per tant:

$$1 \geq \sin \left[\pi \left(\sqrt{p^2 + 1} - p \right) \right] \geq \sin \left[\pi \left(\sqrt{(p+1)^2 + 1} - (p+1) \right) \right] \geq 0,$$

per tot $p \geq 1$. Aleshores, pel criteri de les sèries alternades, la sèrie $\sum_{p \geq 1} \sin \left(\pi \sqrt{1 + p^2} \right)$ és convergent. \triangleright

10. Discutiu, segons els valors de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergència de les sèries:

$$(a) \sum_{p \geq 2} \left(\ln \frac{p+1}{p-1} \right)^\alpha, \quad (b) \sum_{p \geq 0} \frac{p^\alpha}{1 + \sqrt{p}} \sin \frac{\sqrt{p}}{1+p}.$$

◁ **Solució.**

(a) Convergent sii $\alpha > 1$, com es comprova aplicant el criteri de Pringsheim-Riemann, i. e.:

$$\lim_p p^\alpha \left[\ln \left(1 + \frac{2}{p-1} \right) \right]^\alpha = \lim_p p^\alpha \left(\frac{2}{p-1} \right)^\alpha = 2^\alpha \Rightarrow \sum_{p \geq 2} \left(\ln \frac{p+1}{p-1} \right)^\alpha \sim \sum_{p \geq 2} \frac{1}{p^\alpha} \quad \text{conv.} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

(b) Es comprova, també pel criteri de Pringsheim-Riemann que la sèrie és convergent sii $\alpha < 0$. Explícitament:

$$\lim_p p^{1-\alpha} \frac{p^\alpha}{1 + \sqrt{p}} \sin \frac{\sqrt{p}}{1+p} = \lim_p p^{1-\alpha} \frac{p^\alpha}{1 + \sqrt{p}} \times \frac{\sqrt{p}}{1+p} = 1 \Rightarrow \sum_{p \geq 1} \frac{p^\alpha}{1 + \sqrt{p}} \sin \frac{\sqrt{p}}{1+p} \sim \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^{1-\alpha}}$$

i aquesta última és convergent sii $1 - \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 0$. \triangleright

11. Discutiu, segons els valors de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergència de les sèries:

$$(a) \sum_{p \geq 1} \frac{\sqrt{p+1} - \sqrt{p}}{p^\alpha}, \quad (b) \sum_{p \geq 2} p^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right).$$

◁ **Solució.**

(a) La sèrie convergeix sii $\alpha > \frac{1}{2}$. De nou, podem arribar a aquesta conclusió aplicant el criteri de Pringsheim-Riemann. En efecte, de

$$\lim_p p^{\alpha + \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{p+1} - \sqrt{p}}{p^\alpha} \times \frac{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}} = \lim_p \frac{p^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{p+1} + \sqrt{p}} = \frac{1}{2},$$

es segueix que:

$$\sum_{p \geq 1} \frac{\sqrt{p+1} - \sqrt{p}}{p^\alpha} \sim \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^{\alpha + \frac{1}{2}}} \quad \text{conv.} \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}. \triangleright$$

(b) Convergent sii $\alpha < \frac{1}{2}$. Per Pringsheim-Riemann un altre cop:

$$\begin{aligned} \lim_p p^{\frac{3}{2}-\alpha} p^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right) &= \lim_p p^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{p} - \sqrt{p-1}}{\sqrt{p}\sqrt{p-1}} \times \frac{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}}{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}} = \\ &= \lim_p \frac{p^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{p}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{p}} \right)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{p \geq 2} p^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \right) \sim \sum_{p \geq 2} \frac{1}{p^{\frac{3}{2}-\alpha}} \end{aligned}$$

i $\sum_{p \geq 2} \frac{1}{p^{\frac{3}{2}-\alpha}}$ convergent $\Leftrightarrow -\alpha + \frac{3}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. \triangleright

12. Discuti, segons el valor de $\alpha \in \mathbb{Z}$, la convergència de les sèries:

$$(a) \sum_{p \geq 1} \frac{1}{1 + 2^\alpha + \dots + p^\alpha}, \quad (b) \sum \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{p^\alpha} \right).$$

◁ **Solució.**

- (a) • Si $\alpha = 0$: $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{1 + 2^\alpha + \dots + p^\alpha} = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p}$ divergent (sèrie harmònica).
 • Si $\mathbb{Z} \ni \alpha < 0$: $\frac{1}{1 + 2^\alpha + \dots + p^\alpha} \geq \frac{1}{p}$ i com que: $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p}$ divergent $\Rightarrow \sum_{p \geq 1} \frac{1}{1 + 2^\alpha + \dots + p^\alpha}$ divergent (comparació per majorització).
 • Si $\alpha = 1$: $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{1 + 2 + \dots + p} = \sum_{p \geq 1} \frac{2}{p(p+1)} \sim \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2}$ convergent (criteri de Pringsheim-Riemann per sèries amb termes de signe constant).
 • Si $\mathbb{Z} \ni \alpha > 1$: $0 < \frac{1}{1 + 2^\alpha + \dots + p^\alpha} < \frac{1}{1 + 2 + \dots + p}$, i llavors (per majorització):

$$\sum_{p \geq 1} \frac{1}{1 + 2 + \dots + p} \text{ convergent} \Rightarrow \sum_{p \geq 1} \frac{1}{1 + 2^\alpha + \dots + p^\alpha} \text{ convergent.}$$

- (b) $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{p^\alpha} \geq 1$ per tot $\alpha \in \mathbb{Z}$ i per tant la sèrie divergeix (no es satisfà la condició necessària de convergència). ▷

13. Discuti, segons els valors de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergència de la sèrie $\sum p^\alpha (\ln p)^\beta$.

◁ **Solució.** 1) Si $\alpha > 0$ la sèrie és divergent per tot $\beta \in \mathbb{R}$ donat que no es satisfà la condició necessària de convergència: $\lim_p p^\alpha (\ln p)^\beta = +\infty$ per tot $\beta \in \mathbb{R}$.

2) Si $\alpha = 0$ distingirem dos casos:

(a) Per $\beta \geq 0$ la sèrie divergeix, també debut a què no es satisfà la condició necessària de convergència: $\lim_p (\ln p)^\beta \neq 0$ per cap valor de $\beta \geq 0$ (és $+\infty$ per $\beta > 0$ i 1 quan $\beta = 0$).

(b) Per $\beta < 0$ considerarem la funció: $f(x) = (\ln x)^\beta$ que és positiva, contínua i monòtona decreixent per $x \geq 2$ i per tot $\beta < 0$ i estudiarem la convergència de la seva integral sobre l'interval $[2, +\infty)$:

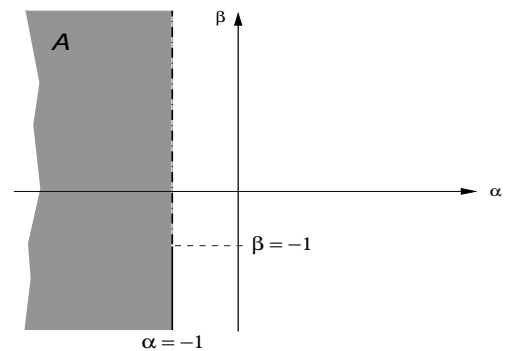


Figura 1. Convergència al pla (α, β) .

$$\begin{aligned} \int_2^\infty (\ln x)^\beta dx &= \int_2^e (\ln x)^\beta dx + \int_e^{+\infty} (\ln x)^\beta dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.: } x = e^u \Leftrightarrow u = \ln x, \\ x = e^u \Rightarrow dx = e^u du, \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty, \\ x = e \Rightarrow u = 1. \end{array} \right\} = \underbrace{\int_2^e (\ln x)^\beta dx}_{\text{conv.}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} u^\beta e^u du}_{\text{div., amb: } u^\beta e^u > 0} = +\infty. \end{aligned}$$

Aleshores, pel criteri integral:

$$\int_2^\infty (\ln x)^\beta dx \text{ divergent } \forall \beta < 0 \Rightarrow \sum_{p \geq 2} (\ln p)^\beta \text{ divergent } \forall \beta < 0.$$

3) Si $\alpha < 0$, considerarem la funció $f(x) = x^\alpha (\ln x)^\beta$ per $x \geq 2$, la qual [en aquest interval], és positiva, contínua i decreix per $x \geq M(\alpha, \beta)$, on:

$$M(\alpha, \beta) = \sup \left\{ 2, \lfloor e^{-\beta/\alpha} \rfloor + 1 \right\}, \quad (1)$$

amb $\alpha < 0, \beta \in \mathbb{R}$ i on $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la funció part entera⁽²⁾. En efecte, ja que:

$$f'(x) = x^{\alpha-1} (\ln x)^{\beta-1} [\alpha \ln x + \beta] \leq 0 \iff \alpha \ln x + \beta \leq 0, (\alpha < 0) \iff \ln x \geq -\frac{\beta}{\alpha}$$

i per tant $f(x)$ decreix si $x \geq e^{-\beta/\alpha}$. En particular a l'interval $[2, +\infty)$ decreixerà per $x \geq M(\alpha, \beta)$ amb $M(\alpha, \beta)$ definit per (1).

D'altra banda, es veu que la integral:

$$\int_{M(\alpha, \beta)}^{+\infty} x^\alpha (\ln x)^\beta dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{c. v.: } x = e^t \iff t = \ln x, \text{ llavors:} \\ dx = e^t dt, \\ x = M(\alpha, \beta) \Rightarrow t = \ln M(\alpha, \beta), \\ x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty. \end{array} \right\}$$

$$= \int_{\ln M(\alpha, \beta)}^{+\infty} t^\beta e^{(1+\alpha)t} dt : \left\{ \begin{array}{l} \text{convergeix } \forall \beta, \text{ quan } \alpha < -1, \\ \text{convergeix } \iff \beta < -1, \text{ quan } \alpha = -1, \\ \text{divergeix } \forall \beta, \text{ quan } -1 < \alpha < 0. \end{array} \right.$$

Sigui $A \subset \mathbb{R}^2$ donat per:

$$A = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < -1\} \cup \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha = -1, \beta < -1\}. \quad (2)$$

Així, dels punts 1) i 2) es conclou que, per tot β , la sèrie és divergent quan $\alpha \geq 0$. En canvi, per $\alpha < 0$ es segueix, aplicant el criteri integral al que s'ha vist al punt 3):

$$\int_{M(\alpha, \beta)}^{+\infty} x^\alpha (\ln x)^\beta dx \text{ convergent} \iff (\alpha, \beta) \in A \implies \sum_{p \geq 2} p^\alpha (\ln p)^\beta \text{ convergent} \iff (\alpha, \beta) \in A.$$

Finalment doncs, queda clar que:

$$\sum_{p \geq 2} p^\alpha (\ln p)^\beta \text{ convergent} \iff (\alpha, \beta) \in A,$$

essent A el domini del pla de paràmetres (α, β) donat per (2). A la figura 1, l'àrea ombrejada representa aquesta regió de convergència. \triangleright

14. Essent $\sum a_p$ convergent $a_p \geq 0, b_p \geq 0$:

a) Proveu que si (b_p) és acotada, és $\sum a_p b_p$ convergent.

b) Proveu que si $\sum b_p$ és convergent, és $\sum \sqrt{a_p b_p}$ convergent.

c) En particular, deduiu que $\sum \frac{1}{p} \sqrt{a_p}$ és convergent.

\triangleleft **Solució.**

a) com que $(b_p)_{p \geq 0}$ amb $b_p \geq 0$ és fitada, existeix $M \geq 0$ tal que: $b_p \leq M$ per tot p . Aleshores, $0 \leq a_p b_p \leq M a_p$ per tot p (ja que $a_p \geq 0$ per tot p); per tant:

$$\sum_{p \geq 0} a_p \text{ convergent} \implies \sum_{p \geq 0} a_p b_p \text{ convergent (criteri de majorització)}.$$

⁽²⁾ i. e. si $x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor := \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$.

- b) Com que $0 \leq \sqrt{a_p b_p} \leq \frac{1}{2}(a_p + b_p)$ per tot p ; les sèries $\sum_{p \geq 0} a_p$ i $\sum_{p \geq 0} b_p$ són convergents (i per tant $\sum_{p \geq 0} (a_p + b_p)$ també és convergent; del criteri de majorització es dedueix la convergència de $\sum_{p \geq 0} \sqrt{a_p b_p}$.
- c) Només cal aplicar b agafant $b_p = \frac{1}{p^2}$. \triangleright

15. a) Essent $\sum a_p, a_p \geq 0$, proveu el “criteri logarítmic”:

$$\lim \frac{\ln \frac{1}{a_p}}{\ln p} = L > 1 \Rightarrow \sum a_p \text{ CONV.}, \quad \frac{\ln \frac{1}{a_p}}{\ln p} = L < 1 \Rightarrow \sum a_p \text{ DIV.}$$

b) Apliqueu-lo per a discutir, segons el valor de $\alpha > 0$, la convergència de la sèrie $\sum \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)^{-p \ln p}$.

◁ **Solució.**

a) Com que suposen que aquest límit existeix i val L llavors, de la definició de límit es té que:

$$\forall 0 < \varepsilon < L \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : p \geq N \implies L - \varepsilon < \frac{\ln \frac{1}{a_p}}{\ln p} < L + \varepsilon,$$

d'on es segueix que:

$$\frac{1}{p^{L+\varepsilon}} < a_p < \frac{1}{p^{L-\varepsilon}}, \quad \text{per tot } p \geq N(\varepsilon). \quad (3)$$

Així, si $L > 1$ agafem, per exemple, $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$ i aplicant (3) tindriem:

$$0 \leq a_p \leq \frac{1}{p^{\frac{L+1}{2}}}, \quad \text{per } p \geq N\left(\frac{L-1}{2}\right). \text{ I com que: } \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^{\frac{L+1}{2}}} \text{ convergent} \implies \sum_{p \geq 1} a_p \text{ convergent}$$

(notem que $\frac{L+1}{2} > 1$, ja que $L > 1$). Per $L < 1$, podem triar: $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$ i, per (3) es té:

$$a_p > \frac{1}{p^{\frac{1+L}{2}}}, \quad \text{per } p \geq N\left(\frac{1+L}{2}\right). \text{ I com que: } \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^{\frac{1+L}{2}}} \text{ divergent} \implies \sum_{p \geq 1} a_p \text{ divergent}$$

(notem que $\frac{L+1}{2} < 1$ quan, com ara $L < 1$). En tots dos casos hem aplicat comparació per majorització.

b) En aquest cas particular $a_p = \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)^{-p \ln p}$ i llavors:

$$L = \lim_p \frac{\ln \frac{1}{a_p}}{\ln p} = \lim_p \frac{\ln \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)^{p \ln p}}{\ln p} = \lim_p \frac{p \ln p \ln \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)}{\ln p} = \lim_p p \frac{\alpha}{p} = \alpha.$$

Aleshores, per aplicació directa del que s'ha provat a l'apartat anterior, si $\alpha > 1$ la sèrie és convergent; si $\alpha < 1$ la sèrie és divergent. Mirem què passa si $\alpha = 1$. De $\left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)^p \leq e \implies \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p \ln p} \leq e^{\ln p} = p \implies \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-p \ln p} \geq \frac{1}{p} > 0$. I com que $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p}$ divergent $\implies \sum_{p \geq 1} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-p \ln p}$ divergent (criteri de majorització). Resumint: si $\alpha > 0$, $\sum_{p \geq 1} \left(1 + \frac{\alpha}{p}\right)^{-p \ln p}$ és convergent $\Leftrightarrow \alpha > 1$. \triangleright

16. a) (Criteri de condensació de Cauchy). Essent $(a_p) \rightarrow 0$ decreixentment: $\sum a_p$ és convergent si i només si ho és $\sum 2^q a_{2^q} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$

b) Apliqueu-lo per a estudiar la convergència de les sèries:

$$\sum \frac{1}{p \ln p}, \quad \sum \frac{1}{p \ln p \ln(\ln p)}.$$

◁ **Solució.** a) Siguin $A_p = \sum_{k=0}^p a_k$ i $B_p = \sum_{k=0}^p 2^k a_{2^k}$ les sumes parcials de les sèries $\sum_{p \geq 0} a_p$ i $\sum_{p \geq 0} 2^p a_{2^p}$. Llavors, per $p \geq 0$ tenim d'una banda:

$$A_p = \sum_{k=0}^p a_k \leq a_0 + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ln p}{\ln 2} \rfloor} 2^k a_{2^k} = a_0 + B_{\lfloor \frac{\ln p}{\ln 2} \rfloor}, \quad (4)$$

on $\lfloor \cdot \rfloor$ és la funció part entera (veure nota (2) al problema 13, pàgina 7). En efecte:

$$\begin{aligned} 2^k a_{2^k} &\geq a_{2^k} + a_{2^{k+1}} + \cdots + a_{2^{q+1}-1} \Rightarrow a_0 + B_{\lfloor \frac{\ln p}{\ln 2} \rfloor} = a_0 + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ln p}{\ln 2} \rfloor} 2^k a_{2^k} \geq \\ &\geq a_0 + \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 p \rfloor} (a_{2^k} + a_{2^{k+1}} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \geq a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_p = A_p, \end{aligned}$$

per tot $p \geq 1$ i on hem fet servir que $\lfloor \frac{\ln p}{\ln 2} \rfloor = \lfloor \log_2 p \rfloor > \log_2 p - 1 \Rightarrow 2^{k+1} - 1 > 2^{\log_2 p - 1 + 1} - 1 = p - 1$ per tot $0 \leq k \leq \lfloor \frac{\ln p}{\ln 2} \rfloor$. De la mateixa manera:

$$B_p = \sum_{k=0}^p 2^k a_{2^k} \leq -2a_0 - a_1 + 2A_{2^p}; \quad (5)$$

com es pot comprovar d'immediat fent,

$$\begin{aligned} B_p &= \sum_{k=0}^p 2^k a_{2^k} = a_1 + 2 \sum_{k=1}^p 2^{k-1} a_{2^k} \leq a_1 + 2 \sum_{k=1}^p (a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \cdots + a_{2^k-1} + a_{2^k}) \\ &= a_1 + 2 \sum_{k=2}^{2^p} a_k = a_1 + 2(A_{2^p} - a_1 - a_0) = -2a_0 - a_1 + 2A_{2^p}, \end{aligned}$$

on utilitzem que $0 \leq a_{2^k} \leq a_{2^{k-1}+s}$, $1 \leq s \leq 2^{k-1}$, $2 \leq k \leq p$ (pel decreixement dels termes).

Suposem primer que $\sum_{p \geq 0} 2^p a_{2^p}$ és convergent; llavors B_p , que és monòtona creixent —suma acumulada de termes positius—, ha d'estar acotada superiorment. Aleshores, de (4), es dedueix que A_p —que és monòtona creixent per la mateixa raó que B_p —, també està fitada superiorment. Es conclou d'aquí la convergència de $\sum_{p \geq 0} a_p$. Recíprocament, sigui $\sum_{p \geq 0} a_p$ convergent. Essent, com s'ha dit, A_p monòtona creixent, aquesta haurà d'estar acotada superiorment, però (5) implica que B_p també ho està, i d'aquí es deriva d'immediat la convergència de $\sum_{p \geq 0} 2^p a_{2^p}$.

b) Per la primera $a_p = \frac{1}{p \ln p}$. Aleshores:

$$\sum_{p \geq 1} 2^p a_{2^p} = \sum_{p \geq 1} 2^p \frac{1}{2^p \ln 2^p} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p} \text{ (divergent)} \xrightarrow{a)} \sum_{p \geq 1} a_p = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p \ln p} \text{ divergent.}$$

Per la segona és $a_p = \frac{1}{p \ln p \ln(\ln p)}$. Aleshores:

$$\begin{aligned} \sum_{p \geq 2} 2^p a_{2^p} &= \sum_{p \geq 2} \frac{2^p}{2^p \ln 2^p \ln(\ln 2^p)} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{p \geq 2} \frac{1}{p(\ln p + \ln(\ln 2))} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p \ln p \left(1 + \frac{\ln(\ln 2)}{\ln p}\right)} \sim \sum_{p \geq 2} \frac{1}{p \ln p} \text{ div. (per } a)} \Rightarrow \sum_{p \geq 2} \frac{1}{2^p \ln 2^p \ln(\ln 2^p)} \text{ div.,} \end{aligned}$$

pel criteri de comparació per quocient per sèries de termes amb signe constant, donat que:

$$\lim_p \frac{p \ln p}{p} \frac{1}{p \ln p \left(1 + \frac{\ln(\ln 2)}{\ln p}\right)} = 1.$$

Per últim, el que s'ha demostrat a l'apartat a) garanteix la convergència de $\sum_{p \geq 2} \frac{1}{p \ln p \ln(\ln p)}$. ▷

17. Essent $\sum a_n, a_n \geq 0$, una sèrie divergent, proveu que:

$$(a) \sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n} \text{ és convergent.} \quad (b) \sum \frac{a_n}{1+a_n} \text{ és divergent.}$$

◁ **Solució.**

(a) De $\frac{a_n}{1+n^2 a_n} \leq \frac{1}{n^2}$ per tot n . Aleshores, del criteri de majorització:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ CONV.} \implies \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1+n^2 a_n} \text{ CONV.}$$

(notem que no cal la divergència de $\sum_{n \geq 1} a_n$).

(b) Podem suposar $a_n \neq 0$ (si no, els treiem i encara $\sum a_n = +\infty$). Si $\lim_n a_n = 0$, llavors es segueix directament de la definició de límit que hi ha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq a_n \leq 1$ per tot $n \geq n_0$. Per tant,

$$\frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{a_n}{2}, \quad \forall n \geq n_0$$

i del criteri de comparació per majorització:

$$\sum_{n \geq 0} a_n \text{ DIV.} \implies \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{1+a_n} \text{ DIV.}$$

En canvi, si $a_n \not\rightarrow 0$ llavors $\frac{a_n}{1+a_n} \not\rightarrow 0$ i la sèrie és divergent ja que no es satisfà la condició necessària de Cauchy. ▷

18. a) Essent $\sum a_p$ i $\sum b_p$ dues sèries de termes positius, suposem que existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{b_{p+1}}{b_p} \leq \frac{a_{p+1}}{a_p}, \forall p \in \mathbb{N}. \text{ Proveu que si } \sum a_p \text{ és convergent, llavors } \sum b_p \text{ també és convergent.}$$

b) Apliqueu-ho per a estudiar la convergència de la sèrie $\sum \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2p)}$.

◁ **Solució.** a) Per tot $p > N$ es té:

$$\begin{aligned} \frac{b_{p+1}}{b_{N+1}} &= \frac{b_{p+1}}{b_p} \cdot \frac{b_p}{b_{p-1}} \cdot \frac{b_{p-1}}{b_{p-2}} \cdot \frac{b_{p-2}}{b_{p-3}} \cdot \dots \cdot \frac{b_{N+3}}{b_{N+2}} \cdot \frac{b_{N+2}}{b_{N+1}} \\ &\leq \frac{a_{p+1}}{a_p} \cdot \frac{a_p}{a_{p-1}} \cdot \frac{a_{p-1}}{a_{p-2}} \cdot \frac{a_{p-2}}{a_{p-3}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} = \frac{a_{p+1}}{a_{N+1}} \implies 0 \leq b_{p+1} \leq \frac{b_{N+1}}{a_{N+1}} a_{p+1}. \end{aligned}$$

I com que $\sum a_p$ és convergent, per majorització tenim que $\sum b_p$ és convergent.

REMARCA 1.1. De la mateixa manera es demostra per aquest cas que si existeix $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{b_{p+1}}{b_p} \geq \frac{a_{p+1}}{a_p}, \quad \forall p > N.$$

Llavors $\sum a_p$ divergent $\implies \sum b_p$ divergent.

b) $b_p = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2p+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2p)}$. Aleshores:

$$\frac{b_{p+1}}{b_p} = \frac{2p+1}{2p+2} \geq \frac{p}{p+1} = \frac{1/(p+1)}{1/p} \quad \forall p > 1,$$

($a_p = 1/p$). I com que $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p}$ és divergent, la sèrie estudiada és divergent (remarca 1.1). ▷

19. Calculeu la suma de les sèries:

$$(a) \sum \frac{1}{p(p+1)}, \quad (b) \sum \frac{1}{(2p-1)(2p+1)}, \quad (c) \sum \frac{p+12}{p^3+5p^2+6p}.$$

◁ **Solució.** Si $a_p = b_{p+1} - b_p =: \Delta b_p$, la sèrie corresponent, $\sum a_p = \sum \Delta b_p$, s'anomena sèrie *telescòpica*. En particular,

$$\sum_{p=M}^{N-1} a_p = \sum_{p=M}^{N-1} \Delta b_p = b_N - b_M \Rightarrow \sum_{p \geq M} a_p = \sum_{p \geq M} \Delta b_p = \lim_{N \rightarrow +\infty} (b_N - b_M).$$

Aleshores:

$$\sum_{M \geq 0} a_p = \sum_{p \geq M} \Delta b_p \text{ convergent} \iff \lim_p b_p \text{ existeix i és finit.}$$

(a) És una sèrie telescòpica. En efecte, descomposant el fraccions simples el seu terme general, es té:

$$a_p = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = b_{p+1} - b_p$$

amb: $b_p = -\frac{1}{p}$; llavors,

$$\sum_{p=M}^{N-1} \frac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=M}^{N-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{M} - \frac{1}{N}$$

i per $M = 1$:

$$\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p(p+1)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{N} \right) = 1.$$

(b) També és una sèrie telescòpica:

$$a_p = \frac{1}{(2p-1)(2p+1)} = \frac{1/2}{2p-1} - \frac{1/2}{2p+1} = b_{p+1} - b_p,$$

on ara agafem: $b_p = \frac{-1/2}{2p-1}$. Per tant,

$$\sum_{p=M}^{N-1} \frac{1}{(2p-1)(2p+1)} = \sum_{p=M}^{N-1} \left(\frac{1/2}{2p-1} - \frac{1/2}{2p+1} \right) = \frac{1/2}{2M-1} - \frac{1/2}{2N-1}$$

i per $M = 0$:

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p-1)(2p+1)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1/2}{-1} - \frac{1/2}{2N-1} \right) = -\frac{1}{2}.$$

(c) A partir de la descomposició en fraccions simples del terme general:

$$\begin{aligned} \frac{p+12}{p^3+5p^2+6p} &= \frac{p+12}{p(p+2)(p+3)} = \frac{2}{p} - \frac{5}{p+2} + \frac{3}{p+3} \\ &= \frac{2}{p} - \frac{2}{p+1} + \frac{2}{p+1} - \frac{2}{p+2} + \frac{3}{p+3} - \frac{3}{p+2}, \end{aligned}$$

es veu que la sèrie es pot descomposar com suma de tres sèries telescòpiques convergents:

$$\sum_{p \geq 1} \Delta b_p = \sum_{p \geq 1} (b_{p+1} - b_p) = \sum_{p \geq 1} \left(\frac{-2}{p+1} - \frac{-2}{p} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2}{N} \right) = 2,$$

$$\sum_{p \geq 1} \Delta c_p = \sum_{p \geq 1} (c_{p+1} - c_p) = \sum_{p \geq 1} \left(\frac{-2}{p+2} - \frac{-2}{p+1} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{N+1} \right) = 1,$$

$$\sum_{p \geq 1} \Delta d_p = \sum_{p \geq 1} \left(\frac{3}{p+3} - \frac{3}{p+2} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{N+2} - 1 \right) = -1.$$

Aleshores:

$$\sum_{p \geq 1} \frac{p+12}{p^3+5p^2+6p} = \sum_{p \geq 1} (\Delta b_p + \Delta c_p + \Delta d_p) = \sum_{p \geq 1} \Delta b_p + \sum_{p \geq 1} \Delta c_p + \sum_{p \geq 1} \Delta d_p = 2 + 1 - 1 = 2. \triangleright$$

20. Demostreu les següents expressions d'acotació del residu:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left| \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p}{p+1} \frac{1}{3^p} - \sum_{p=0}^N \frac{p}{p+1} \frac{1}{3^p} \right| < \frac{1}{3^N 2}. \\ \text{b)} \quad & \left| \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} - \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} \right| < \frac{1}{N!N}. \end{aligned}$$

◁ **Solució.**

a) Per tot $N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p}{p+1} \frac{1}{3^p} - \sum_{p=0}^N \frac{p}{p+1} \frac{1}{3^p} \right| = \sum_{p \geq N+1} \underbrace{\frac{p}{p+1}}_{< 1 \forall p \in \mathbb{N}} \frac{1}{3^p} < \sum_{p \geq N+1} \frac{1}{3^p} = \frac{1}{3^{N+1}} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{3^p} = \frac{1}{3^{N+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^N 2}.$$

b) Per tot $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} - \sum_{p=0}^N \frac{1}{p!} \right| &= \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+2)!} + \frac{1}{(N+3)!} + \frac{1}{(N+4)!} + \dots + \frac{1}{(N+k)!} + \dots \\ &= \frac{1}{(N+1)!} \left(1 + \frac{1}{(N+2)} + \frac{1}{(N+2)(N+3)} + \frac{1}{(N+2)(N+3)(N+4)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{1}{(N+2)(N+3) \dots (N+k)} + \dots \right) \\ &< \frac{1}{(N+1)!} \left(1 + \frac{1}{(N+1)} + \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^3} + \dots + \frac{1}{(N+1)^{k-1}} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{(N+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{N+1}} = \frac{1}{(N+1)!} \frac{N+1}{N+1-1} = \frac{1}{N!N}. \end{aligned}$$

On hem fet servir que $\prod_{j=2}^k (N+j) = (N+2)(N+3)(N+4) \dots (N+k) > (N+1)^{k-1}$ per tot $N \in \mathbb{N}$ i tot $\mathbb{N} \ni k \geq 2$. Exercici: comproveu això últim per inducció. \triangleright