Alguns problemes d'aplicació de Càlcul I

Problema 1

Considerem la funció de cost

$$z = f(x, y; \alpha, \beta) = \alpha e^x + \beta(x^2 + y^2)^2 - 3x - 8y$$

on $\alpha, \beta > 0$ són variables externes (de control, de configuració...) i x, y són variables internes (d'estat, de funcionament,...)

(a) Demostreu que per a $\alpha = 3$, $\beta = 2$, el punt òptim de funcionament (és a dir, el mínim de f) és $x = 0$, $y = 1$.

(b) Demostreu que, en general, par a (α, β) pròxim a $(3, 2)$ existeix un únic punt òptim de funcionament pròxim a $(0, 1)$. Si el designem per $x^*(\alpha, \beta)$, $y^*(\alpha, \beta)$; el cost òptim per a cada valor de (α, β) pròxim a $(3, 2)$ és doncs:

$$z^*(\alpha, \beta) = f\left(x^*(\alpha, \beta), y^*(\alpha, \beta); \alpha, \beta\right)$$

(c) Calculeu per a $(\alpha, \beta) = (3, 2)$:
  (a) els gradients de x^*, y^*.
  (b) el gradient de z^*

(d) utilitzeu-les per determinar, a partir de la situació inicial $\alpha = 3$, $\beta = 2$:
  (a) en quina direcció la variació de (α, β) és més ràpida la disminució del cost òptim $z^*(\alpha, \beta)$
  (b) aleshores, en quina direcció variarà el punt òptim de funcionament (x^*, y^*)?

Solució: Al llarg de la resolució d'aquest problema farem ús del fet de que la funció $f(x, y; \alpha, \beta)$, per a valors de les variables externes propers a $\alpha = 3$, $\beta = 2$, és *convexa*. Així que primer de tot, donarem –apart de la definició del que s'entén per funció convexa–, algunes de les propietats i caracteritzacions d'aquests tipus de funcions. Comencem doncs amb les definicions:

Definició 1.1 (Segment lineal)**.** Siguin $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ amb $x_1 \neq x_2$. Anomenarem segment lineal de x_1 a x_2 i el denotarem per $L(x_1, x_2)$ al conjunt imatge de l'interval $[0, 1]$ de la recta real per l'aplicació ℓ_{x_1,x_2}, definida per:

$$[0, 1] \ni t \stackrel{\ell_{x_1,x_2}}{\longrightarrow} tx_1 + (1 - t)x_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Així:

$$L(x_1, x_2) = \ell_{x_1,x_2}([0, 1]).$$

Exercici 1.2. Interpreteu aquesta definició (per exemple a $\mathbb{R}^2$), en termes de la geometria elemental que coneixem.

Definició 1.3 (Conjunt Convex)**.** Sigui $K \subset \mathbb{R}^n$, K és un conjunt convex si per dos elements qualssevol x_1, x_2 de K, $L(x_1, x_2) \subset K$.

Per exemple, les boles a $\mathbb{R}^n$ i el propi $\mathbb{R}^n$ són exemples immediats de conjunts convexos. Una il·lustració naïf d'aquest concepte al plà, la teniu a la figura 1.

(a) Conjunt convex (b) Conjunt no convex

Figura 1. Convexitat a $\mathbb{R}^2$.

Definició 1.4 (Funció convexa)**.** Sigui $K \subset \mathbb{R}^n$ conjunt convex. Una funció $f \to \mathbb{R}$ es diu convexa, si per a cada $x_1, x_2 \in K$ i $t \in [0,1]$ es satisfà:

$$f\left(tx_1 + (1-t)x_2\right) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{1}$$

Si la desigualtat és estricta ($<$) sempre que $x_1 \neq x_2$ i $0 < t < 1$, direm que f és **convexa estricta** en K.

De fet, hem imposat que la funció estigui definida en un conjunt convex, K, per tenir garantit que el punt $tx_1 + (1-t)x_2$ hi pertany al domini.

Ara que ja saben el que és una funció convexa, enunciarem algunes de les seves propietats, en forma de proposicions i teoremes.

Proposció 1.5. *Sigui f una funció diferenciable en un conjunt convex K. Llavors, f és convexa en K, si i només si:*

$$f(x) \geq f(x_0) + df_{x_0}\left(x - x_0\right), \tag{2}$$

$\forall x, x_0 \in K$.

$\triangleleft$ **Prova**: Suposem que f és convexa en K. Siguin $x, x_0 \in K$. Definim $h = x - x_0$ i prenem un $t \in (0,1)$. Per definició de convexitat sabem que:

$$f\left(x_0 + th\right) = f\left(t(x_0 + h) + (1-t)x_0\right) \leq tf(x_0 + h) + (1-t)f(x_0),$$

d'aquí,

$$f\left(x_0 + th\right) - f(x_0) \leq t\left(f(x_0 + h) - f(x_0)\right). \tag{3}$$

A aquesta última equació, restem $tdf_{x_0}(h)$ a totes dues bandes i dividim per $t \in (0,1)$, queda doncs:

$$\frac{f(x_0 + th) - f(x_0) - tdf_{x_0}}{t} \leq f(x_0 + th) - f(x_0) - df_{x_0}(h),$$

i com que el terme de l'esquerra tendeix cap a zero quan $t \to 0^+$, resulta que es satisfà:

$$f(x_0 + h) = f(x) \geq f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0).$$

Recíprocament, suposen (2), i siguin $x_1, x_2 \in K$ amb $x_1 \neq x_2$ i $t \in (0,1)$. Considerem $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$, i $h = x_1 - x_0$, o sigui $x_1 = h + x_0$. Manipulant una mica es veu que x_2 es pot posar com:

$$x_2 = x_0 - \frac{t}{1-t}h.$$

Tenim aleshores les dues desigualtats

$$\begin{aligned} f(x_1) &\geq f(x_0) + df_{x_0}(h), \\ f(x_2) &\geq f(x_0) - \frac{t}{1-t}df_{x_0}(h). \end{aligned}$$

Multiplicant per $\frac{t}{1-t}$ la primera i sumant totes dues, obtenim:

$$\frac{t}{1-t}f(x_1) + f(x_2) \geq \left(1 + \frac{t}{1-t}\right) f(x_0),$$

o equivalentment,

$$f(x_0) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

y com que $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$, tenim que:

$$f\left(x_1 + (1-t)x_2\right) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2),$$

per a qualssevol $x_1, x_2 \in K$ amb $x_1 \neq x_2$ i $t \in (0,1)$. Tanmateix, si $x_1 = x_2$, o $t = 0, 1$ aquesta desigualtat es satisfà de manera trivial. Això acaba la demostració $\triangleright$.

Proposció 1.6. *Sigui f diferenciable en un conjunt convex K. Llavors f és convexa estricta en K si i només si*

$$f(x) > f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0) \tag{4}$$

per a cada $x, x_0 \in K$ amb $x \neq x_0$.

$\triangleleft$ **Prova**: Si f és estrictament convexa en K, en particullar, és convexa en K i llavors es satisfà (2) $\forall x, x_0 \in K$. Suposem $x \neq x_0$, i sigui $h = x - x_0$. Per tot $t \in (0,1)$ tenim, aplicant (2) amb x reemplaçada per $x_0 + th$:

$$f\left(x_0 + th\right) \geq f(x_0) + df_{x_0}(th) \Rightarrow df_{x_0}(th) \leq f(x_0 + th) - f(x_0),$$

i a continuació, fent servir (3), ara amb la desigualtat estricta, car f és convexa estricta, s'arriba a:

$$tdf_{x_0}(h) < t\left[f(x_0 + th) - f(x_0)\right],$$

de manera que dividint tots dos membres per $t > 0$ i recordant que $x = x_0 + th$ s'obté (4).

La demostració del recíproc és idèntica a la del recíproc de la proposició 1.5, posant però totes les desigualtats estrictes $\triangleright$.

Per últim, enunciarem un teorema sobre els punts crítics de les funcions convexes.

Teorema 1.7. *Si f és diferenciable i convexa en un conjunt convex $K \subset \mathbb{R}^n$, i $x_0 \in K$ és un punt crític (i. e., $\nabla f(x_0) = 0$), llavors f té un mínim absolut en x_0.*

$\triangleleft$ **Demostració**: Com que $df_{x_0} = 0$, per (2) de la proposició 1.5, tenim que $f(x) > f(x_0) \forall x \in A$, la qual cosa implica que f té un mínim absolut a x_0 $\triangleright$.

Corol·lari 1.8. *Una funció diferenciable que és* ***estrictament*** *convexa només pot tenir un punt crític.*

$\triangleleft$ **Prova**: Suposem que hi hagués dos punts crítics $x_0, x_1 \in K$, amb $x_1 \neq x_0$. Pel teorema anterior seria,

$$f(x_0) = f(x_1) \leq f(x),$$

per a cada $x \in K$. Donat que $df_{x_0} = 0$, per la proposició 1.6,

$$f(x) < f(x_0).$$

Contradicció i, per tant, només pot ser $x_1 = x_0$ $\triangleright$.

I.1 Considerem la funció

$$f(x, y, \alpha, \beta) = \alpha(y^2 - x) + \beta(x^2 - y)^2,$$

amb $\alpha, \beta > 0$ i $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Estudiarem els seus extrems. Així trobem primer els zeros de les seves derivades. Plantegem doncs el sistema d'equacions $D_x f(x, y, \alpha, \beta) = 0, D_y(x, y, \alpha, \beta) = 0$. Un cop calculades les derivades queda, explícitament:

$$\begin{aligned} D_x f(x, y, \alpha, \beta) &= -\alpha + 4\beta x^3 - 4\beta xy = 0, \\ D_y f(x, y, \alpha, \beta) &= 2(\alpha + \beta)y - 2\beta x^2 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

De la segona d'aquestes equacions, aïllant y en funció de x es té $y = \frac{\beta}{\alpha+\beta}x^2$. Substituint a la primera, podem aïllar x i després y com a funció dels paràmetres α i β. Denotarem aquestes funcions per x^* i y^*; les quals vénen donades per

$$x^* = \sqrt[3]{\frac{\alpha+\beta}{4\beta}}, \quad y^* = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\beta}{2(\alpha+\beta)}} \tag{6}$$

A continuació estudiem la matriu hessiana de f, $H_f(x,y)$, que es pot comprovar que és,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12\beta x^2 - 4\beta y & -4\beta x \\ -4\beta x & 2(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Definim $\mathfrak{T} :=$ traça H_f, $\mathfrak{d} := \det H_f$. Siguin a més:

$$\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}(x^*(\alpha,\beta), y^*(\alpha,\beta)), \ \text{ i } \ \mathfrak{d}^* = \mathfrak{d}(x^*(\alpha,\beta), y^*(\alpha,\beta)).$$

Fent càlculs resulta,

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^* &= (3\alpha+2\beta)\sqrt[3]{\frac{4\beta}{\alpha+\beta}} + 2(\alpha+\beta) \\ \mathfrak{d}^* &= 6\alpha\sqrt[3]{4\beta(\alpha+\beta)^2}. \end{aligned}$$

Com que $\alpha, \beta > 0$, és $\mathfrak{T}^* > 0$ i $\mathfrak{d}^* > 0$. Llavors la matriu hessiana H_f és definida positiva i f té un punt de mínim relatiu a $(x^*(\alpha,\beta), y^*(\alpha,\beta))$.

Calculem a continuació quant val aquest mínim. D'acord amb l'enunciat, definim $z^*(\alpha,\beta) := f(x^*(\alpha,\beta), y^*(\alpha,\beta), \alpha, \beta)$. Es comprova que

$$z^*(\alpha,\beta) = \alpha\left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{4(\alpha+\beta)^2}} - \sqrt[3]{\frac{\alpha+\beta}{4\beta}}\right) + \beta\left(\sqrt[3]{\frac{(\alpha+\beta)^2}{16\beta^2}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\beta}{2(\alpha+\beta)}}\right)^2 = -\frac{3}{4}\alpha\sqrt[3]{\frac{\alpha+\beta}{4\beta}}.$$

I.2 Sigui x_0 un mínim de la funció $f(\cdot;\alpha_0)$. Això vol dir que:

$$D_1 f(x_0;\alpha_0) = \cdots = D_n f(x_0;\alpha_0) = 0$$

i a més, que la matriu hessiana de f a (x_0,α_0), $H_f(x_0,\alpha_0)$, és definida positiva. Sigui $M : \mathcal{A}\times\Omega \to \mathbb{R}^n$, donada per: $(x;\alpha) \mapsto (\text{grad}\, f(x;\alpha))^t$. És a dir:

$$M(x;\alpha) := (D_1 f(x;\alpha), \ldots, D_n f(x;\alpha)).$$

Aleshores plantegem el sistema:

$$M(x,\alpha) = 0, \tag{7}$$

que té solució per a $(x;\alpha) = (x_0;\alpha_0)$. Com que M és de classe $\mathcal{C}^2$ i a més es satisfà:

$$\det\left(d_x M_{(x_0;\alpha_0)}\right) = \det H_f(x_0;\alpha_0) > 0$$

($H_f(x_0;\alpha_0)$ definida positiva); pel teorema de la funció implícita sabem que, localment en un entorn de $(x_0;\alpha_0)$, $x = x(\alpha)$, és de classe C^2 i amb $x_0 = x(\alpha_0)$. A més, $x(\alpha)$ és el punt tal que:

$$D_1 f(x(\alpha);\alpha) = \cdots = D_n f(x(\alpha);\alpha) = 0.$$

Com que $x(\alpha)$ és de classe $\mathcal{C}^2$, en particular és contínua i $H_f(x(\alpha),\alpha)$ també serà contínua en α. Per tant, donat que per $\alpha = \alpha_0$, $H_f(x(\alpha_0);\alpha_0) = H_f(x_0;\alpha_0)$ és definida positiva, per continuïtat, $H_f(x(\alpha),\alpha)$ també serà definida positiva per α suficientment propera a α_0.

Finalment, la continuïtat de f i de $x(\alpha)$ garanteix que el mínim en $(x(\alpha);\alpha)$ és també un mínim absolut.

I.3 Sigui ara f la funció:

$$f(x,y,\alpha,\beta) = \alpha e^x + \beta(x^2+y^2)^2 - 3x - 8y.$$

Les seves derivades parcials són:

$$\begin{aligned} D_x f(x,y;\alpha,\beta) &= \alpha e^x + 4\beta x(x^2+y^2) - 3 \\ D_y f(x,y;\alpha,\beta) &= 4\beta y(x^2+y^2) - 8. \end{aligned}$$

Veiem que $(x_0, y_0; \alpha_0, \beta_0) = (0,1;3,2)$, és un *punt crític* de f, i. e., les dues derivades parcials de f s'anul·len simultàniament en aquest punt:

$$D_x f(0,1;3,2) = 3 - 3 = 0, \quad D_y f(0,1;2,3) = 8 - 8 = 0.$$

D'altra banda, la matriu hessiana de f és, al mateix punt:

$$\begin{aligned} H_f(0,1;3,2) &= \begin{pmatrix} \alpha e^x + 12\beta x^2 + 4\beta y^2 & 8\beta xy \\ 8\beta xy & 4\beta x^2 + 12\beta y^2 \end{pmatrix}_{(0,1;3,2)} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

i ja es veu que és definida positiva. (**Nota 1**: de fet, si calculem la traça i el determinant de H_f en un punt qualsevol,

$$\begin{aligned} \text{traça}\, H_f(x,y;\alpha,\beta) &= \alpha e^x + 16\beta x^2 + 16\beta y^2, \\ \det H_f(x,y;\alpha,\beta) &= 4\alpha\beta e^x(x^2+3y^2) + 48\beta^2(x^2+y^2)^2, \end{aligned}$$

per tant, H_f és definida positiva $\forall \alpha, \beta > 0$ i $(x,y) \neq 0$).

II.1 Havíem trobat les derivades parcials de la funció al cas **I.3**. Les equacions que definien x^*, y^* eren:

$$\begin{aligned} \alpha e^x + 4\beta x^3 + 4\beta xy^2 - 3 &= 0, \qquad (8) \\ 4\beta x^2 y + 4\beta y^3 - 8 &= 0, \qquad (9) \end{aligned}$$

derivem respecte de α i tenim el sistema,

$$D_\alpha : \begin{cases} e^x + \alpha e^x D_\alpha x + 12\beta x^2 D_\alpha x + 4\beta y^2 D_\alpha x + 8\beta xy D_\alpha y = 0, \\ 4\beta x^2 D_\alpha y + 8\beta xy D_\alpha x + 12\beta y^2 D_\alpha y = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Si ara avaluem aquest sistema, (10), a $x = 0, y = 1, \alpha = 3, \beta = 2$, s'arriba a un sistema lineal del qual s'obtenen $D_\alpha x(3,2)$ i $D_\alpha y(3,2)$. En efecte:

$$\left.\begin{aligned} 1 + 3D_\alpha x(3,2) + 8D_\alpha y(3,2) = 0, \\ 24 D_\alpha y(3,2) = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow D_\alpha x(3,2) = -\frac{1}{11}, \quad D_\alpha y(3,2) = 0.$$

A continuació, derivarem les equacions (8) i (9) respecte de β,

$$D_\beta : \begin{cases} \alpha e^x D_\beta x + 4x^3 + 12\beta x^2 D_\beta x + 4xy^2 + 4\beta y^2 D_\beta x + 8\beta xy D_\beta y = 0, \\ 4x^2 y + 8\beta xy D_\beta x + 4\beta x^2 D_\beta y + 4y^3 + 12\beta y^2 D_\beta y = 0. \end{cases}$$

Al punt $x = 0, y = 1, \alpha = 3, \beta = 2$ queda el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 11 D_\beta x(3,2) = 0, \\ 4 + 24 D_\beta y(3,2) = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow D_\beta x(3,2) = 0, \quad D_\beta y(3,2) = -\frac{1}{6}.$$

Càlcul de les derivades de z^*: si $z^*(\alpha,\beta)$ és el valor de la funció f al punt $(x^*(\alpha,\beta), y^*(\alpha,\beta))$, és a dir, $z^*(\alpha,\beta) = f(x^*(\alpha,\beta), y^*(\alpha,\beta), \alpha, \beta)$; llavors:

$$\begin{aligned} z^*(\alpha,\beta) = \alpha e^{x^*(\alpha,\beta)} + \beta \left(x^*(\alpha,\beta)^2 + y^*(\alpha,\beta)^2 \right)^2 - \\ - 3x^*(\alpha,\beta) - 8y^*(\alpha,\beta). \end{aligned} \qquad (11)$$

Derivem respecte de α i β i tenim:

$$\begin{aligned} D_\alpha z^* &= e^{x^*} + \alpha e^{x^*} D_\alpha x^* + 2\beta(x^{*2}+y^{*2})(2x^* D_\alpha x^* + 2y^* D_\alpha y^*) - \\ &- 3D_\alpha x^* - 8D_\alpha y^*, \\ D_\beta z^* &= \alpha e^{x^*} D_\beta x^* + (x^{*2}+y^{*2})^2 + 2\beta(x^{*2}+y^{*2})(2x^* D_\beta x^* + 2y^* D_\beta y^*) - \\ &- 3D_\beta x^* - 8D_\beta y^*. \end{aligned}$$

A continuació, avaluem les expressions d'adalt al punt $(\alpha, \beta) = (3, 2)$ per obtenir:

$$Dz^*(3,2) = (D_\alpha z^*(3,2), D_\beta z^*(3,2)) = (1,1) \tag{12}$$

Finalment, podem calcular les variacions induïdes en la direcció $-\mathrm{grad}\, z^*$ de x^*, y^* a $(\alpha, \beta) = (3, 2)$:

$$\begin{aligned} < -\mathrm{grad}\, z^*(3,2), \mathrm{grad}\, x^*(3,2) > &= \left\langle -(1,1), \left(-\frac{1}{11}, 0\right)\right\rangle = \frac{1}{11}, \\ < -\mathrm{grad}\, z^*(3,2), \mathrm{grad}\, y^*(3,2) > &= \left\langle -(1,1), \left(0, -\frac{1}{6}\right)\right\rangle = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

d'on es dedueix que la variació direccional induïda en $(x^*(3,2), y^*(3,2))$ és

$$D(x^*, y^*)_{(3,2)} \left(-\mathrm{grad}\, z^*(3,2)\right)^t = \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{6}\right).$$

II.2 Recordem que hem definit: $z^*(\alpha) = f(x^*(\alpha), \alpha)$. Notem que $x^*(\alpha)$ és solució del sistema: $D_x f(x^*(\alpha); \alpha) = 0$. Derivant aquesta última equació respecte d'α, s'obté:

$$H_f(x^*(\alpha); \alpha) \cdot Dx^*(\alpha) + D_\alpha D_x f(x^*(\alpha); \alpha) = 0,$$

d'on:

$$Dx^*(\alpha) = -\left(H_f(x^*(\alpha); \alpha)\right)^{-1} D_\alpha D_x f(x^*(\alpha); \alpha). \tag{13}$$

Derivem ara $z^*(\alpha)$:

$$Dz^*(\alpha) = Df(x^*(\alpha); \alpha) \cdot Dx^*(\alpha) + d_\alpha f(x^*(\alpha); \alpha) = d_\alpha f(x^*(\alpha); \alpha), \tag{14}$$

(ja que $Df(x^*(\alpha); \alpha) = 0$). La variació induïda de cadascuna de les $x_i^*(\alpha)$ vindrà donada per:

$$< -\mathrm{grad}\, z^*(\alpha), \mathrm{grad}\, x_i^*(\alpha) >;$$

i la variació direccional induïda de $x^*(\alpha)$ serà la proposada:

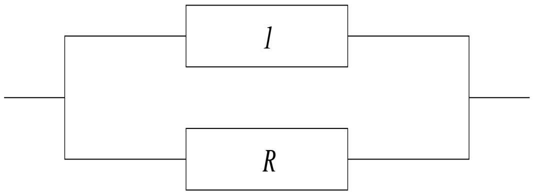
$$Dx^*(\alpha) \left(-\mathrm{grad}\, z^*(\alpha)\right)^t = -\left((H_f)^{-1} D_\alpha (D_x f)\right)_{(x^*(\alpha);\alpha)} D_\alpha f(x^*(\alpha); \alpha)^t. \tag{15}$$

Finalment, fem ús d'aquesta fòrmula, (15), per calcular la variació direccional induïda en $(x^*(3,2), y^*(3,2))$:

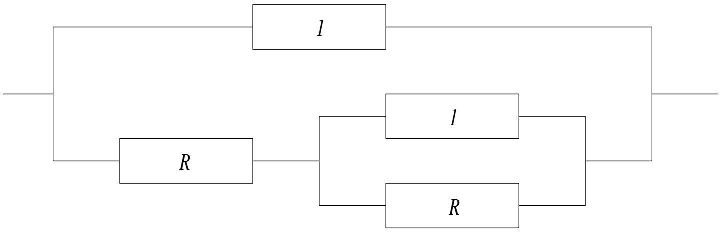
$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^x & 4(x^3+xy^2) \\ 0 & 4x^2y + 4y^3 \end{pmatrix}_{(0,1)} \begin{pmatrix} e^x \\ (x^2+y^2)^2 \end{pmatrix}_{(0,1)} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Problema 2

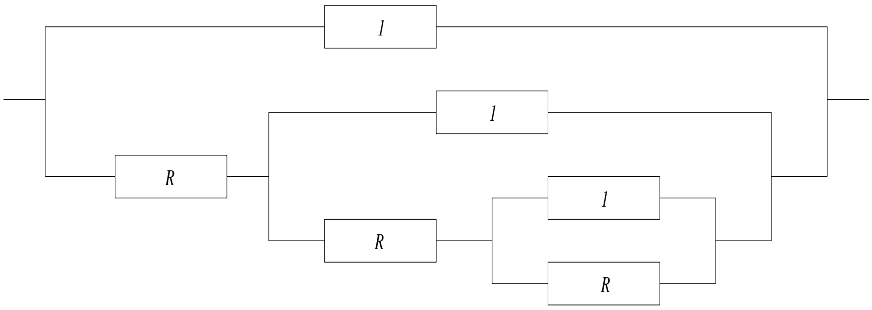
Sigui R una resistència elèctrica. Sigui x_0 la resistència equivalent del circuit



Igualment, sigui x_1 la resistència equivalent del circuit



x_2 la del circuit



etc, definint així x_n com una successió de nombres reals positius que denoten les resistències equivalents.

(a) Partint de que $x_0 = \frac{R}{1+R}$, construïu la fórmula recurrent de x_n.

(b) Demostreu que la successió és creixent i acotada superiorment.

(c) Demostreu que el límit de la successió està entre 0 i 1, i trobeu-lo. Raoneu a què tendeix la resistència equivalent si $R \to \infty$.

Solució: De les figures de l'enunciat, que indiquen com es va construint la successió de circuits, se'n dedueix que cadascun d'ells s'obté de l'anterior afegint-li una resistència R en sèrie, per després, al conjunt resultant, connectar-li en paral·lel una altra d'1Ω. Sigui doncs x_n la resistència equivaltent del circuit n-èsim.

1) Segons aquesta descripció, la resistència equivalent del circuit següent, x_{n+1}, vindrà donada per la fórmula:

$$x_{n+1} = \frac{R + x_n}{1 + R + x_n} \tag{1}$$

Si ara, de manera natural, definim la funció $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ per

$$f(x) = \frac{R + x}{1 + R + x},$$

la successió de resistències equivalents $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vé donada per la recurrència

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{amb} \quad x_0 = \frac{R}{1 + R}. \tag{2}$$

2) La funció f és creixent. En efecte $\forall x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{(1+R+x)^2} > 0.$$

Així doncs, suposant $x_{n+1} > x_n$, per a un cert $n \in \mathbb{N}$, es té:

$$x_{n+1} > x_n \Rightarrow x_{n+2} = f(x_{n+1}) > x_{n+1} = f(x_n),$$

car f és monòtona creixent. Això es satisfà també per a $n = 0$. En efecte:

$$x_1 = \frac{R + x_0}{1 + R + x_0} + x_0 - x_0 = x_0 + \frac{R}{(1+R)(1+3R+R^2)} > x_0,$$

(on s'ha tingut en compte que $x_0 = R/(1+R)$). Per tant, el principi d'inducció ens permet assegurar que la successió $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és monòtona creixent.

Per veure que és acotada superiorment només cal considerar que $\forall n \in \mathbb{N}$ és

$$x_n = \frac{R + x_{n-1} + 1 - 1}{1 + R + x_{n-1}} = 1 - \frac{1}{1 + R + x_{n-1}} < 1, \tag{3}$$

donat que $1 + R + x_{n-1} > 1$. (**Nota 2:** es pot provar, per exemple per inducció, que tots els termes de la successió són positius).

3) La successió és convergent puix és monòtona creixent i acotada superiorment. De (3) i del fet de que tots els termes siguin positius (veure nota 2), es dedueix que $0 < x_n < 1$, per tot n; d'on resulta que el límit, ℓ_R, estarà entre 0 i 1, i. e.: $0 < \ell_R \leq 1$. Fent servir les propietats algebraiques dels límits i aplicant-les a la relació de recurrència (2) que defineix la successió es té

$$\lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) \Rightarrow \ell_R = \frac{R + \ell_R}{1 + R + \ell_R}.$$

(Essent, com ja hem dit, $\ell_R = \lim_n x_n$). Per tant ℓ_R serà solució de l'equació de segon grau

$$\ell_R^2 + R\ell_R - R = 0,$$

que té dues solucions, una d'elles negativa; mentre que l'altra val

$$\ell_R = \frac{2R}{R + \sqrt{R^2 + 4R}}, \tag{4}$$

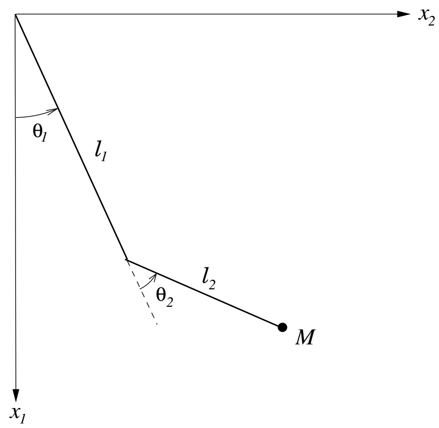
que clarament és més petita que 1. Així que serà aquest el valor del límit.

Finalment, quan la resistència R tendeix cap a infinit, $R \to \infty$, de (4) passant al límit s'obté:

$$\lim_{R\to\infty} \ell_R = 1.$$

Problema 3

Un braç articulat està format per sengles motors de torsió a les dues articulacions, de forma que la seva posició queda determinada pels angles θ_1, θ_2 (vegeu la figura). Se suposa que $\ell_1 > \ell_2$, $0 < \theta_1 < 2\pi$, $0 < \theta_2 < \pi$.



(A) **Anàlisi de posicions**

(a) **Cinètica directa**

(i) Determineu la funció

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [0,2\pi] \times [0,\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\theta_1,\theta_2) & \mapsto & (x_1,x_2) \end{array}$$

que al valor dels angles a les articulacions fa correspondre les coordenades cartesianes de la "mà" M (vegeu figura).

(ii) Determineu la forma A del pla abastada pel braç, és a dir, $A = \varphi(W)$, on $W = \{(\theta_1,\theta_2) : 0 < \theta_1 < 2\pi,\ 0 < \theta_2 < \pi\}$.

(b) **Cinètica inversa**. Demostreu que per a cada posició de la "mà" $M = (x_1,x_2) \in A$, hi ha només un possible valor de $(\theta_1,\theta_2) \in W$ tal que $(x_1,x_2) = \varphi(\theta_1,\theta_2)$.

(B) **Anàlisi de velocitats**

(a) **Diferenciabilitat**

(i) Demostreu que $\varphi \in C^\infty(W)$.

(ii) Demostreu que $\varphi^{-1} \in C^\infty(A)$.

(b) **Anàlisi de velocitats**

(i) Demostreu que la velocitat de M, $(\dot{x}_1,\dot{x}_2)$, es pot governar per les dels motors $(\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2)$.

(ii) En particular, per a $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, calculeu les velocitats $(\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2)$ necessàries per a obtenir les $(\dot{x}_1,\dot{x}_2)$ desitjades.

Solució: A(a)i: projectant el punt M sobre els eixos x_1, x_2 s'obtenen les components φ_1,φ_2 de l'aplicació φ,

$$x_1 = \ell_1\cos\theta_1 + \ell_2\cos(\theta_1+\theta_2), \tag{1}$$

$$x_2 = \ell_1\sin\theta_1 + \ell_2\sin(\theta_1+\theta_2), \tag{2}$$

on $x_1 = \varphi_1(\theta_1,\theta_2)$ i $x_2 = \varphi_2(\theta_1,\theta_2)$.

A(a)ii: Elevant al quadrat (1) i (2) i sumant s'obté,

$$x_1^2 + x_2^2 = \ell_1^2 + \ell_2^2 + 2\ell_1\ell_2\cos\theta_2. \tag{3}$$

De la mateixa manera, en (1) i (2), Passant $\ell_1\cos\theta_1$ i $\ell_1\sin\theta_1$ respectivament al terme de l'esquerra; elevant al quadrat les dues equacions i sumant-les obtenim:

$$x_1^2 + x_2^2 - 2\ell_1\left(x_1\cos\theta_1 + x_2\sin\theta_1\right) + \ell_1^2 = \ell_2^2 \tag{4}$$

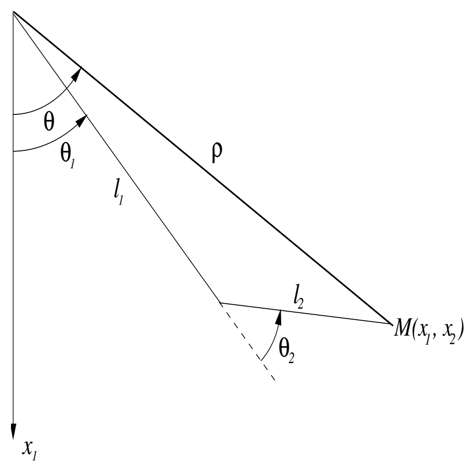


Figura 2. Coordenades polars ρ, θ.

Ara, introduim coordenades polars (veure figura 2), com coordenades auxiliars:

$$x_1 = \rho\cos\theta, \quad x_2 = \rho\sin\theta,$$

($\rho \in \mathbb{R}_0^+$, $0 \leq \theta < 2\pi$), i passem (3), (4) a aquestes coordenades. Així arribarem a les equacions:

$$\rho^2 = \ell_1^2 + \ell_2^2 + 2\ell_1\ell_2\cos\theta_2, \tag{5}$$

$$\rho^2 = \ell_2^2 - \ell_1^2 + 2\ell_1\rho\cos(\theta - \theta_1), \tag{6}$$

d'on aïllant $\cos\theta_2$ de la primera i $\cos(\theta - \theta_1)$ de la segona,

$$\cos\theta_2 = \frac{\rho^2 - \ell_1^2 - \ell_2^2}{2\ell_1\ell_2}, \tag{7}$$

$$\cos(\theta - \theta_1) = \frac{\rho^2 + \ell_1^2 - \ell_2^2}{2\ell_1\rho}. \tag{8}$$

De (7), tenint en compte que $0 < \theta_2 < \pi$, s'obté la condició:

$$\ell_1 - \ell_2 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \ell_1 + \ell_2, \tag{9}$$

Així doncs, per tal de que un punt del pla sigui abastable pel braç cal que hi pertany a l'interior d'una *corona circular*, $\mathcal{C}$, de radis $\ell_1 - \ell_2$ i $\ell_1 + \ell_2$ i per tant $\varphi(W) \subseteq \mathcal{C}$. Aquesta és una restricció geomètrica donada per les longituds màxima i mínima que pot assolir el braç.

A més, si multipliquem (1) per $\sin\theta_1$, (2) per $\cos\theta_1$ i restem la primera equació de la segona s'arriba a

$$\sin(\theta - \theta_1) = \frac{\ell_2}{\rho}\sin\theta_2. \tag{10}$$

D'aquesta manera, donat un punt de l'interior de $\mathcal{C}$ amb coordenades polars (ρ, θ); l'equació (7) determina unívocament l'angle θ_2 entre 0 i π. Un cop calculat θ_2, (8) i (10) ens permeten trobar el corresponent θ_1, que serà únic si el busquem entre 0 i 2π.[(1)]

Hem vist així que, donat un punt $(x_1, x_2) \in A$, existeix un únic parell d'angles (θ_1, θ_2) amb $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ i $0 < \theta_2 < \pi$ de manera que $\varphi(\theta_1, \theta_2) = (x_1, x_2)$.

Per finalitzar l'apartat, imposarem la restricció $\theta_1 \neq 0$. Cal esbrinar quins (x_1, x_2) són imatge de punts de la forma $(0, \theta_2)$ per a algun θ_2 entre 0 i π. Fixant $\theta_1 = 0$ a les equacions (1), (2) es té:

$$x_1 = \ell_1 + \ell_2\cos\theta_2,$$
$$x_2 = \ell_2\sin\theta_2.$$

[(1)]En efecte, (8) i (10) donen els valors de $\sin(\theta - \theta_1)$ i $\cos(\theta - \theta_1)$. Dels termes de la dreta es veu que tots dos son positius. Aleshores $\theta_1 = \theta - \xi$ amb $0 < \xi < \pi/2$, quan aquesta diferència sigui positiva o bé $\theta_1 = 2\pi + \theta - \xi$, quan sigui negativa.

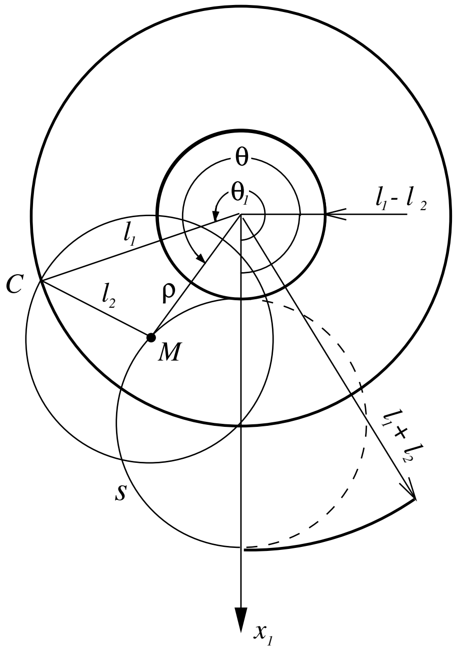


Figura 3. Els punts de la circumferència $\mathcal{S}$ amb $x_2 \geq 0$ (amb traç discontinu), no són accessibles al braç. En canvi, sí que ho són els punts M sobre la semicircumferència de l'esquerra.

que són –amb $0 < \theta_2 < \pi$–, les equacions paramètriques d'una semicircumferència centrada al punt $(x_1, x_2) = (\ell_1, 0)$, radi ℓ_2 i amb $x_2 > 0$. Els punts d'aquesta semicircumferència s'han de treure dels de la corona per donar el conjunt imatge A, el qual podrem escriure com

$$A = \Big\{(x_1, x_2) : \ell_1 - \ell_2 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \ell_1 + \ell_2\Big\}$$
$$-\Big\{(x_1, x_2) : (x_1 - \ell_1)^2 + x_2^2 = \ell_2^2, \text{ amb } x_2 > 0\Big\},$$

Observació. Notem però que els punts de la circumferència:

$$(x_1 - \ell_1)^2 + x_2^2 = \ell_2^2,$$

amb $x_2 < 0$, sí que són abastables pel braç (veure figura 3).

Cas (Ab): Com que estem considerant punts $M = (x_1, x_2) \in A$, es clar, per la definició de conjunt imatge, que hi haurà almenys un punt $(\theta_1, \theta_2) \in W$ tal que $(x_1, x_2) = \varphi(\theta_1, \theta_2)$, car A és la imatge de *l'espai de configuracions* del braç, W.

A l'apartat anterior hem provat que, donat un punt de $\mathcal{C}$, existeix una única antiimatge per φ: les equacions (7), (8) i (10) en les incògnites θ_1, θ_2 tenien solució amb $(\theta_1, \theta_2) \in W$ i a més, aquesta era única. D'aquí es segueix que l'aplicació φ, definida al conjunt W, és injectiva.

Geomètricament, el problema de, donat un punt $M = (x_1, x_2)$, trobar el corresponent parell d'angles (θ_1, θ_2) es redueix a un problema de determinació de triangles que consisteix en construir el triangle $\widehat{OCM}$ (figura 4); amb els vèrtexs O, M i els costats $\overline{OC} = \ell_1$ i $\overline{CM} = \ell_2$ fixats. Si agafem el punt $M = (x_1, x_2)$ a A, dibuixant una circumferència amb centre en O i radi ℓ_1, i una altra circumferència amb centre en M i radi ℓ_2; els vértexs C i C' corresponents a les dues configuracions possibles del braç que abasten el punt M, són els punts intersecció de les circumferències. Una d'aquestes configuracions però, no és admissible, ja que porta a un angle $\theta_2 < 0$ ó $\theta_2 > \pi$. D'aquí es dedueix la injectivitat de φ.

Podem provar directament la injectivitat. Així suposem que hi ha angles (θ_1, θ_2), $(\theta_1', \theta_2') \in W$ tal que $\varphi(\theta_1, \theta_2) = \varphi(\theta_1', \theta_2')$. Es tracta de veure que llavors, necessàriament $(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1', \theta_2')$.

De la condició $\varphi(\theta_1,\theta_2)=\varphi(\theta_1',\theta_2')$, resulten les equacions:

$$\ell_1\left(\cos\theta_1-\cos\theta_1'\right) = \ell_2\left(\cos(\theta_1'+\theta_2')-\cos(\theta_1+\theta_2)\right), \tag{11}$$

$$\ell_1\left(\sin\theta_1-\sin\theta_1'\right) = \ell_2\left(\sin(\theta_1'+\theta_2')-\sin(\theta_1+\theta_2)\right), \tag{12}$$

que a la seva vegada, fent ús de les transformacions de diferències de cosinus i sinus, en productes de sinus, i de sinus per cosinus respectivament[(2)], es poden escriure com:

$$\ell_1\sin\frac{\theta_1+\theta_1'}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_1'}{2} = \ell_2\sin\frac{\theta_{1,2}'+\theta_{1,2}}{2}\sin\frac{\theta_{1,2}'-\theta_{1,2}}{2}, \tag{13}$$

$$\ell_1\cos\frac{\theta_1+\theta_1'}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_1'}{2} = \ell_2\cos\frac{\theta_{1,2}'+\theta_{1,2}}{2}\sin\frac{\theta_{1,2}'-\theta_{1,2}}{2}, \tag{14}$$

on hem posat $\theta_{1,2}=\theta_1+\theta_2$ i $\theta_{1,2}'=\theta_1'+\theta_2'$. Ara cal distingir dos casos.

– **Cas A**. La segona de les equacións, (14), no és idènticament zero o, el que és equivalent, $\sin\theta_1\neq\sin\theta_1'$. Llavors podem dividir membre a membre i tindrem la igualtat:

$$\tan\frac{\theta_1+\theta_1'}{2}=\tan\frac{\theta_1+\theta_1'+\theta_2+\theta_2'}{2}.$$

la qual cosa implica $\theta_2+\theta_2'=2k\pi$, amb $k\in\mathbb{Z}$. Però com que els angles $0<\theta_2,\theta_2'<\pi$, això és impossible, per tant s'ha de satisfer el

– **Cas B**. $\sin\theta_1=\sin\theta_1'$. Això, a la seva vegada, dóna altres dues possibilitats:

(a) $\theta_1=\theta_1'$. Aleshores, de (11) i (12), es dedueix[(3)]:

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos(\theta_1'+\theta_2'),$$
$$\sin(\theta_1+\theta_2) = \sin(\theta_1'+\theta_2'),$$

i d'aquí $\theta_1+\theta_2=\theta_1'+\theta_2'+2k\pi$ amb $k\in\mathbb{Z}$, la cual cosa implica: $\theta_2=\theta_2'$, donat que, $0<\theta_2$, $\theta_2'<\pi$ i només és possible $k=0$.

(b) $\theta_1=\pi-\theta_1'+2k\pi$, amb $k=0,1$. De l'equació (14) deduim que cal $\sin(\theta_1'+\theta_2'-\theta_1-\theta_2)/2=0$. En efecte, puix $\cos(\theta_1'+\theta_2'+\theta_1+\theta_2)/2$ no s'anul·la perquè és $\theta_1'+\theta_1=\pi+2k\pi$ amb $k=0,1$[(4)] i llavors:

$$\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{\pi+2k\pi+\theta_2'+\theta_2}{2}<(k+1)\pi+\frac{\pi}{2},$$

$(k=0,1)$. Però, per (13) resulta que s'ha de satisfer:

$$\sin\frac{\theta_1-\theta_1'}{2}=0\ \Rightarrow\ \theta_1-\theta_1'=2j\pi\ \Rightarrow\ \theta_1'=\theta_1,$$

(amb $j\in\mathbb{Z}$). Llavors, necessàriament $\theta_1=\pi/2+k\pi$, $k=0,1$; i també:

$$\sin\frac{\theta_2'-\theta_2}{2}=0\ \Rightarrow\ \theta_2'-\theta_2=2j'\pi\ \Rightarrow\ \theta_2'=\theta_2,$$

(essent j' enter). I això acaba aquesta demostració de la injectivitat.

B(a)i: Aplicant els criteris de generació a les funcions components (1) i (2), resulta que $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(W)$.

B(a)ii: Si calculem la diferencial de φ, veiem que la seva matriu és:

$$d\varphi_{(\theta_1,\theta_2)}=\begin{pmatrix}-\ell_1\sin\theta_1-\ell_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -\ell_2\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \ell_1\cos\theta_1+\ell_2\cos(\theta_1+\theta_2) & \ell_2\cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}, \tag{15}$$

que és no singular per $(\theta_1,\theta_2)\in W$, donat que $\det d\varphi_{(\theta_1,\theta_2)}=\ell_1\ell_2\sin\theta_2>0$. Aleshores, pel teoreema de la inversa, tenim que $\varphi^{-1}\in\mathcal{C}^\infty(A)$.

[(2)]Estem parlant de les identitats trigonomètriques: $\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ i $\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$.

[(3)]De fet, hauríem d'haver posat: $\theta_1=\theta_1'+2k\pi$, amb $k\in\mathbb{Z}$, però com que $0<\theta_1<2\pi$, $0<\theta_1'<2\pi$, només pot ser $k=0$.

[(4)]Aquesta restricció sobre k és debuda, de nou, al fet de que $0<\theta_1'<2\pi$, $0<\theta_1<2\pi$.

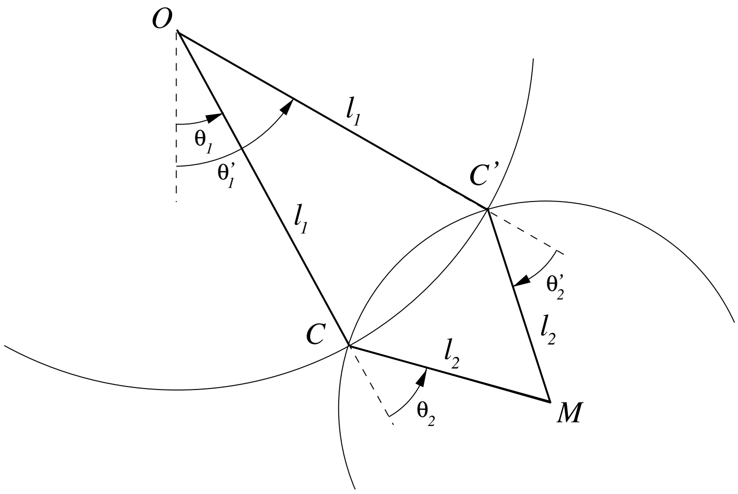


Figura 4. L'angle θ_2 determinat pel triangle $\widehat{OC'M}$ és negatiu o més gran que π; per tant aquesta configuració no és admissible en W. Aleshores els angles (θ_1, θ_2) corresponents al punt M de coordenades $(x_1, x_2) \in W$, poden ser només els determinats pel punt d'intersecció C.

B(b)i: Per la regla de la cadena

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1\varphi_1 & D_2\varphi_1 \\ D_1\varphi_2 & D_2\varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix},$$

i ja hem vist que la matriu $(d\varphi)$ és inversible.

B(b)ii: En $(\theta_1, \theta_2) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es té:

$$d\varphi_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} -\ell_1 & 0 \\ -\ell_2 & -\ell_2 \end{pmatrix}.$$

Per tant:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell_1 & 0 \\ -\ell_2 & -\ell_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\ell_1}\dot{x}_1 \\ \frac{1}{\ell_1}\dot{x}_1 - \frac{1}{\ell_2}\dot{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Problema 4. Càlcul de l'acceleració d'un flux

Considereu un flux en el pla per al qual la posició (x, y) i la velocitat (u, v) estan lligades per les retriccions:

$$\begin{aligned} x &= \ln u + v^2 \\ y &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

1. Demostreu que per posicions i velocitats pròximes a $(1, 2)$ i $(1, 1)$ respectivament, la velocitat ve determinada per la posició i en depèn de forma C^1.
2. En aquestes condicions, calculeu l'acceleració en el punt $(1, 2)$.

Solució: **1.** Sigui f la funció que defineix la posició en funció de la velocitat del flux, i. e.: $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \ni (u, v) \to (x, y) = f(u, v) = (\ln u + v^2, u^2 + v^2) \in \mathbb{R}^2$. Primer provarem que aquesta funció admet inversa local en $(1, 1)$, definida en un entorn de $(1, 2)$ i de classe C^∞. En efecte, ja que:

H-1. $f(1, 1) = (1, 2)$.
H-2. $f \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$, on $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
H-3. $\det Df(1, 1) \neq 0$. Explícitament, fent els càlculs:

$$Df(1,1) = \begin{pmatrix} 1/u & 2v \\ 2u & 2v \end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Df(1,1) = -2 \neq 0.$$

Per tant —pel teorema de la funció inversa local—, existeixen entorns oberts $U \subset \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^2$ amb $(1, 1) \in U$, $f(1, 1) = (1, 2) \in V$ tals que la restricció $f_{|U} : U \to V$ és una bijecció de U en V amb la seva inversa $(f_{|V})^{-1} : V \to U$ de classe C^∞. A més, la derivada d'aquesta inversa ve donada per:

$$Df^{-1}(f(u,v)) = Df(u,v)^{-1}, \qquad \text{per tot } (u,v) \in U, \tag{1}$$

on es sobreentenen les restriccions de f i f^{-1} a U i V respectivament (mantindrem aquest conveni a partir d'ara). En particular:

$$Df^{-1}(1,2) = Df^{-1}(f(1,1)) = Df(1,1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Es veu doncs que localment, prop de $(x, y) = (1, 2)$ la velocitat ve determinada per la posició.

2. Els fluxos relacionen les posicions (d'una partícula, per exemple) i el temps en què s'assoleixen aquestes posicions[5]. Així, considerarem les coordenades (x, y) com funció de l'instant t; és a dir: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Ara, sigui τ l'instant (desconegut) corresponent a la posició $(1, 2)$, i. e.: $(x(\tau), y(\tau)) = (1, 2)$. Llavors, per t proper a τ: $(u(t), v(t)) = f^{-1}(x(t), y(t))$ (les velocitats també són magnituds "fluents"!). Com que volem les acceleracions, hem de derivar les components de la velocitat $u(t)$ i $v(t)$ respecte del temps. Per la regla de la cadena i tenint en compte (1):

$$\begin{pmatrix} \dot u(t) \\ \dot v(t) \end{pmatrix} = Df^{-1}(x(t), y(t)) \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} = Df^{-1}(f(u(t), u(t))) \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} = Df(u(t), v(t))^{-1} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

En particular, per $t = \tau$: $(u(\tau), v(\tau)) = f^{-1}(x(\tau), y(\tau)) = f^{-1}(1, 2) = (1, 1)$ i l'accelració en aquest instant serà:

$$\begin{pmatrix} \dot u(\tau) \\ \dot v(\tau) \end{pmatrix} = Df(u(\tau), v(\tau))^{-1} \begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

(on s'ha fet servir (2)). Finalment doncs, l'accelació corresponent a la posició $(1, 2)$ és $(0, \frac{1}{2})$.

[5]En aquest sentit, la llei del moviment rectilini uniformement accelerat: $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ donaria el *flux* d'una partícula sobre la qual actua una força constant.