

Càlcul 2

1. Continuïtat i límit de funcions de vèries variables

Dept. de Matemàtica Aplicada I

www.ma1.upc.edu

Universitat Politècnica de Catalunya

10 febrer 2014

Copyright © 2014

Reproducció permesa sota els termes de la llicència
de documentació lliure GNU

www.gnu.org/licenses/fdl.html

Continuïtat i límit de funcions d'1 variable

Definició 1 (Límit d'una funció d'1 variable en un punt)

Sigui f una funció

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

$x_0 \in (a, b)$ (i. e., x_0 punt interior de l'interval $[a, b]$) i $L \in \mathbb{R}$.

Direm que: $\lim_{x \rightarrow x_0} f = L$ sii $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t. q.

si $0 < |x - x_0| \leq \delta$, llavors: $|f(x) - L| \leq \varepsilon$.

Remarca 1

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f = L$ vol dir que si x és prou proper a x_0 llavors $f(x)$ és prou proper a L
- El valor de $f(x_0)$ **no juga cap paper en la definició**. Modificar el valor de $f(x_0)$ no afecta a l'existència o no del límit ni al seu valor. De fet, no cal que $f(x_0)$ estigui definit. D'aquí la restricció $0 < |x - x_0|$ a la Definició 1.

Exemple 1

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ c, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Tenim que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

independentment del valor de c (veure Figura 1).

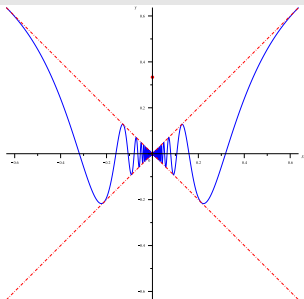


Figura 1: gràfica de la funció de l'Exemple 1 amb $c = 1/3$.

- Si triem $x_0 = a$ ó $x_0 = b$ (extrems o punts frontera de l'interval $[a, b]$) llavors podem estendre la definició de límit mitjançant els seus límits laterals:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f.$$

Definició 2 (Continuïtat d'una funció d'1 variable en un punt)

Sigui f una funció

$$\begin{array}{rcl} f : [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x), \end{array}$$

$x_0 \in (a, b)$ i $L \in \mathbb{R}$.

- Direm que f és contínua en x_0 sii

$$\exists L = \lim_{x \rightarrow x_0} f \quad \text{i a més:} \quad L = f(x_0).$$

Remarca 2

- La funció de l'exemple 1 és contínua en $x_0 = 0$ sii $c = 0$.
- Podem estendre la noció de funció contínua als punts frontera de l'interval $[a, b]$ usant límits laterals. Per exemple, f és contínua en $x_0 = a$ sii

$$\exists L = \lim_{x \rightarrow a^+} f \quad \text{i} \quad L = f(a).$$

Alguns conceptes de topologia elemental al pla

Definició 3

(i) Disc obert de centre (x_0, y_0) i radi $r > 0$:

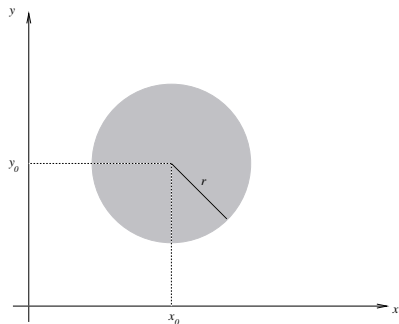
$$D_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$

(de fet, és l'interior d'un disc de radi r). Vegeu Figura 2(a).

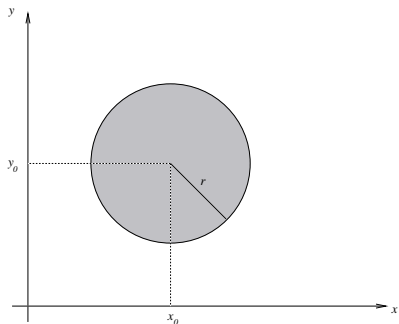
(ii) Disc tancat de centre (x_0, y_0) i radi $r > 0$:

$$\bar{D}_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r\}$$

(interior del disc + la seva circumferència "frontera"). Vegeu Figura 2(b).



(a) Disc obert



(b) Disc tancat

Figura 2: **2(a)** Disc obert cantrat en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ i radi $r > 0$. **2(b)** Disc tancat amb centre a $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ i radi $r > 0$.

Sigui $A \subset \mathbb{R}^2$ un subconjunt fixat.

Definició 4 (Punt interior)

Direm que $(x_0, y_0) \in A$ és un punt interior de A si $\exists r > 0$ (depèn del punt!) t. q. $D_r(x_0, y_0) \subset A$.

És a dir, un punt és interior d'un conjunt si hi ha tot un entorn d'ell contingut dins del conjunt.

Definició 5 (Punt frontera)

Direm que $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ és un punt frontera de A si $\forall r > 0$ (per molt petit que sigui!), el disc $D_r(x_0, y_0)$ té intersecció no buida tant amb el conjunt A com amb el seu complementari, A^c (recordem $A^c = \mathbb{R}^2 \setminus A$), i. e.:

$$A \cap D_r(x_0, y_0) \neq \emptyset, \quad \text{i} \quad A^c \cap D_r(x_0, y_0) \neq \emptyset.$$

Remarca 3

Un punt frontera pot ser que sigui o no del conjunt!

Remarca 4

Recordem que la distància $\|z_2 - z_1\|$ entre dos punts $z_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, ve donada per

$$\|z_2 - z_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Exemple 2

$D_r(x_0, y_0)$: Tots els punts d'un disc obert són interiors mentre que la seva frontera és la circumferència

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}. \quad (1)$$

$\overline{D}_r(x_0, y_0)$: Els punts interiors d'un disc tancat són els del disc obert $D_r(x_0, y_0)$ i la seva frontera és la circumferència (1).

La Figura 3 il·lustra les definicions 4 i 5.

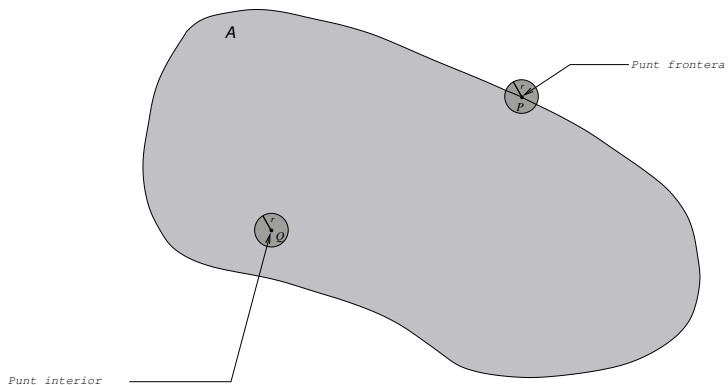


Figura 3: Q punt interior. P punt frontera.

Definició 6 (Conjunt obert)

Direm que $A \subseteq \mathbb{R}^2$ és un conjunt obert sii tots els seus punts són interiors (i. e., si A no conté cap punt frontera).

Definició 7 (Conjunt tancat)

Direm que $A \subseteq \mathbb{R}^2$ és un conjunt tancat sii A conté tots els seus punts frontera.

Remarca 5

- La majoria de conjunts no són ni oberts ni tancats...
- Hi ha una caracterització dels conjunts oberts i tancats via funcions contínues (classe de problemes).

Exemple 3

- El disc obert $D_r(x_0, y_0)$ és un conjunt obert.
- El disc tancat $\overline{D}_r(x_0, y_0)$ és un conjunt tancat.

Definició 8 (Conjunt acotat)

Direm que un conjunt $A \subseteq \mathbb{R}^2$ és acotat si $\exists R > 0$ t. q. $A \subseteq D_R(0, 0)$ (és a dir, si es pot incloure en un disc centrat a l'origen de radi prou gran).

Exemple 4

Siguin els conjunts:

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -1\}, \quad (2)$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 9\}. \quad (3)$$

Òbviament A_1 no és un conjunt acotat, mentre que A_2 (que és un anell de radis 1 i 3), sí que ho és.

Definició 9 (Conjunt compacte)

Direm que un conjunt $A \in \mathbb{R}^2$ és un compacte si A és un conjunt tancat i acotat.

Exemple 5

- Tot disc tancat és compacte.
- El conjunt A_1 de l'exemple 4 no és compacte (no és acotat).
- El conjunt A_2 de l'exemple 4 no és compacte. És acotat però no és tancat, ja que no inclou els punts de la circumferència "interior" $x^2 + y^2 = 1$, que són punts frontera. En canvi el conjunt,

$$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$$

és tancat i acotat i per tant, compacte d'acord amb la Definició 9.

Tot seguit estendrem les definicions de límit i continuïtat per a una funció de 2 variables definida en un **conjunt obert** (les definicions pel cas de punts frontera no les formalitzarem aquí).

Continuïtat i límit de funcions de 2 variables

Definició 10 (Límit d'una funció de 2 variables en un punt)

Sigui f una funció definida en un conjunt obert $A \subseteq \mathbb{R}^2$, i. e.:

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y), \end{aligned}$$

$(x_0, y_0) \in A$ (punt interior) i $L \in \mathbb{R}$. Direm que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t. q.}$$

$$\text{si } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \delta, \text{ llavors: } |f(x, y) - L| \leq \varepsilon$$

i escriurem (notació):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Definició 11 (Continuïtat d'una funció de 2 variables en un punt)

- (1) Direm que la funció f definida en un conjunt obert $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, és contínua al punt $(x_0, y_0) \in A$ sii:

$$\exists L = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad L = f(x_0, y_0).$$

- (2) f és contínua en A si ho és $\forall (x_0, y_0) \in A$, d'acord amb la definició anterior.

Remarca 6

- La definició de límit en 2 variables vol dir que si (x, y) tendeix a (x_0, y_0) “de totes les maneres possibles”, llavors $f(x, y)$ tendeix a L .
- El valor de $\delta = \delta(\varepsilon)$ en la definició de límit es pot interpretar com un “paràmetre de control” necessari per assolir una precisió (o tolerància) $\varepsilon > 0$ predeterminat.

Exemple 6

Sigui la funció:

$$f(x, y) = \frac{x^2 \cos y + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0).$$

Es comprova fàcilment que: $L = \lim_{(0,0)} f(x, y) = 0$. En efecte, ja que donat $\varepsilon > 0$, agafant $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$ tenim que si $0 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta$, llavors

$$\begin{aligned} |f(x, y) - (0, 0)| &= \frac{|x^2 \cos y + xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + |xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= |x| \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 2|x| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\delta = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

On hem fet servir les desigualtats: $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ i $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Continuïtat de funcions de n variables

Volem estendre les definicions anteriors al context de funcions de n variables:

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

El punt clau és reemplaçar a tot arreu la “distància en \mathbb{R}^2 ” (veure remarca 4) per la “distància en \mathbb{R}^n ”, i. e.:

Definició 12 (Distància entre dos punts)

Siguin $x = (x_1, \dots, x_n), x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Definim la seva distància, $\|x - x_0\|$, mitjançant:

$$\|x - x_0\| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}.$$

Així, per ex., podem estendre la definició de disc obert a \mathbb{R}^n :

Definició 13

Anomenarem bola oberta amb centre $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ i radi $r > 0$ al conjunt:

$$D_r(x_0) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < r\}.$$

En particular:

- Si $n = 2$ tenim el disc obert de la definició 3.
- Per $n = 3$, $D_r(x_0)$, consisteix en tots els punts de l'interior d'una esfera amb centre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i radi $r > 0$.
- etc.

De forma semblant, podem introduir les definicions de bola tancada, punt interior, punt frontera, conjunts oberts, tancats i compactes en \mathbb{R}^n ; així com les definicions de límit i continuïtat d'una funció $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. No les formalitzarem aquí.

Alguns conceptes i propietats sobre funcions de diverses variables

Definició 14 (Continuïtat d'una funció de n variables i m components)

Sigui $A \in \mathbb{R}^n$ obert i $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$. Direm que la funció:

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \end{aligned}$$

és contínua en x_0 si i totes les m **funcions components**

$$f_1(x) = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x) = f_m(x_1, \dots, x_n),$$

són contínues en x_0 .

Proposició 15 (Propietats de les funcions contínues)

(a) Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A obert; són funcions contínues en $x_0 \in A$, llavors també ho són:

$$(i) c \cdot f, \forall c \in \mathbb{R}; \quad (ii) f + g; \quad (iii) f \cdot g; \quad (iv) \frac{f}{g}, \text{ si } g(x_0) \neq 0.$$

(b) Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, A, B oberts; són funcions contínues en x_0 i $f(x_0)$ respectivament, llavors la composició $g \circ f$ també és contínua en x_0 .

(c) Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, A obert, és contínua en x_0 i existeix la inversa $f^{-1} : f(A) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, llavors f^{-1} és contínua en $f(x_0)$ (continuïtat de la inversa).

Remarca 7

Aquesta proposició permet concloure que les funcions construïdes combinant funcions contínues mitjançant l'ús de les propietats (a), (b) i (c) són també contínues sempre que ens mantinguem dins del "domini de la seva combinació". Ho anomenem genèricament **continuïtat per generació**.

Exemple 7

La funció:

$$f(x, y, z) = x^{\sin\left(\frac{x+y}{y^2+z^2}\right)} = e^{\ln(x) \sin\left(\frac{x+y}{y^2+z^2}\right)},$$

està ben definida i és contínua “per generació” si $x > 0$ i $(y, z) \neq (0, 0)$.

Càlcul 2

2. Derivació de funcions de vàries variables

Dept. de Matemàtica Aplicada I

www.ma1.upc.edu

Universitat Politècnica de Catalunya

10 febrer 2014

Copyright © 2014

Reproducció permesa sota els termes de la llicència
de documentació lliure GNU

www.gnu.org/licenses/fdl.html

Definició 1 (Derivades parcials de funcions de 2 variables)

Sigui f una funció

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

amb $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Les derivades parcials de f respecte de x i respecte de y en $(x_0, y_0) \in A$, vénen donades, respectivament, pels límits:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}, \end{aligned} \tag{2}$$

quan aquests límits existeixen i són finits.

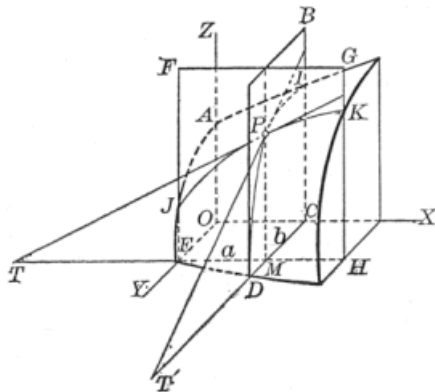


Figura 1: Les derivades parcials donen les pendents de les tangents en les direccions dels eixos.

Càlcul de les derivades parcials

Proposició 2 (Derivades parcials com derivades de funcions d'1 variable)

Quan els límits de la def. 1 existeixen, llavors:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} [f(x, y_0)]_{x=x_0} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} [f(x_0, y)]_{y=y_0} \cdot \quad (3)$$

Exemple 1

Derivades parcials de $f(x, y) = xe^{y \sin x}$ en $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) &= \frac{d}{dx} [f(x, 0)]_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{d}{dx} [xe^{0 \cdot \sin x}]_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{d}{dx} [x]_{x=\frac{\pi}{2}} = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right) &= \frac{d}{dy} \left[f \left(\frac{\pi}{2}, y \right) \right]_{y=0} = \frac{d}{dy} \left[\frac{\pi}{2} e^y \right]_{y=0} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Funcions derivades parcials

- Si estenem la idea de la prop. 2 al càlcul de les **funcions derivades parcials** de $f(x, y)$, podem calcular
 - $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ derivant respecte de x , tractant y com si fos una constant.
 - $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ derivant respecte de y , tractant x com si fos una constant.
- Així, per la funció de l'exemple 1

$$f(x, y) = xe^{y \sin x},$$

tindríem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{y \sin x} + xye^{y \sin x} \cos x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{y \sin x} \sin x.$$

- Remarquem que aquestes **regles de derivació** es poden aplicar quan sabem que aquestes derivades parcials existeixen (per exemple, aplicant els criteris de generació).

Derivades de funcions de n variables i m components

Vector de derivades parcials

Considerarem la funció:

$$\begin{aligned} f : \quad A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \end{aligned}$$

essent A un conjunt obert. Sigui $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$. Suposem que totes les derivades parcials primeres de totes les funcions de f existeixen en x_0 . Denotem per,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0) \right)^\top \quad (4)$$

el vector de derivades parcials de f en x_0 respecte de x_i per $i = 1, 2, \dots, n$.

Definició 3 (Matriu jacobiana)

Anomenarem matriu jacobiana de la funció f en x_0 a la matriu $m \times n$ que té per columnes els vectors de derivades parcials (4) de f , i. e.,

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Exemple 2

Càlcul de la matriu jacobiana de $f(x, y) = (e^{x+y} + y, y^2x, \cos(xy^2))$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (e^{x+y}, y^2, -y^2 \sin(xy^2))^\top,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (e^{x+y} + 1, 2xy, -2xy \sin(xy^2))^\top.$$

Amb la quan cosa, la matriu jacobiana resulta,

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto Df(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2xy \\ -y^2 \sin(xy^2) & -2xy \sin(xy^2) \end{pmatrix}$$

Remarca 1

- La idea és que la matriu jacobiana juga el mateix paper geomètric que la derivada d'una funció d'1 variable de cara a aproximar $f(x)$ per una **varietat lineal** entorn de $x = x_0$.
- Quan treballem amb funcions de n variables amb $n > 1$, però, tot és complicat i no sempre que una funció té derivades parcials en un punt admet pla tangent (i. e., és "aproximable" per una varietat lineal) en el punt.
- Més encara:
 - Per funcions d'1 variable: $\exists f'(x_0) \Rightarrow f$ contínua en x_0 .
 - Per funcions de dos variables: si $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ i $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, **no** és cert necessàriament que f sigui contínua en (x_0, y_0) . Veure exemple 3.
 - Ídem per funcions de més de dues variables.

Exemple 3

Sigui la funció:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad (6)$$

Es comprova (exercici) que les seves funcions derivades parcials són:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Veiem que existeixen $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$, tot i que f no és contínua en $(x, y) = (0, 0)$. Per què?

Definició 4 (Funcions de classe C^1)

Sigui $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, A obert. Direm que “ f és de classe C^1 en A ” o “ f és C^1 en A ” i escriurem $f \in C^1(A)$ si existeixen totes les derivades parcials primeres de f en A i a més són funcions contínues en A .

Exemple 4

- La funció de l'exemple 2 és de classe C^1 en tot \mathbb{R}^2 . Ho denotem escrivint $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
- La funció de l'exemple 3 és C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ però no és C^1 en $(0,0)$. Escrivim $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.

Proposició 5

$$f \in C^1(A) \implies f \text{ és contínua en } A (f \in C^0(A)).$$

Observació: notem que: $f \notin C^0 \Rightarrow f \notin C^1$.

Proposició 6

Sigui $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, A obert, $f \in C^1(A)$, $x_0 \in A$. Llavors:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot (x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

on $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_k^2}$ és la norma euclidiana de $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ i $Df(x_0) \cdot (x - x_0)$ és el producte de matriu per vector.

Remarca 2

- Interpretació geomètrica: Això vol dir que la varietat lineal n -dimensional:

$$T(x) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0)$$

aproxima a $f(x)$ quan $x \rightarrow x_0$ més ràpidament que la distància $\|x - x_0\|$ tendeix a zero.

- $T(x)$ és la varietat (lineal) tangent a $f(x)$ en $x = x_0$.
- Es diu que f és **diferenciable** en $x = x_0$ i que $Df(x_0)$ n'és la seva **matriu diferencial**.

- Direm llavors que $T(x)$ és l'**aproximació lineal** de f entorn de $x = x_0$ i escriurem:

$$f(x) \approx f(x_0) + Df(x_0) \cdot (x - x_0),$$

quan $x \rightarrow x_0$.

Exemple 5

Per una funció de dues variables $z = f(x, y)$, tenim:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

que és la parametrització del pla tangent a la gràfica de $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) .

Derivades parcials d'ordre superior

Per fixar idees, considerarem una funció de dues variables com (1).

$$\text{Si: } \exists \frac{\partial f}{\partial x} \text{ i } \exists \frac{\partial f}{\partial y} \text{ en } A,$$

llavors podem preguntar-nos, aquestes funcions admeten, al seu torn derivades parcials i definir així les seves **derivades parcials segones**:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right); & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right); & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right); \end{aligned}$$

Notem que en la definició de les derivades $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ actua 1^{er} la derivada més cap a la dreta.

Exemple 6

Considerem la funció de dues variables $f(x, y) = x^3 + xy + y \sin x$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y + y \cos x = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 6x - y \sin x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 1 + \cos x \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \sin x = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 1 + \cos x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

Remarca 3

En principi, les derivades creuades $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ són diferents, però veurem (proposició 10) que, per funcions prou “regulars”, coincideixen.

Derivades parcials d'ordre superior

Podem estendre la noció de derivades parcials segones a derivades parcials d'ordre m qualsevol. Per exemple: si $f = f(x, y, z)$, llavors

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \right) \right) \right).$$

Com abans, notem que 1^{er} actua la derivada més cap a la dreta.

Definició 7 (Funcions de classe C^k)

Sigui $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ amb A obert.

- (i) Direm que $f \in C^k(A)$, $k \geq 1$, sii f és contínua en A , f admet **totes** les derivades parcials d'ordre $\leq k$ en A i totes aquestes derivades parcials són contínues en A .
- (ii) $f \in C^0(A)$ (ó $f \in C(A)$) sii f és contínua en A .
- (iii) $f \in C^\infty(A)$ sii f és $C^k(A)$ en A per tot $k \geq 0$.

Proposició 8

$$C^0(A) \supseteq C^1(A) \supseteq C^2(A) \supseteq \cdots \supseteq C^k(A) \supseteq \cdots \supseteq C^\infty(A)$$

(*russian dolls!*).

Proposició 9

Les funcions elementals (polinomis, exponencials trigonomètriques) i les seves composicions són funcions C^∞ en els seus dominis de definició.

Exemple 7

- La funció $f(x, y) = x^3 + xy + y \sin x$ de l'exemple 6 és de classe C^∞ en tot \mathbb{R}^2 .
- La funció:

$$f(x, y) = \frac{x \sin y + y^2 e^x}{x^2 + y^4 \cos^2 x},$$

és C^∞ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Proposició 10 (Coincidència de derivades creuades)

(i) *Enunciat clàssic: si $f(x, y)$ és C^2 en A , llavors:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

en A .

(ii) *Versió general: Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és $C^k(A)$, llavors totes les seves derivades parcials creuades d'ordre $\leq k$ són coincidents si involucren les mateixes variables el mateix nombre de vegades.*

Exemple 8

Si $f = f(x, y, z)$, $f \in C^4$, llavors:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x^2 \partial z} = \dots, \text{ etc.}$$

Usarem la notació: $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y \partial z}$, per denotar aquesta derivada 4arta, tot agrupant les variables repetides.

Exercici 1

Calculeu les derivades parcials segones de la funció:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Solució:

Per $(x, y) \neq (0, 0)$ podem aplicar els criteris de generació i aplicar les regles de derivació:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y^5 - 4x^2y^3 - x^4y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

En canvi, per $(x, y) = (0, 0)$, no podem aplicar aquestes regles i hem de calcular les derivades aplicant directament la definició 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

D'altra banda, és fàcil veure que, debut a la simetria que presenta aquesta funció:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x), \quad \text{per tot } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (7)$$

Amb la qual cosa, les **funcions derivades parcials primeres** vénen donades per:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} -\frac{y^5 - 4x^2 y^3 - x^4 y}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} -\frac{x y^4 + 4x^3 y^2 - x^5}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Es comprova que aquestes funcions són contínues en tot \mathbb{R}^2 . En efecte, per $(x, y) \neq (0, 0)$ es pot aplicar la prop. 9, mentre que per afirmar que són contínues al $(0, 0)$ s'ha de demostrar explícitament (exercici!) que:

$$\lim_{(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

i llavors l'altre límit vindria garantit per la condició de simetria (7).

De la mateixa manera es calculen les derivades parcials segones. Com abans, per $(x, y) \neq (0, 0)$ es poden aplicar les regles de derivació, mentre que per $(x, y) = (0, 0)$ hem d'aplicar la definició 1 a les funcions derivades parcials primeres. Això és:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0 + h, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{(0,0)} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{(0,0)} \frac{-h^5/h^4 - 0}{h} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0 + h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\partial h} = \lim_{(0,0)} \frac{h^5/h^4 - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0 + h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{(0,0)} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Amb la qual cosa, les **funcions derivades parcials segones** són:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \begin{cases} 4xy^3 \frac{3y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ -1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \begin{cases} -4x^3y \frac{3x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^3}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Notem que:

- Totes les derivades parcials segones són contínues per tot $(x, y) \neq (0, 0)$, però cap d'elles és contínua a l'origen, ja que cap dels límits:

$$\lim_{(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad \lim_{(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \lim_{(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \lim_{(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

existeix; com es comprova, per exemple, per límits direccionals.

- Per tant $f \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
- En conseqüència, com que les derivades parcials segones no són contínues en $(x,y) = (0,0)$, no es pot aplicar la proposició 10 en aquest punt i, per tant, no tenim garantida la igualtat de les derivades parcials creuades a l'origen. De fet, tal com hem calculat dalt, resulta:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1. \quad \square$$

La regla de la cadena

Cas d'1 variable:

Si f , g són derivables, llavors:

$$\frac{d}{dx} [(g \circ f)](x) = g'(f(x))f'(x).$$

Exemple 9

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \exp(x) = e^x$; tenim:

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = \exp(x) = e^x,$$

d'on: $\frac{d}{dx} [(g \circ f)](x) = g'(f(x))f'(x) = \exp(x^2) \cdot 2x = 2xe^{x^2}$.

Resultat que podríem haver obtingut directament:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \exp(x^2) = e^{x^2} \Rightarrow (g \circ f)'(x) = 2xe^{x^2}.$$

Per al cas de funcions de varies variables C^1 podem generalitzar aquesta expressió al càlcul de les matrius de derivades parcials de la composició de funcions substituint el producte de nombre pel de matrius.

Teorema 11 (Regla de la cadena)

Siguin les funcions

$$\begin{aligned} f : \quad A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \end{aligned}$$

A obert, $f \in C^1(A)$, i

$$\begin{aligned} g : \quad B \subseteq \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ u = (u_1, \dots, u_m) &\mapsto g(u) = (g_1(u), \dots, g_k(u)), \end{aligned}$$

B obert, $g \in C^1(B)$. Sigui $x_0 \in A$ t. q. $f(x_0) \in B$. Llavors:

$$\underbrace{D(g \circ f)(x_0)}_{\text{matriu } k \times n} = \underbrace{Dg(f(x_0))}_{\text{matriu } k \times m} \cdot \underbrace{Df(x_0)}_{\text{matriu } m \times n}$$

Exemple 10

Siguin les funcions:

$$f(x, y) = (\cos y + x^2, e^{x+y}, x - y),$$

$$g(u, v) = (e^{u^2}, u - \sin v).$$

Si definim,

$$h(u, v) = (f \circ g)(u, v).$$

Calculeu, usant la regla de la cadena, $Dh(0, 0)$.

$$\begin{aligned} Dh(0, 0) &= D(f \circ g)(0, 0) \\ &= Df(g(0, 0)) \cdot Dg(0, 0) \underset{g(0,0)=(1,0)}{=} Df(1, 0) \cdot Dg(0, 0). \end{aligned}$$

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -\sin y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad Dg(u, v) = \begin{pmatrix} 2ue^{u^2} & 0 \\ 1 & -\cos v \end{pmatrix}$$

$$Dh(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ e & e \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

On, recordem, que si $h(u, v) = (h_1(u, v), h_2(u, v), h_3(u, v))$, llavors:

$$Dh(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u}(0, 0) & \frac{\partial h_1}{\partial v}(0, 0) \\ \frac{\partial h_2}{\partial u}(0, 0) & \frac{\partial h_2}{\partial v}(0, 0) \\ \frac{\partial h_3}{\partial u}(0, 0) & \frac{\partial h_3}{\partial v}(0, 0) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Exercici 2

Trobeu una fórmula explícita per a $h(u, v)$.

Solució

$$h(u, v) = \left(\cos(u - \sin v) + e^{2u^2}, e^{e^{u^2} + u - \sin v}, e^{u^2 - u + \sin v} \right). \quad \square$$

...i ara podríem calcular **directament** les derivades parcials de $h = f \circ g$ al punt $(0, 0)$:

$$\frac{\partial h_1}{\partial u}(0,0) = \frac{d}{du} (\cos u + e^{2u^2}) \Big|_{u=0} = (-\sin u + 2ue^{2u^2}) \Big|_{u=0} = 0,$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial v}(0,0) = \frac{d}{dv} (\cos(-\sin v) + 1) \Big|_{v=0} = \sin(-\sin v) \cos v \Big|_{v=0} = 0,$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial u}(0,0) = \frac{d}{du} (e^{e^{u^2} + u}) \Big|_{u=0} = (2ue^{u^2} + 1) e^{e^{u^2} + u} \Big|_{u=0} = e,$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial v}(0,0) = \frac{d}{dv} (e^{1-\sin v}) \Big|_{v=0} = -e^{1-\sin v} \cos v \Big|_{v=0} = -e,$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial u}(0,0) = \frac{d}{du} (e^{u^2} - u) \Big|_{u=0} = (2ue^{u^2} - 1) \Big|_{u=0} = -1,$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial v}(0,0) = \frac{d}{dv} (1 + \sin v) \Big|_{v=0} = \cos v \Big|_{v=0} = 1.$$

aleshores, la corresponent matriu de derivades parcials és, d'acord amb (9):

$$Dh(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la qual (òbviament!) coincideix amb (8). Notem, però, que aixó és precisament el que tractem d'evitar amb la regla de la cadena...

Derivada d'una funció composta com derivada d'una “substitució de variables”

Idea: podem mirar-nos la derivada d'una funció composta com la derivació de la substitució de les variables d'una funció per funcions d'unes noves variables, quan es deriva respecte d'aquestes noves variables.

Exemple 11

Siguin les funcions: $f = f(x, y, z)$ y $g = (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$. Considerem la funció composta:

$$h(u, v) = (f \circ g)(u, v) = f(g(u, v)) = f(g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v)).$$

Veiem que, la composició de funcions consisteix en substituir, a la funció f , les seves variables x, y, z per les funcions components de la funció g :

$$x = g_1(u, v), \quad y = g_2(u, v), \quad z = g_3(u, v).$$

Abusant de la notació, sovint s'escriu:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

i aplicaríem la regla de la cadena, tot fent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial z}{\partial u}(u, v), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \quad (11) \\
&+ \frac{\partial f}{\partial z}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial z}{\partial v}(u, v).
\end{aligned}$$

Per ex., si: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ i $g(u, v) = (u^2v, v^2, e^{-uv})$; llavors:

$$h(u, v) = (f \circ g)(u, v) = f(g(u, v)) = u^4v^2 + v^4 - e^{-uv}.$$

D'altra banda, si les components de g les escrivim com:

$$x(u, v) = u^2v, \quad y(u, v) = v^2, \quad z(u, v) = e^{-uv},$$

podem fer servir la regla de la cadena com a (10) i (11) per obtenir les derivades de $h = f \circ g$. Així:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) &= 2x(u, v) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + 2y(u, v) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) - 1 \cdot \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \\ &= 4u^3v^2 + ve^{-uv},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) &= 2x(u, v) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + 2y(u, v) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) - 1 \cdot \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \\ &= 2u^4v + 4v^3 + ue^{-uv}.\end{aligned}$$

Teorema del valor mig (TVM)

Teorema 12 (TVM per a funcions d'1 variable)

Sigui $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua en $[a, b]$ i derivable en (a, b) , llavors existeix un punt $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \quad (12)$$

La fórmula (12) es coneix com **fórmula dels increments finits**.

Remarca 4 (Interpretació geomètrica)

Existeix un punt intermig, ξ , de l'interval (a, b) de manera que la tangent a la gràfica de la funció $y = f(x)$ pel punt $\Xi = (\xi, f(\xi))$ és paral·lela al segment que uneix els punts $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$. Veure figura 2.

Enunciarem el TVM per varies variables en el cas especial $n = 2$. La seva extensió per $n > 1$ qualsevol és immediata (Teorema 14).

Interpretació geomètrica del teorema 12

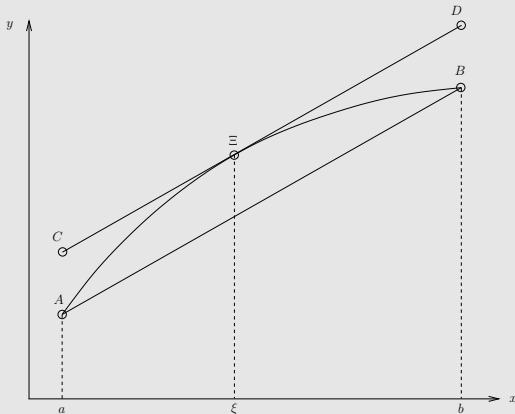


Figura 2: La tangent a la gràfica de la funció $y = f(x)$ a l'interval $I = [a, b]$ pel punt $\Xi = (\xi, f(\xi))$ (segment \overline{CD}) és paral·lela a la corda \overline{AB} que uneix els seus extrems.

Teorema 13 (TVM per a funcions de dues variables)

Sigui la funció:

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

amb A obert i $f \in C^1(A)$; i siguin (x_0, y_0) , (x_1, y_1) dos punts d' A de manera que el segment,

$$\overline{(x_0, y_0), (x_1, y_1)} := \{((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1), 0 \leq t \leq 1\}$$

que els uneix estigui totalment contingut en A (veure figura 3). Llavors existeix un punt (x^*, y^*) d'aquest segment tal que:

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x_1 - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y_1 - y_0). \quad (13)$$

La fórmula (13) es coneix com **fórmula dels increments finits** per dues variables.

Interpretació

La diferència entre els valors de la funció en dos punts distints:

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0),$$

ve controlada per la diferència entre les coordenades dels punts,

$$(x_1 - x_0) \text{ i } (y_1 - y_0),$$

multiplicada per factors correctors que resulten ser les derivades parcials en un punt intermig (x^*, y^*) .

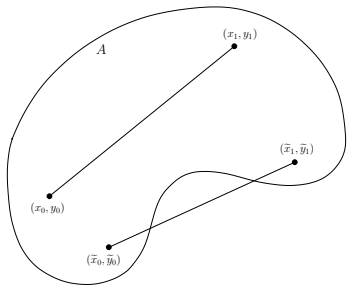


Figura 3: El segment que uneix els punts (x_0, y_0) i (x_1, y_1) està totalment inclòs al conjunt A , mentre que part del segment que uneix els punts $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ i $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ està fora del conjunt.

El teorema 14 que donem a continuació generalitza el teorema 13 per funcions reals de n variables, amb $n > 1$ qualsevol. Posteriorment es discuteix l'aplicació del TVM al **control en la propagació d'errors a les fórmules**.

Teorema 14 (Teorema del valor mig per funcions de n variables)

Sigui $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, amb A obert, una funció de classe C^1 .
Siguin $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, $x_1 = (x_1^1, \dots, x_n^1) \in A$ dos punts pels quals $\overline{x_0, x_1} \subset A$. Llavors $\exists x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \overline{x_0, x_1}$, t. q.:

$$f(x_1) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)(x_i^1 - x_i^0). \quad (14)$$

L'equació (14) es coneix com **fórmula dels increments finits** per funcions de n variables.

Aplicació: acotació dels errors de propagació a les fórmules

Sovint hem de calcular una certa magnitud, z , la qual depèn d'altres n quantitats mesurades experimentalment: x_1, \dots, x_n ; a partir d'una fórmula donada per una funció coneguda, f , i. e.:

$$z = f(x_1, \dots, x_n).$$

Siguin $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ els valors exactes de x_1, \dots, x_n mentre que denotem $\tilde{x}_1 \pm \varepsilon_{x_1}, \dots, \tilde{x}_n \pm \varepsilon_{x_n}$ els valors mesurats ($\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$), juntament amb les corresponents fites dels errors, ($\varepsilon_{x_1} > 0, \dots, \varepsilon_{x_n} > 0$).

De manera que:

$$\bar{x}_1 \in [\tilde{x}_1 - \varepsilon_{x_1}, \tilde{x}_1 + \varepsilon_{x_1}], \dots, \bar{x}_n \in [\tilde{x}_n - \varepsilon_{x_n}, \tilde{x}_n + \varepsilon_{x_n}]. \quad (15)$$

Sigui R el rectangle n -dimensional format pel producte d'aquests intervals, i. e.:

$$R := [\tilde{x}_1 - \varepsilon_{x_1}, \tilde{x}_1 + \varepsilon_{x_1}] \times \cdots \times [\tilde{x}_n - \varepsilon_{x_n}, \tilde{x}_n + \varepsilon_{x_n}] \subset \mathbb{R}^n.$$

Per últim, suposem que la funció f és C^1 en algun obert de $\tilde{R} \subseteq \mathbb{R}^n$, amb $R \subset \tilde{R}$ i que les derivades parcials primeres de f estan acotades a R , i. e., que existeixen n quantitats positives M_1, \dots, M_n t. q.:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \right| \leq M_1, \dots, \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right| \leq M_n, \quad (16)$$

per tot $x = (x_1, \dots, x_n) \in R$.

Remarca 5

En particular notem que, de (15), es segueix que el segment $\overline{\tilde{x}}, \bar{x} \subset R$.

Sota aquestes condicions, el teorema 14 ens assegura que existeix un punt $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \overline{\tilde{x}, \bar{x}}$, t. q.:

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)(\bar{x}_i - \tilde{x}_i). \quad (17)$$

Remarca 6

- Com que $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \overline{\tilde{x}, \bar{x}}$ de la Remarca 5 es dedueix que també $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in R$, amb la qual cosa, de (16), resulten les acotacions:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right| \leq M_i, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n.$$

- De (15) es dedueixen les desigualtats:

$$|\bar{x}_i - \tilde{x}_i| \leq \varepsilon_{x_i}, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n.$$

A continuació, prenent valor absolut en (17) i tenint en compte les observacions a la Remarca 6, hom obté per l'error en z , ε_z :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_z &:= |f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)| \\
 &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*)(\bar{x}_i - \tilde{x}_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, \dots, x_n^*) \right| |\bar{x}_i - \tilde{x}_i| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n M_i \varepsilon_{x_i} = M_1 \varepsilon_{x_1} + \dots + M_n \varepsilon_{x_n}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Exercici 3

El període d'oscil·lació d'un pèndol és $T(\ell, g) = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, on ℓ és la seva longitud i g és l'acceleració de la gravetat. Per simplificar els càlculs, aproximeu π per 3. Si

$$R = \{(\ell, g) \in \mathbb{R}^2 : 0.64 \leq \ell \leq 0.81, 9 \leq g \leq 10\},$$

vegeu que $\left| \frac{\partial T}{\partial \ell} \right| \leq \frac{5}{4}$, $\left| \frac{\partial T}{\partial g} \right| \leq \frac{1}{10}$, en R . Useu aquestes acotacions i el teorema del valor mig per a funcions de dues variables per deduir que $|T(0.8, 10) - 1.6| \leq 0.3$. (Indicació: calculeu $T(0.64, 9)$).

Solució:

$$\frac{\partial T}{\partial \ell} = \frac{3}{\sqrt{\ell g}} \Rightarrow \left| \frac{\partial T}{\partial \ell} \right| \leq \frac{3}{\sqrt{0.64 \times 9}} = \frac{1}{0.8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}, \quad \text{en } R,$$

$$\frac{\partial T}{\partial g} = -3 \frac{\sqrt{\ell}}{(\sqrt{g})^3} \Rightarrow \left| \frac{\partial T}{\partial g} \right| \leq 3 \frac{\sqrt{0.81}}{(\sqrt{9})^3} = \frac{0.9}{9} = \frac{1}{10}, \quad \text{en } R.$$

D'altra banda, tenim que:

$$T(0.64, 9) = 6\sqrt{\frac{0.64}{9}} = \frac{6 \times 0.8}{3} = 2 \times 0.8 = 1.6$$

i com que, clarament, el segment $\overline{(0.64, 9), (0.8, 10)}$ està inclòs al rectangle R , podem aplicar el TVM per dues variables o, directament, la fórmula (18) —amb les acotacions de les derivades parcials calculades a dalt—, per obtenir:

$$\begin{aligned} |T(0.8, 10) - 1.6| &= |T(0.8, 10) - T(0.64, 9)| \leq \frac{5}{4} \times |0.8 - 0.64| \\ &+ \frac{1}{10} \times |10 - 9| = \frac{5}{4} \times 0.16 + \frac{1}{10} = 5 \times 0.04 + 0.1 = 0.3 \quad \square \end{aligned}$$

Fórmula de Taylor

Teorema 15 (Fórmula de Taylor per funcions de dues variables)

Sigui la funció:

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto z = f(x, y) \end{aligned}$$

amb A obert, de classe C^k en A i sigui $(x_0, y_0) \in A$. Llavors, si $(x, y) \in A$ és t. q. $(x_0, y_0), (x, y) \subset A$:

$$f(x, y) = P_k(x, y) + R_k(x, y),$$

on:

- $P_k(x, y)$ és el **polinomi de Taylor** de grau k de f entorn de (x_0, y_0) . Usualment es representa com un polinomi en $(x - x_0)$ i $(y - y_0)$.

- $R_k(x, y)$ és el reste (o residu o romanent) del desenvolupament, i verifica:

$$\lim_{(x_0, y_0)} \frac{R_k(x, y)}{\left[\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right]^k} = 0.$$

Concretament:

- (a) Per $k = 1$ tenim **l'aproximació lineal**:

$$P_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y-y_0). \quad (19)$$

- (b) Per $k = 2$ tenim **l'aproximació quadràtica**:

$$P_2(x, y) = P_1(x, y) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot (x-x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot (x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot (y-y_0)^2 \right] \quad (20)$$

- (c) Per $k > 1$ tindrem, en general:

$$P_k(x, y) = P_{k-1}(x, y) + \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-j} \partial y^j}(x_0, y_0) \cdot (x-x_0)^{k-j} (y-y_0)^j$$

on: $\binom{k}{j} = \frac{k!}{(k-j)!j!}$ són els coeficients binomials “ k sobre “ j ”.

Exemple 12

Calculeu el desenvolupament de Taylor fins als termes d'ordre 2 (inclosos) de la funció

$$f(x, y) = e^{x+y} \cos(y),$$

al voltant del punt $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$.

Per trobar $P_2(x, y)$, hem de calcular les derivades parcials,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x+y} \cos(y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x+y}(\cos(y) - \sin(y)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = e^{x+y} \cos(y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = e^{x+y}(\cos(y) - \sin(y)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2e^{x+y} \sin(y)$$

i la funció, al punt $(x, y) = (0, \frac{\pi}{2})$:

$$f(0, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, \frac{\pi}{2}) = -e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, \frac{\pi}{2}) = -e^{\frac{\pi}{2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, \frac{\pi}{2}) = -2e^{\frac{\pi}{2}}.$$

El desenvolupament buscat resulta finalment:

$$f(x, y) = -e^{\frac{\pi}{2}} \left(y - \frac{\pi}{2}\right) - e^{\frac{\pi}{2}} x \left(y - \frac{\pi}{2}\right) - e^{\frac{\pi}{2}} \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 + R_2(x, y), \quad (21)$$

on hem aplicat (19), (20) i hem afegit el reste $R_2(x, y)$.

Tanmateix podem calcular el desenvolupament de Taylor “per generació”, combinant (per sumes, productes, quocients, composicions,...) els desenvolupaments de funcions elementals. Així:

$$\begin{aligned} e^{x+y} \cos(y) &= e^{\frac{\pi}{2}} e^x e^{y-\frac{\pi}{2}} \cos\left(y - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -e^{\frac{\pi}{2}} e^x e^{y-\frac{\pi}{2}} \sin\left(y - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -e^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) \times \left(1 + \left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \dots\right) \\ &\quad \times \left(\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3!} \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \dots\right) \\ &= -e^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + x \left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \dots\right) \\ &= -e^{\frac{\pi}{2}} \left(y - \frac{\pi}{2}\right) - e^{\frac{\pi}{2}} x \left(y - \frac{\pi}{2}\right) - e^{\frac{\pi}{2}} \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 + R_2(x, y), \end{aligned}$$

desenvolupament que coincideix (21). **Nota:** observem que treballem amb els desenvolupaments **formalment** com si fossin polinomis i, al final, tallem a l'ordre desitjat afegint el reste.

Teorema 16

Fórmula de Taylor per funcions de n variables Sigui la funció:

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (22)$$

amb A obert, $f \in C^k(A)$ ($k \geq 1$) i sigui: $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$.
Llavors:

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x),$$

on

- $P_k(x)$ és el polinomi de Taylor de grau k de f entorn de x_0 .
- $R_k(x)$ és el reste (o residu o romanent) d'ordre k , verificant:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{R_k(x)}{\|x - x_0\|^k} = 0.$$

Concretament:

(a) Per $k = 1$, tenim l'aproximació lineal:

$$P_1(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^0, \dots, x_n^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_i - x_i^0), \quad (23)$$

(b) Per $k = 2$, tenim l'aproximació quadràtica:

$$P_2(x_1, \dots, x_n) = P_1(x_1^0, \dots, x_n^0) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0). \quad (24)$$

(c) Finalment, per $k > 1$ tindrem, en general:

$$P_k(x_1, \dots, x_n) = P_{k-1}(x_1^0, \dots, x_n^0) + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_1^0, \dots, x_n^0) \cdot (x_{i_1} - x_{i_1}^0) \cdots (x_{i_k} - x_{i_k}^0).$$

Definició 17 (Vector gradient)

Sigui f una funció de n variables com (22) i de classe C^1 . Aleshores definim el seu **vector gradient** en un punt $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, $\text{grad}f(x_0)$, com el vector que conté les seves derivades parcials de 1^{er} ordre en x_0 , i. e.:

$$\text{grad}f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)^\top. \quad (25)$$

Remarca 7

Notem que, amb aquesta definició, l'aproximació lineal (23) del teorema 16 es pot expressar com:

$$P_1(x) = f(x_0) + \langle \text{grad}f(x_0), x - x_0 \rangle, \quad (26)$$

essent, per $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

i on escrivim: $x - x_0 = (x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0)^\top$.

Definició 18 (Matriu Hessiana)

Sigui f una funció de n variables com (22) i de classe C^2 . Aleshores definim la seva **matriu hessiana** en un punt $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, $\text{Hess}_f(x_0)$, com la matriu que conté les seves derivades parcials segones en x_0 , i. e.:

$$\begin{aligned} \text{Hess}_f(x_0) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarca 8

Notem que, amb la definició 18, l'aproximació quadràtica (24) del teorema 16 es pot expressar com:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_1(x) + \frac{1}{2} \langle x - x_0, \text{Hess}_f(x_0) \cdot (x - x_0) \rangle \\ &= P_1(x) + \frac{1}{2} (x - x_0)^\top \cdot \text{Hess}_f(x_0) \cdot (x - x_0). \end{aligned} \tag{27}$$

Canvis de variables (1)

Motivació: coordenades polars

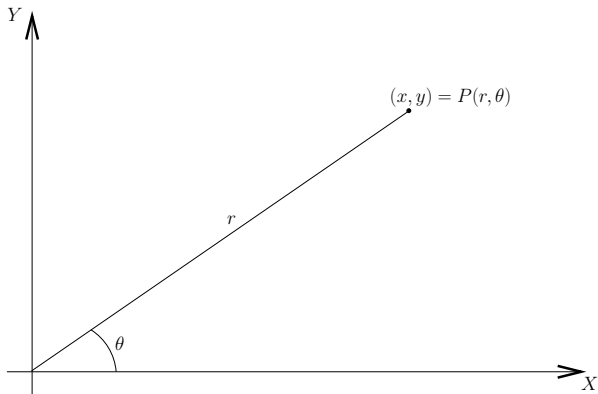


Figura 4: Es tracta d'assignar, mitjançant una funció, P , a cada (r, θ) , un punt del pla (x, y) i viceversa. Parlem doncs del canvi de variables de **coordenades polars** a **coordenades cartesianes** i, recíprocament, P^{-1} , de **coordenades cartesianes** a **coordenades polars**

Si definim el conjunts oberts de $A, B \subset \mathbb{R}^2$ com:

$$A := (0, +\infty) \times (-\pi, \pi), \quad (28)$$

$$B := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \leq 0\}, \quad (29)$$

llavors es comprova (exercici!) que la funció:

$$P : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ (r, \theta) & \mapsto & (x, y) = P(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{array} \quad (30)$$

- (1) És de classe C^∞ , i. e.: $P \in C^\infty(A)$.
- (2) P estableix una bijectió entre els oberts A i B de \mathbb{R}^2 . Això és: P és injectiva i

$$P(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists (r, \theta) \in A \text{ amb } P(r, \theta) = (x, y)\} =: B,$$

(i. e., la imatge d' A per la funció P és el conjunt B).

(3) La seva inversa, P^{-1}

$$\begin{aligned} P^{-1} : \quad B &\longrightarrow A \\ (x, y) &\mapsto (r, \theta) = P^{-1}(x, y) \\ &:= \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right), \end{aligned}$$

és C^∞ , i. e.: $P^{-1} \in C^\infty(B)$.

Aleshores P estableix un canvi de variables C^∞ (de coordenades polars a cartesianes) entre els oberts A i B . Veure figura 5.

Generalització: canvis de variables C^k

La definició 19 que donem tot seguit és una generalització d'aquestes idees. Així, un canvi de variables C^k entre dos oberts $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ és una bjecció $f : A \longrightarrow B$ de classe C^k en A , $k \geq 1$, amb inversa $f^{-1} : B \longrightarrow A$ de classe C^k en B . De vegades es diu que f estableix un **difeomorfisme** C^k ($k \geq 1$) entre A i B :

$$f \text{ és un canvi de variables } C^k \text{ entre } A \text{ i } B \iff f \in \text{Diff}^k(A, B).$$

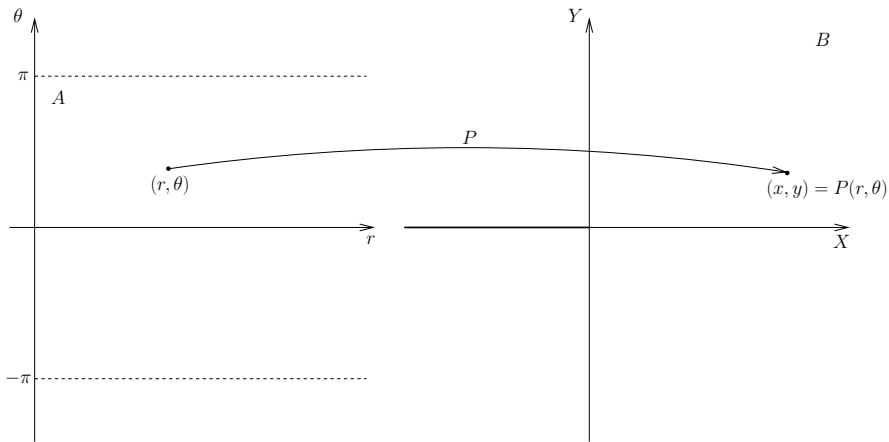


Figura 5: La funció P donada per (30) és una bijecció C^∞ entre els oberts $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ definits per (28) i (29); amb inversa, P^{-1} , també de classe C^∞ .

Canvis de variables (2)

Definició 19 (Canvis de Variables)

Donats dos oberts $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, direm que f és un **canvi de variables** C^k entre A i B sii:

(i) $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és C^k en A , $k \geq 1$.

(ii) f és injectiva i

$$f(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists x \in A \text{ amb } y = f(x)\} = B,$$

(i. e. B és la imatge d' A per la funció f).

(iii) $f^{-1} : B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és C^k en B .

Interpretació:

La definició 19 simplement diu que la transformació f “deforma” **de manera suau** el domini A en el domini B (veure figura 5).

Remarca 9

- Observem que si f és un canvi de variables, llavors els determinant de les matrius jacobianes de f i de f^{-1} són no nuls. En efecte, a partir de la identitat $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$; derivant per la regla de la cadena, s'obté:

$$Df^{-1}(f(x)) \cdot Df(x) = I_n \implies \det Df^{-1}(f(x)) \det Df(x) = 1$$

i si posem $y = f(x)$, llavors és clar que:

$$\det Df(y) \neq 0 \quad \text{i} \quad \det Df(x) \neq 0.$$

- En general no és fàcil determinar si f és un canvi de variables entre un domini arbitrari A i la seva imatge, ja que pot ser complicat demostrar tant la injectivitat de f com caracteritzar la imatge d' A per f . L'únic cas "senzill" és per transformacions afins de la forma

$$f(x) = a + Mx,$$

on $a \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Aleshores, si $\det M \neq 0$ la transformació f és invertible i la seva inversa ve donada per:

$$f^{-1}(y) = M^{-1}(y - a).$$

- En el cas general, tenim un resultat de caràcter local: el **teorema de la funció inversa**, que ens permet, sota certes condicions, establir quan f és localment injectiva (i. e., en un entorn d'un punt donat) i per tant defineix un canvi de coordenades entre un entorn del punt i la seva imatge.

Teorema 20 (Teorema de la funció inversa)

Sigui la funció:

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto y = f(x), \end{aligned}$$

A obert, $f \in C^k(A)$, $k \geq 1$, $x_0 \in A$. Si $\det Df(x_0) \neq 0$, llavors $\exists r > 0$ t. q.:

- $f : D_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és injectiva.
- Si $B = f(D_r(x_0))$, llavors $\exists f^{-1} : B \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, inversa local de f , verificant:
 - $f^{-1} \in C^k(B)$.
 - $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in D_r(x_0)$.
 - $Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}, \forall x \in D_r(x_0)$.

Remarca 10

Notem que (b.3) es dedueix de (b.2) derivant per la regla de la cadena.

Remarca 11

El valor de $r > 0$ del teorema 20 pel qual f és injectiva en $D_r(x_0)$ pot ser petit. D'altra banda, el teorema no ens diu com calcular f^{-1} , només justifica l'existència d'inversa local. L'únic punt del qual disposem informació precisa és del punt imatge de x_0 , $y_0 = f(x_0)$:

$$f^{-1}(x_0) = y_0, \quad Df^{-1}(y_0) = (Df(x_0))^{-1}.$$

En particular, si denotem per $M = Df(x_0)$, llavors l'aproximació lineal de f^{-1} en un entorn de y_0 queda:

$$f^{-1}(y) \approx f^{-1}(y_0) + Df^{-1}(y_0)(y - y_0) = x_0 + M^{-1}(y - y_0). \quad (31)$$

Exemple 13

Si $f(x, y) = (\sin x + \cos y, \cos x - \sin y)$, discutiu l'existència d'inversa local de f , t. q.: $f^{-1}(\sqrt{2}, 0) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

$$f^{-1}(\sqrt{2}, 0) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}, 0)$$

i llavors, si volem provar l'existència d'inversa en un entorn de $(u, v) = (\sqrt{2}, 0)$, haurem d'aplicar el Teorema a la funció f en $(x, y) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

- $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ (directament, aplicant els criteris de generació).
- D'altra banda:

$$\begin{aligned} \det Df\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) & \frac{\partial f_1}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) & \frac{\partial f_2}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & -\cos \frac{\pi}{4} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \neq 0. \end{aligned}$$

A més $f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}, 0)$. Aleshores, pel teorema 20 $\exists f^{-1}$, inversa local de f entorn de $(\sqrt{2}, 0)$. De manera més precisa, $\exists r > 0$ t. q.:

(a) $f : D_r(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ és injectiva.

(b) Si $B = f(D_r(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}))$, llavors:

$$\begin{aligned} \exists f^{-1} : \quad B &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (x, y) = f^{-1}(u, v), \end{aligned}$$

verificant:

(b.1) $f^{-1} \in C^\infty(B)$,

(b.2) $f^{-1}(f(x, y)) = (x, y)$, $\forall (x, y) \in D_r(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. En particular:

$$f^{-1}(\sqrt{2}, 0) = f^{-1}(f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}).$$

(b.3) $Df^{-1}(f(x, y)) = (Df(x, y))^{-1}$, $\forall (x, y) \in D_r(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. En particular:

$$\begin{aligned} Df^{-1}(\sqrt{2}, 0) &= Df^{-1}(f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})) = (Df(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}))^{-1} \\ &= \left(\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

L'aproximació lineal de f^{-1} en un entorn de $(\sqrt{2}, 0)$ s'obté aplicant la fórmula (31) de la Remarca 11 i resulta:

$$\begin{aligned} f^{-1}(u, v) &\approx \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - \sqrt{2} \\ v - 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(u - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} v \\ \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(u - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} u - \frac{\sqrt{2}}{2} v \\ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} u - \frac{\sqrt{2}}{2} v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple 14 (Aplicació pràctica del teorema de la funció inversa: sistemes d'equacions no lineals)

Suposarem, per simplificar, $n = 2$, però les mateixes idees s'apliquen en el cas n dimensional en general.

Suposem que tenim dues equacions NL en (x, y) de la forma:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= u_0 \\ f_2(x, y) &= v_0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

on (u_0, v_0) són valors donats. Suposem que coneixem una solució del sistema (32) donada per $(x, y) = (x_0, y_0)$. Ens preguntem si, en modificar el valors de (u_0, v_0) i considerar el sistema

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= u_* \\ f_2(x, y) &= v_* \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

amb (u_*, v_*) propers a (u_0, v_0) , podem afirmar que el nou sistema té solució única, propera a (x_0, y_0) . El Teorema 20 ens diu que si f_1 i f_2 són funcions almenys C^1 i el determinant jacobinà de $f := (f_1, f_2)$,

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0) \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

aleshores, per (u_*, v_*) suficientment propers a (u_0, v_0) , les equacions (33) admeten una solució única, (x_*, y_*) , propera a (x_0, y_0) . Veure figura 6. A més, tenim l'aproximació lineal

$$\begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}(x_0, y_0) \right)^{-1} \begin{pmatrix} u_* - u_0 \\ v_* - v_0 \end{pmatrix}.$$

Remarca 12 (Notació)

Si $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ amb A obert és derivable i $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in A$, denotem la matriu jacobiana (5) de f en x_0 per:

$$Df(x_0) = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

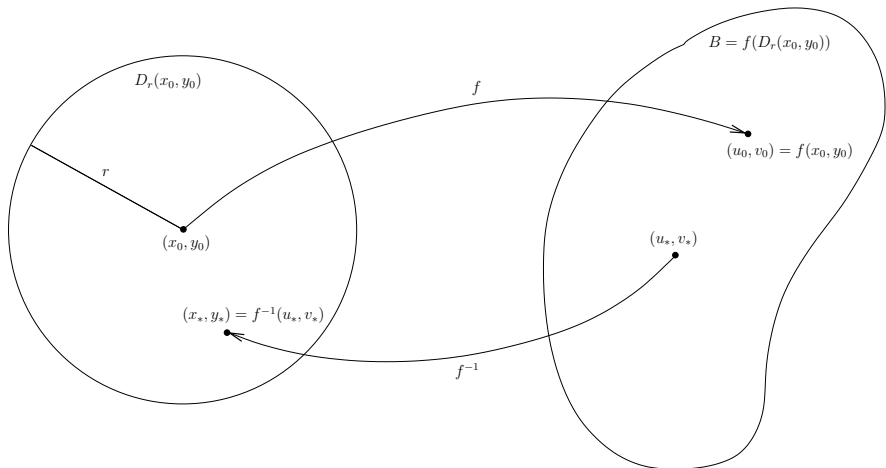


Figura 6: $f|_{D_r(x_0, y_0)}$ estableix una bijecció entre la bola de radi $D_r(x_0, y_0)$ i la seva imatge $B = f(D_r(x_0, y_0))$. Per tant, si (u_*, v_*) és suficientment proper a (u_0, v_0) com per $(u_*, v_*) \in B$, llavors $(x_*, y_*) = f^{-1}(u_*, v_*)$ és la solució (única) del sistema (33).

Exercici 4

El sistema d'equacions en (x, y) donat per:

$$\left. \begin{aligned} x^4 + y^4 &= 2 \\ x^2 - y^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

té per solució $(x, y) = (1, 1)$. Si considerem ara les equacions:

$$\left. \begin{aligned} x^4 + y^4 &= u \\ x^2 - y^2 &= v \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

comproveu que si els valors de (u, v) són suficientment propers a $(2, 0)$, llavors el sistema (34) tindrà una solució única, (x, y) , propera a $(1, 1)$. Doneu l'aproximació lineal d'aquesta solució per $(u, v) = (1.8, 0.1)$ i compareu-la amb la solució exacta.

Solució:

Definim les funcions:

$$f_1(x, y) := x^4 + y^4$$

$$f_2(x, y) := x^2 - y^2$$

És clar que $f := (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és una funció de classe C^2 en tot \mathbb{R}^2 . D'altra banda:

$$\begin{aligned} \det \left[\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}(1, 1) \right] &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, 1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, 1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -8 - 8 = -16 \neq 0 \end{aligned}$$

Per tant, aplicant el Teorema 20, per (u, v) suficientment propers a $(2, 0)$, \exists una única solució, (x_*, y_*) , propera a $(1, 1)$.

La seva aproximació lineal ve donada per:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}(1, 1) \right)^{-1} \begin{pmatrix} u - 2 \\ v - 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u - 2 \\ v - 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - 2 \\ v - 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{8}(u - 2) + \frac{1}{4}v \\ 1 + \frac{1}{8}(u - 2) - \frac{1}{4}v \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{35}$$

on hem aplicat la fórmula (31) que apareix a la remarca 11. Per últim, pels valors de (u, v) de l'enunciat, $(u, v) = (1.8, 0.1)$, l'aproximació lineal de la solució segons (35) resulta:

$$x_* \approx 1, \quad y_* \approx 0.95.$$

Mentre que es calcula fàcilment que la solució exacta buscada del sistema (34) amb $(u, v) = (1.8, 0.1)$ ve donada per:

$$x_* = \sqrt{\frac{v + \sqrt{2u - v^2}}{2}} = 0.998681513834526 \dots,$$

$$y_* = \sqrt{\frac{-v + \sqrt{2u - v^2}}{2}} = 0.947293389650124 \dots$$

Càlcul 2

3. Integració de Funcions de dues o més variables

Dept. de Matemàtica Aplicada I

www.ma1.upc.edu

Universitat Politècnica de Catalunya

10 febrer 2014

Copyright © 2014

Reproducció permesa sota els termes de la llicència
de documentació lliure GNU

www.gnu.org/licenses/fdl.html

Integrals dobles

Sigui $f : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f \geq 0$, amb $a < b$ i $c < d$. La integral doble:

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy, \quad (1)$$

dóna el volum en \mathbb{R}^3 tancat per la gràfica de la funció $z = f(x, y)$ i el pla xy (veure **figura 1**).

Remarca 1

Si $f(x, y)$ pren valors negatius, llavors es defineix:

$$f^+ = \max_R(f, 0) \geq 0, \quad f^- = \max_R(-f, 0) \geq 0,$$

i la integral doble (1) s'escriu com la diferència:

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy = \iint_R f^+(x, y) \, dx dy - \iint_R f^-(x, y) \, dx dy.$$

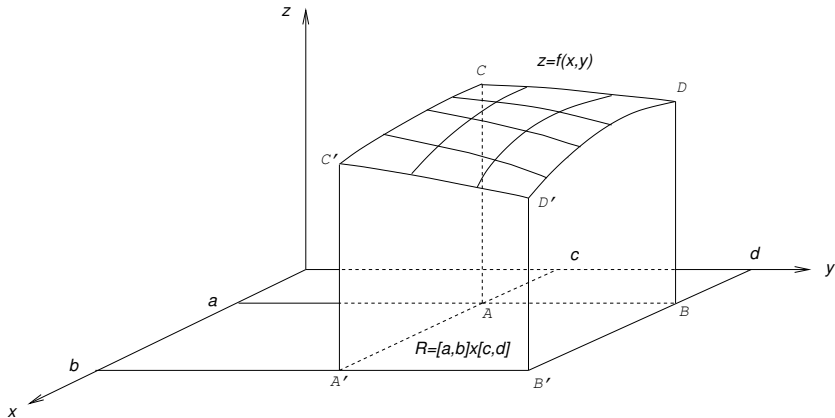


Figura 1: La integral doble $\iint_R f(x,y) \, dx \, dy$ dona el volum de la regió de \mathbb{R}^3 limitada per la gràfica de la funció $z = f(x,y)$, el pla xy i els plans $x = a$, $x = b$, $y = c$ i $y = d$.

Remarca 2

Sigui $A \subset \mathbb{R}^2$ un domini acotat però no un rectangle. Si volem introduir la integral doble

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy,$$

només cal considerar un rectangle R t.q. $A \subset R$ i definir l'extensió:

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in A, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in R \setminus A. \end{cases}$$

Llavors és clar que:

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy := \iint_R \tilde{f}(x, y) \, dx dy$$

donat que els volums coincideixen.

Definició 1 (Sumes superiors i inferiors de Riemann)

Sigui $f : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, $n \in \mathbb{N}$. Definim la suma superior n -èsima de f en R per:

$$S_n(f, R) := \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \sup_{(x,y) \in R_{i,j}} \{f(x, y)\} \quad (2)$$

i la suma inferior n -èsima per:

$$s_n(f, R) := \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \inf_{(x,y) \in R_{i,j}} \{f(x, y)\}, \quad (3)$$

on

$$R_{i,j} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

són subrectangles (veure **figura 2**), amb

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad y_j = c + j \frac{d-c}{n}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Estem aproximant el volum $\iint_R f(x, y) dx dy$ mitjançant paral·lelèpeds (“capses de sabates”) amb base els subrectangles $R_{i,j}$ i una alçada que

- Pel cas de les sumes inferiors, $s_n(f, R)$, ve donada per:

$$f(c_{i,j}) = \inf_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x, y) \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Per tant la “tapa” inferior de cada capsa està per sota de la gràfica de la funció (capses “inscrites”). Veure figura 3.

- Mentre que per les sumes superiors, $S_n(f, R)$, l'alçada ve donada per:

$$f(c_{i,j}) = \sup_{(x,y) \in R_{i,j}} f(x, y) \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Per tant la “tapa” superior de cada capsa està per sobre de la gràfica de la funció (capses “circumscrietes”). Veure figura 4.

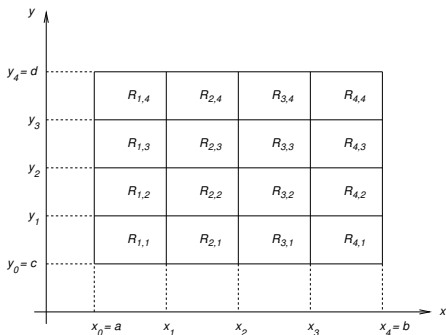


Figura 2: Dividim el rectangle R en n^2 subrectangles (a la figura es representa $n = 4$), cadascun d'ells de costats $\frac{b-a}{n}$ i $\frac{d-c}{n}$.

Llavors és clar que per tot $n \in \mathbb{N}$ tenim:

$$s_n(f, R) \leq \iint_R f(x, y) \, dx dy \leq S_n(f, R).$$

És a dir, les sumes inferiors aproximen el volum “per defecte”, mentre que les sumes superiors aproximen el volum “per excés”.

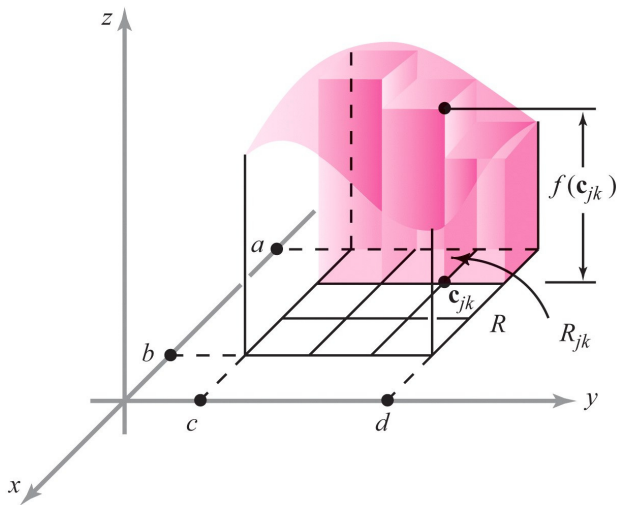


Figura 3: Les sumes inferiors, $s_n(f, R)$, aproximen (per defecte) el volum $\iint_R f(x, y) dx dy$ mitjançant capses inscrites. Figura treteta del llibre: "Cálculo Vectorial", de J. E. Marsden i A. J. Tromba 5^a Ed.

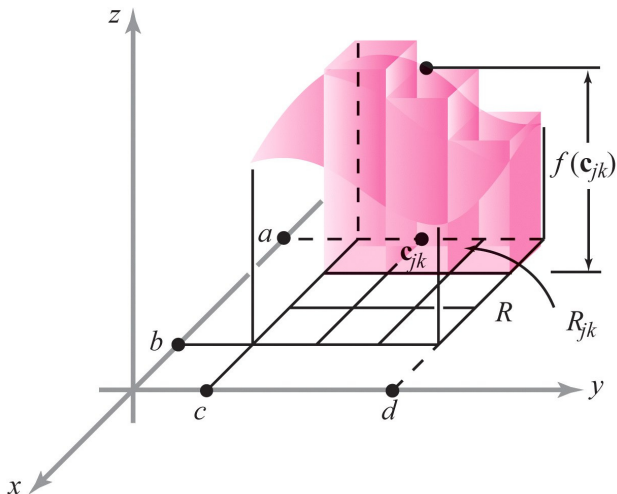


Figura 4: Les sumes superiors, $S_n(f, R)$, aproximen (per excés) el volum $\iint_R f(x, y) dx dy$ mitjançant capses circumscrites. Figura tretze del llibre: "Càlculo Vectorial", de J. E. Marsden i A. J. Tromba 5ª Ed.

Exemple 1

Sigui $f(x, y) = 1 - x$ (veure **figura 5**) i el rectangle $R = [0, 1] \times [0, 1]$.
Volem calcular:

$$\lim_n S_n(f, R),$$

$$\lim_n s_n(f, R).$$

Si $(x, y) \in R_{i,j} \Rightarrow x_{i-1} \leq x \leq x_i$ i:

$$\begin{aligned} 1 - x_i \leq f(x, y) = 1 - x \\ \leq 1 - x_{i-1}. \end{aligned}$$

Llavors:

$$\sup_{(x,y) \in R_{i,j}} \{f(x, y)\} = 1 - x_{i-1},$$

$$\inf_{(x,y) \in R_{i,j}} \{f(x, y)\} = 1 - x_i,$$

per $i, j = 1, \dots, n$.

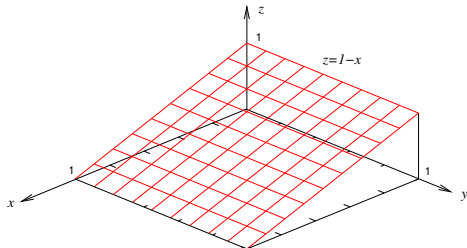


Figura 5: La gràfica de la funció $f(x, y) = 1 - x$ és un tros de pla inclinat on z creix de 0 a 1 quan x es mou de 1 a 0.

En aquest cas $x_i = 0 + i \frac{1-0}{n} = \frac{i}{n}, i = 0, 1, \dots, n$; aleshores:

$$\begin{aligned} S_n(f, R) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n (1 - x_{i-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) \\ &= 1 - \frac{1}{n^2} (0 + 1 + \dots + n-1) = 1 - \frac{1}{n^2} \left(\frac{(n-1)n}{2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \\ s_n(f, R) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \dots = 1 - \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n-1}{2n}. \end{aligned}$$

El límits buscats són doncs:

$$\lim_n S_n(f, R) = \lim_n s_n(f, R) = \frac{1}{2}.$$

Això motiva la definició que donem tot seguit.

Definició 2 (Funcions integrables)

Sigui $f : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Direm que f és integrable en R si existeixen i són coincidents els límits:

$$I = \lim_n S(f, R) = \lim_n s(f, R).$$

Llavors escriurem:

$$I := \iint_R f(x, y) \, dx dy$$

El següent resultat dóna una caracterització de les funcions integrables sobre rectangles:

Teorema 3 (Criteri d'integrabilitat en un rectangle)

Sigui $f : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ acotada i contínua excepte en un conjunt de punts $A \subset R$ que està contingut en la unió d'un nombre finit de corbes contínues contingudes en R . Llavors f és integrable en el rectangle R .

Exemple 2

La funció esglaó:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } (x, y) \in R, x \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } (x, y) \in R, x \in (1, 2] \end{cases}, \quad R = [0, 2] \times [0, 1] \quad (4)$$

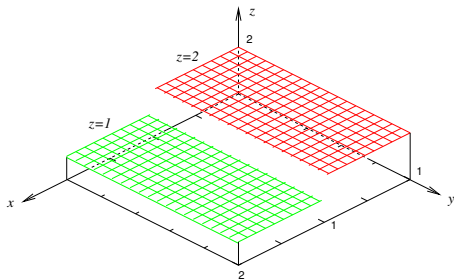


Figura 6: La funció esglaó (4) és integrable d'acord amb el teorema 3.

és integrable en R segons el teorema 3, ja que la seva fractura es produeix al llarg d'una recta.

Clarament, el valor de la integral:

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = 2 + 1 = 3$$

és el volum sota l'esglaó.

Remarca 3

De fet podem refinar el criteri anterior dient que f és integrable en R si el conjunt de les singularitats de f forma un **conjunt d'àrea zero**.

Definició 4 (Àrea d'un conjunt de \mathbb{R}^2)

Sigui $D \subset \mathbb{R}^2$ un conjunt acotat. Definim l'àrea del conjunt D per

$$\text{Àrea}(D) = \iint_D 1 \, dx dy$$

(sempre que la integral existeixi).

Comentaris:

- L'àrea d'un punt i d'una corba contínua és zero.
- La unió finita de conjunts d'àrea zero té àrea zero.
- Important!: si modifiquem els valors d'una funció integrable en un conjunt d'àrea zero, llavors la funció continua sent integrable i el valor de la integral és el mateix.

Definició 5 (Domini elemental del pla)

Direm que un conjunt $D \subset \mathbb{R}^2$ és un domini elemental si és acotat i la seva frontera està formada per la unió finita de corbes contínues.

Exemples de dominis elementals són:

- El rectangle: la seva frontera són els seus costats.
- El disc: la seva frontera és una circumferència.
- L'anell: la seva frontera és la unió de dues circumferències.

Com que nosaltres bàsicament treballarem sobre aquest tipus de dominis, serà essencial el resultat següent:

Teorema 6 (Criteri d'integrabilitat en dominis elementals)

Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D domini elemental, f acotada i contínua excepte en un conjunt de punts $A \subset D$ que té àrea zero. Llavors f és integrable en D .

Integrals triples

- De manera natural, podem estendre la construcció de la integral d'una funció $f(x, y)$ de dues variables sobre un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ al cas d'una funció $f(x, y, z)$ de tres variables sobre un paral·lelepíed $P = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$.

- El punt clau per definir les sumes de Riemann és que el volum de P és

$$\text{Volum}(P) = (b - a) \times (d - c) \times (f - e).$$

- En aquest cas el paper dels conjunts d'àrea zero el juguen els conjunts de volum zero, on si $D \subset \mathbb{R}^3$ és acotat, llavors:

$$\text{Volum}(D) = \iiint_D 1 \, dx dy dz.$$

En particular, observem que una superfície de \mathbb{R}^3 té volum zero.

- Finalment, els dominis elementals $D \subset \mathbb{R}^3$ són aquells que la seva frontera està formada per la unió finita de superfícies contínues.

Idènticament, podem estendre la noció d'integral a funcions de més de tres variables.

Integrals múltiples

Notació:

En el que segueix $D \subset \mathbb{R}^n$. Llavors escriurem $\int_D f$ per referir-nos a la integral de f en D , independentment del valor de n . Així:

- Si $n = 2$: $\int_D f = \iint_D f(x, y) \, dx dy$.
- Si $n = 3$: $\int_D f = \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz$, etc.

Proposició 7 (Propietats de la integral)

Sigui $D \subset \mathbb{R}^n$ domini elemental, f i g integrables en D . Aleshores:

- $\int_D (af + bg) = a \int_D f + b \int_D g$, per tot $a, b \in \mathbb{R}$ (linealitat).
- Si $f \geq g$ en D : $\int_D f \geq \int_D g$.
- $|\int_D f| \leq \int_D |f|$.
- Si $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ amb D_1, D_2 dominis elementals:

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

Proposició 8 (Teorema del valor mig per a integrals múltiples)

Sigui $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, D domini elemental. Llavors $\exists \mathbf{x}_0 \in D$ t.q.:

$$\int_D f = f(\mathbf{x}_0) \cdot \int_D 1,$$

on $\int_D 1 = \text{Àrea}(D)$ si $n = 2$, $\int_D f = \text{Volum}(D)$ si $n = 3$, etc.

Aplicació: acotació del valor de les integrals

Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ (bola tancada de centre $(0, 0)$ i radi $r = 2$), tenim:

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy = f(x_0, y_0) \cdot \text{Àrea}(D) = e^{x_0^2+y_0^2} \pi \cdot 2^2,$$

per algun $(x_0, y_0) \in D$. D'altra banda és clar que $1 \leq e^{x_0^2+y_0^2} \leq e^4$ en D , i llavors:

$$4\pi \leq \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy \leq 4\pi e^4.$$

Càlcul d'integrals

Comentaris:

Per calcular integrals de funcions de dues o més variables, els punts claus són:

- Cal saber “primitivitzar” les funcions involucrades respecte de cadascuna de les variables. Així és molt senzill formalitzar el càlcul de la integral d'una funció de dues variables sobre un rectangle (o de tres variables sobre un paral·lelèpid) en termes d'integrals iterades respecte cadascuna de les variables.
- En el cas de funcions de dues o més variables sobre dominis elementals, cal a més saber parametritzar adequadament aquests dominis.

Comencem introduint el **Principi de Cavalieri** que a més d'oferir una eina potent pel càlcul de volums en \mathbb{R}^3 també “motiva” el càlcul d'integrals en el cas més general via el **Teorema de Fubini**.

Bonaventura Cavalieri (1598–1647)



Jesuita i matemàtic italià, alumne de Galileo, ocupà la càtedra de matemàtiques a la Universitat de Bolònia. Autor, entre d'altres treballs de l'obra: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635, 2^a edició, 1653).

El principi de Cavalieri, tal com es va formular originalment, es pot resumir en els termes següents:

Principi de Cavalieri

“Si dos sòlids al ser tallats per plans paral·lels produeixen sempre seccions d'igual superfície, llavors aquests cossos tenen el mateix volum”.

(nosaltres aplicarem una versió adaptada d'aquest principi que tot seguit formalitzarem).

Per discutir les aplicacions d'aquest principi:

- començarem amb el cas més senzill del càlcul de l'àrea d'un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ determinat per les gràfiques de dues funcions contínues. En particular, definirem:
 - **Domini x -elemental**: la seva frontera es pot expressar en termes de gràfiques de y en funció de x . Figura 7.
 - **Domini y -elemental**: la seva frontera es pot expressar en termes de gràfiques de x en funció de y . Figura 8.
- Quan el domini D té una frontera que no es pot expressar en termes de gràfiques d'aquesta mena, s'aplica el **principi de Cavalieri per al Càlcul d'àrees**. Figura 9.
- No farem exemples del càlcul d'àrees, sinó que ens centrarem en el càlcul de volums de regions D en \mathbb{R}^3 . Per això enunciem una versió "modernitzada" del principi de Cavalieri (**Proposició 9**).

Domini x -elemental

$$\text{Àrea}(D) = \iint_D 1 \, dx dy = \int_a^b (g(x) - h(x)) \, dx = \int_a^b \ell(x) \, dx,$$

on $\ell(x) :=$ longitud del segment vertical $\overline{(x, h(x)), (x, g(x))}$.

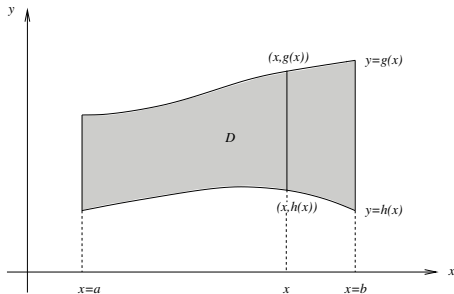


Figura 7: Representació d'un domini x -elemental.

Domini y -elemental

$$\text{Àrea}(D) = \iint_D 1 \, dx dy = \int_c^d (v(y) - u(y)) \, dy = \int_c^d \ell(y) \, dy,$$

on $\ell(y) :=$ longitud del segment horitzontal $\overline{(u(y), y), (v(y), y)}$.

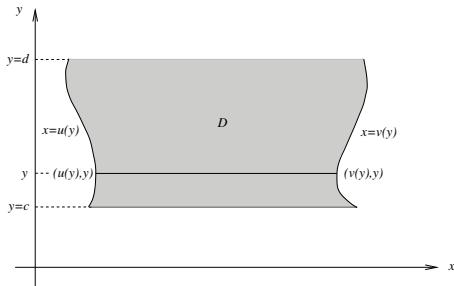


Figura 8: Representació d'un domini y -elemental.

Principi de Cavalieri per al càlcul d'àrees

Suposem que si $(x, y) \in D$, aleshores, els valors de x varien entre $x = a$ i $x = b$ i denotem per $\ell(x_0)$ la suma de les longituds dels segments que obtenim si tallem D amb una recta vertical, per exemple, a la figura 9:

$\ell(x_0)$ és la suma de les longituds dels segments \overline{EF} i \overline{GH} , llavors:

$$\text{Àrea}(D) = \int_a^b \ell(x) dx.$$

Ídem si fem seccions per rectes horitzontals de la forma $y = y_0$:

$$\text{Àrea}(D) = \int_c^d \ell(y) dy,$$

on ara $\ell(y_0)$ és la suma de les longituds dels segments $\overline{H'G'}$ i $\overline{F'E'}$.

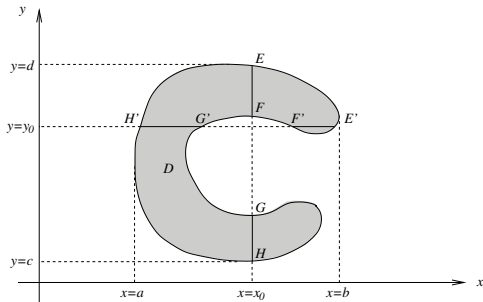


Figura 9: Seccions per rectes horitzontals i verticals del domini D .

Proposició 9 (Principi de Cavalieri)

Sigui $D \subset \mathbb{R}^3$ un domini elemental tal que si $(x, y, z) \in D$ llavors $x \in [a, b]$. Denotem per $A(x_0)$ l'àrea de la regió plana determinada pel tall de D amb el pla $x = x_0$. Aleshores:

$$\text{Volum}(D) = \int_a^b A(x) dx.$$

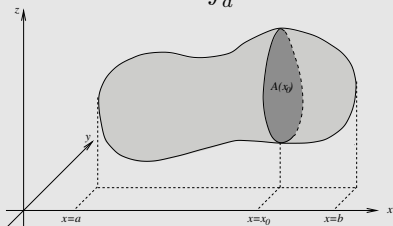


Figura 10: Tall transversal de la regió D pel pla $x = x_0$. El mateix resultat és vàlid si fem talls per plans de la forma: $y = y_0$ ó $z = z_0$.

Exemple 3

Càlcul del volum d'una bola:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

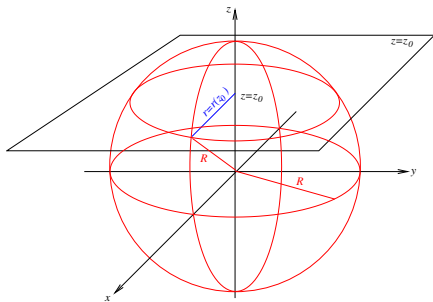


Figura 11: Tall de l'esfera de radi R pel pla $z = z_0$.

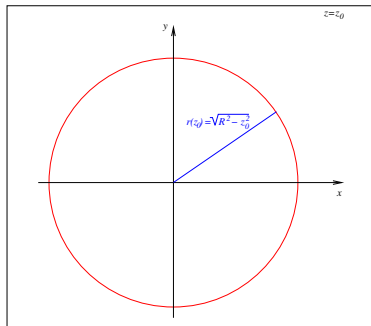


Figura 12: La secció $D \cap \{z = z_0\}$ és un disc de radi $r(z_0) = \sqrt{R^2 - z_0^2}$.

Punts clau:

(i) L'àrea d'un disc de radi r és πr^2 .

(ii) Si fem $z = \text{const.}$ llavors la secció de D amb el pla és la bola

$$x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2$$

(si $-R \leq z \leq R$) de radi

$$r(z) = \sqrt{R^2 - z^2}.$$

Aleshores:

$$\begin{aligned} \text{Volum}(D) &= \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz \\ &= \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=-R}^{z=R} = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Exemple 4

Sigui D el domini de revolució (entorn de l'eix z) definit per

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}.$$

Les seccions $z = \text{const.}$ són boles de radi $\sqrt{1 + z^2}$ i per tant:

$$\begin{aligned} \text{Volum}(D) &= \int_{-1}^1 \pi(1 + z^2) dz \\ &= \pi \left[z + \frac{z^3}{3} \right]_{z=-1}^{z=1} = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

En canvi, si fem seccions, per ex. per $x = \text{const.}$, el càlcul resulta molt més complicat.

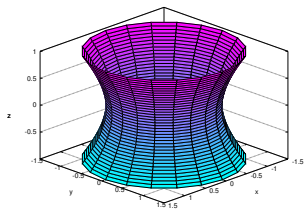
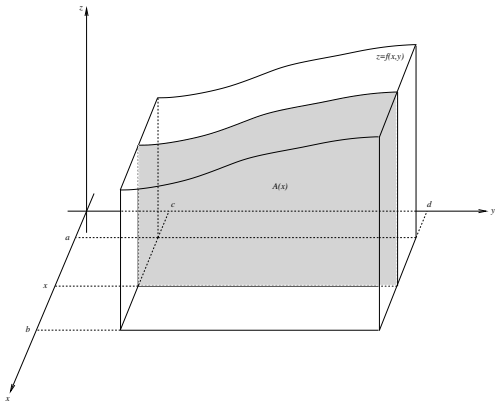


Figura 13: $x^2 + y^2 = 1 + z^2$.

Aplicuem el principi de Cavalieri al càlcul del volum sota la gràfica d'una funció $f(x, y) \geq 0$ definida al rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$. Això és:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in [a, b] \times [c, d], 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$



Si fem $x = \text{const.}$ obtenim un domini secció que té àrea:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Llavors:

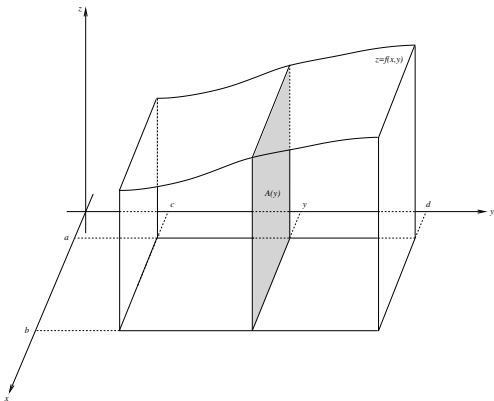
$$\text{Volum}(D) = \int_a^b A(x) dx.$$

Si repetim els càlculs fent seccions $y = \text{const.}$ obtenim:

$$A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

d'on:

$$\text{Volum}(D) = \int_c^d A(y) dy.$$



Finalment, si recordem que $\text{Volum}(D) = \iint_D f(x, y) dx dy$, tenim:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Aquest resultat (vàlid si f és contínua) es coneix com **Teorema de Fubini**.

Teorema de Fubini

Guido Fubini (1879-1943)



Matemàtic italià destacà en camps tan diversos com l'anàlisi, la geometria i la física matemàtica. Autor, entre d'altres obres, de **Lezioni Di Analisi Matematica (1920)**

Teorema 10 (Teorema de Fubini)

Sigui $f : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Aleshores, les integrals iterades,

$$I_1 := \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx, \quad I_2 := \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

existeixen totes dues i verifiquen:

$$I_1 = I_2 = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Exemple 5

Si $R = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 1]$, volem trobar $I := \iint_R x \cos(xy) \, dx dy$.

Com que $f(x, y) = x \cos(xy)$ és una funció contínua:

$$\begin{aligned} \iint_R x \cos(xy) \, dx dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 x \cos(xy) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} [\sin(xy)]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_{x=0}^{x=\pi/2} = \cos 0 = 1. \end{aligned}$$

Remarca 4

Si considerem l'altra integral iterada,

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} x \cos(xy) \, dx \right) dy,$$

cal calcular una primitiva respecte de x de $x \cos(xy)$. Obtindríem el mateix resultat, però el càlcul surt més complicat...

Corol·lari 11

Si $f(x, y) = g(x)h(y)$, aleshores la integral sobre el rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ es pot expressar com:

$$\iint_R g(x)h(y) \, dx dy = \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \times \left(\int_c^d h(y) \, dy \right).$$

Exemple 6

$$\begin{aligned} \iint_{[1,2] \times [1,3]} xy^2 \, dx dy &= \left(\int_1^2 x \, dx \right) \times \left(\int_1^3 y^2 \, dy \right) \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=1}^{x=2} \times \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=1}^{y=3} \\ &= \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) \times \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{2} \times \frac{26}{3} = 13. \end{aligned}$$

Remarca 5

Si $f(x, y)$ no és contínua però sí integrable, el teorema de Fubini també és cert però amb matissos. Així:

- Si $f(x, y)$ és integrable en $R = [a, b] \times [c, d]$ i alguna de les integrals iterades existeix, llavors coincideix amb el valor de $\iint_R f$.
- En alguns casos doncs, malgrat f sigui integrable, pot ser que alguna de les integrals iterades no existeixi.
- Nosaltres no formalitzarem aquest fet però sí donarem el següent criteri de no integrabilitat.

x

Criteri de no integrabilitat de f en R

Si les integrals de iterades existeixen i són diferents, llavors f no és integrable en R .

Exemple 7

Sigui $f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3}$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Aleshores:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{1}{(x + y)^2} - \frac{2y}{(x + y)^3} \right] dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{-1}{x + y} + \frac{y}{(x + y)^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{-1}{1 + y} + \frac{y}{(1 + y)^2} \right] dy \\ &= - \int_0^1 \frac{dy}{(1 + y)^2} = \left[\frac{1}{1 + y} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

mentre que, per simetria, es clar que $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dy \right) dx = \frac{1}{2}$. Per tant, f no és integrable en R .

Teorema de Fubini per dominis x -elementals

Si

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, h(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Llavors:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

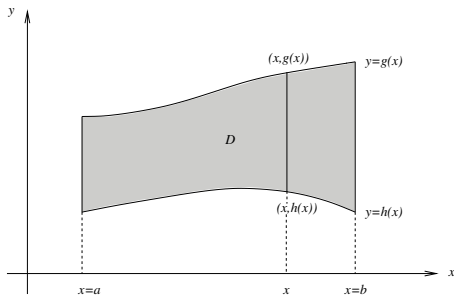


Figura 14: Domini x -elemental.

Teorema de Fubini per dominis y -elementals

Si

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d, u(y) \leq x \leq v(y)\}.$$

Llavors:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

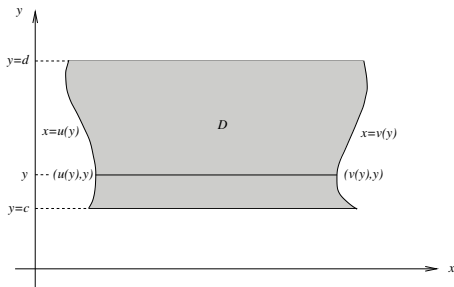


Figura 15: Domini y -elemental.

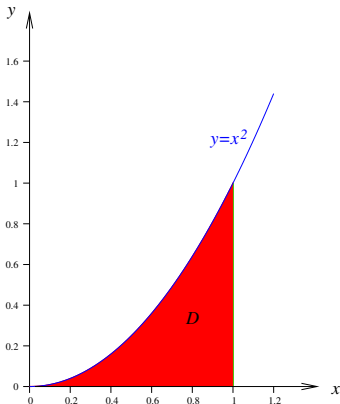
Remarca 6

- És molt normal que un domini $D \subset \mathbb{R}^2$ sigui simultàniament x -elemental i y -elemental. Aleshores, totes dues opcions són vàlides per integrar $\iint_D f$, però s'ha de veure quina dóna lloc a càlculs més simples.
- Si el domini D no encaixa en cap dels casos anteriors, sempre tenim la opció de dividir el domini en trossos que siguin x -elementals ó y -elementals i integrar per separat cadascun d'ells. De vegades, però, resulta més convenient l'ús de coordenades adaptades. Ho discutirem més endavant quan parlem de **canvis de variables**.

Exemple 8

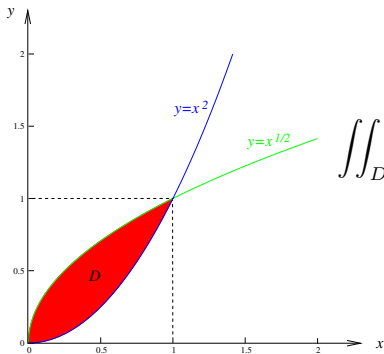
Escriviu les dues integrals iterades de la funció $f(x, y)$ corresponents als dominis següents:

(i) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$.



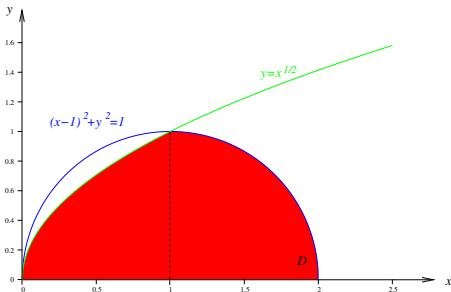
$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) \, dx \right) dy.\end{aligned}$$

(ii) D : domini limitat per les corbes $y = x^2$ i $y^2 = x$.



$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy.\end{aligned}$$

(iii) D : domini limitat per les corbes $y^2 = x$, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ i $y \geq 0$.



$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) \, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) \, dy \right) dx.\end{aligned}$$

Exemple 9

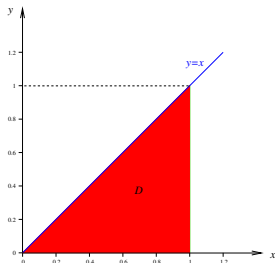
Calculeu $I = \iint_D e^{\frac{y}{x}} dx dy$ on D és el triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(1,0)$ i $(1,1)$.

Veiem que no podem calcular la integral:

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{\frac{y}{x}} dx \right) dy,$$

ja que la primitiva $\int e^{\frac{y}{x}} dx$ no és expressable en termes de funcions elementals. Així que ho haurem de calcular amb l'altra:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}} dy \right) dx &= \int_0^1 \left[x e^{\frac{y}{x}} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 x(e-1) dx \\ &= (e-1) \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{e-1}{2}. \end{aligned}$$



Teorema de Fubini per funcions de tres variables

- Si $g(x, y, z)$ és contínua en $P = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, llavors totes les **integrals iterades** existeixen i el seu valor és el mateix i igual al valor de la integral sobre P . Així:

$$\iiint_P g(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^f g(x, y, z) \, dz \right) dy \right] dx$$

o en qualsevol ordre en què es considerin les integrals iterades respecte x, y, z .

- Si D és un domini elemental i el podem parametritzar, per exemple, com:

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \quad \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y).$$

Llavors:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\gamma_1(x, y)}^{\gamma_2(x, y)} g(x, y, z) \, dz \right) dy \right] dx.$$

Exemple 10

Calculeu $I = \iiint_D 2z \, dx dy dz$, on D és el domini de \mathbb{R}^3 definit per les restriccions:

$$x, y, z \geq 0, \quad x^2 + y \leq 1, \quad z \leq x^2 + y^2.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x^2} \left(\int_0^{z=x^2+y^2} 2z \, dz \right) dy \right] dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} [z^2]_{z=0}^{z=x^2+y^2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} (x^2 + y^2)^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[x^4y + \frac{2}{3}x^2y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{y=0}^{y=1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left[x^4(1-x^2) + \frac{2}{3}x^2(1-x^2)^3 + \frac{1}{5}(1-x^2)^5 \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{5} - \frac{x^2}{3} + x^4 - x^6 + \frac{x^8}{3} - \frac{x^{10}}{5} \right] dx = \dots = \frac{1714}{10395}. \end{aligned}$$

CdCs per integrals dobles

Siguin D, D^* oberts acotats de \mathbb{R}^2 . Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} T : D^* &\longrightarrow D \\ (u, v) &\longrightarrow (x, y) = (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

(u, v) són les coordenades “noves” i (x, y) són les coordenades “velles”, on:

- (i) T és almenys C^1 i bijectiva i per tant $\exists T^{-1} : D \rightarrow D^*$.
- (ii) $\det DT(u, v) \neq 0 \forall (u, v) \in D^* \Rightarrow T^{-1}$ també és de classe C^1 (Teorema de la funció Inversa).
- (iii) La matriu:

$$DT(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

és la matriu de derivades parcials o **matriu Jacobiana**.

Definició 1

Anomenarem **Jacobià** de T al determinant

$$J_T(u, v) := \det DT(u, v).$$

Teorema 2 (canvi de variables per funcions de dues variables)

Siguin D, D^ dos oberts acotats del pla y $T : D^* \rightarrow D$ un canvi de variable. Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció integrable, es satisfà:*

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J_T(u, v)| \, du dv.$$

Corol·lari 3 (Canvi de variables pel càlcul d'àrees)

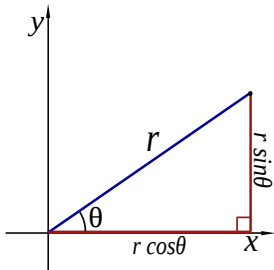
$$\iint_D 1 \, dx dy = \iint_{D^*} |J_T(u, v)| \, du dv.$$

El canvi de variables més important en el pla són les **coordenades polars**.

Coordenades polars (1/2)

Les coordenades polars vénen definides pel canvi:

$$\begin{aligned} T : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\} \\ (r, \theta) &\longrightarrow (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$



- El fet de què les coordenades polars no cobreixin la semi-recta:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\}$$

no té influència en el càlcul de la integral ja que és un conjunt d'àrea zero.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \begin{cases} 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } y \geq 0, \\ 2\pi + 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Coordenades polars (2/2)

- El jacobià de les coordenades polars és:

$$\begin{aligned} J_T(r, \theta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r. \end{aligned}$$

- Per tant, si $D = T(D^*)$, tenim:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr d\theta.$$

CdCs per funcions de 3 variables (1/2)

L'extensió de dels CdCs al cas de funcions de tres o més variables no presenta cap dificultat conceptual.

Siguin D, D^* oberts acotats de \mathbb{R}^3 i,

$$(u, v, w) \in D^* \xrightarrow{T} (x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \in D$$

un canvi de variables C^1 . El seu jacobià és, $J_T(u, v, w) =$

$$\det \left[\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}(u, v, w) \right] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u, v, w) \end{vmatrix}.$$

CdCs per funcions de 3 variables (2/2)

Així, si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ és integrable, tenim:

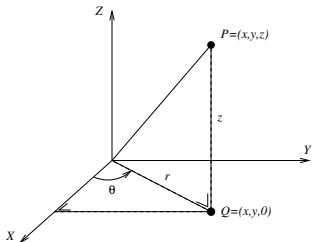
$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= \iiint_{D^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J_T(u, v, w)| \, du dv dw. \end{aligned}$$

Les coordenades més usuals en \mathbb{R}^3 són les **cilíndriques** i les **esfèriques**.

Coordenades cilíndriques (1/2)

Estan definides de la forma següent:

$$T : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\}$$
$$(r, \theta, z) \longrightarrow (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$



- Si projectem $P = (x, y, z)$ en el pla xy , obtenim el punt $Q = (x, y, 0)$, llavors (r, θ) són les corresponents coordenades polars d'aquest punt, mentre que z dona l'alçada del punt.
- El nom de coordenades cilíndriques és clar, ja que si fixem el valor de $r = R$, llavors la transformació:

$$(x, y, z) = T_R(\theta, z) := T(R, \theta, z) = (R \cos \theta, R \sin \theta, z)$$

parametriza un cilindre de base circular amb radi R .

- Les coordenades cilíndriques són útils quan el domini d'integració presenti simetria cilíndrica, i.e., de rotació respecte de una recta.

Coordenades cilíndriques (2/2)

- El conjunt de punts per als quals les coordenades no estan definides és un semiplà. Com que és un conjunt de volum zero això no comporta cap dificultat en el càlcul de la integral.
- el seu jacobià és $J_T(r, \theta, z) =$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial x}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial y}{\partial z}(r, \theta, z) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(r, \theta, z) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(r, \theta, z) & \frac{\partial z}{\partial z}(r, \theta, z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

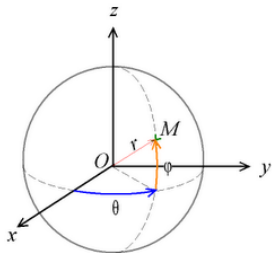
- Així:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dr d\theta dz.$$

Coordenades esfèriques (1/2)

Estan definides per:

$$\begin{aligned} T : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\} \\ (r, \theta, \varphi) &\longrightarrow (x, y, z) = \\ &\quad (r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi). \end{aligned}$$



- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ és la distància del punt $M = (x, y, z)$ a l'origen $O = (0, 0, 0)$.
 - $\varphi \equiv$ latitud: l'angle que forma el vector de posició del punt $M = (x, y, z)$ amb la seva projecció al pla xy ($\varphi > 0$ en l'hemisferi nord).
 - $\theta \equiv$ longitud: l'angle que forma la projecció $(x, y, 0)$ del vector de posició del punt $M = (x, y, z)$ sobre el pla xy amb l'eix x .
-
- El nom de coordenades esfèriques és clar: si fixem $r = R$, llavors la transformació $T_R(\theta, \varphi) := T(R, \theta, \varphi)$ parametriza una esfera de radi R .

Coordenades esfèriques (2/2)

- Les coordenades esfèriques són útils quan el domini d'integració presenti simetria esfèrica, i.e., simetria respecte un punt.
- El seu jacobíà és:

$$J_T(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2 \cos \varphi.$$

Observem que $r^2 \cos \varphi > 0$ si $r > 0$ i $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

- Així:

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \\ = \iiint_{D^*} f(r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi) r^2 \cos \varphi \, dr d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Càlcul 2

4. Fonaments d'Equacions Diferencials Ordinàries

Dept. de Matemàtica Aplicada I

www.ma1.upc.edu

Universitat Politècnica de Catalunya

11 febrer 2014

Copyright © 2014

Reproducció permesa sota els termes de la llicència
de documentació lliure GNU

www.gnu.org/licenses/fdl.html

Definició 1

Una **Equació Diferencial Ordinària (EDO)** d'ordre m és una relació del tipus:

$$g(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = 0, \quad (1)$$

on g és una funció donada definida en un domini $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ i amb valors en \mathbb{R} , t és la variable independent i $x = x(t)$ és la funció incògnita (o “variable depenent”).

Direm que una funció $x = x(t)$, definida per $t \in I$, interval de \mathbb{R} , és una **solució** de (1) si és m cops derivable i verifica:

$$g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) = 0,$$

per tot $t \in I$.

Així doncs, una EDO és bàsicament una equació on la incògnita és una funció d'1 variable, de forma que ella i les seves derivades fins a cert ordre verifiquin una relació donada, per tot valor de la variable independent.

Exemples

- 1 $y = y'$ EDO de 1^{er} ordre, $g(x, y, y') = y' - y$, on x és la variable independent. Per exemple, $y(x)$ és solució.
- 2 L'equació logística:

$$x' = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (2)$$

és una EDO de 1^{er} ordre. Aquí $g(t, x, x') = x' - rx(1 - x/K)$, on t és la variable independent, $x = x(t)$ és la funció incògnita, $' = d/dt$ i r i K són constant positives.

$x = x(t)$ modelitza l'evolució d'una població on r és la taxa de creixement i K és una constant que depèn dels recursos (finit) del medi. Si $x(t)$ és solució amb $x(0) > 0$, llavors:

$$x(t) = \frac{Kx(0)e^{rt}}{K + x(0)(e^{rt} - 1)}. \quad (3)$$

A la figura 1 es representa $x = x(t)$ per $x(0) = 0.15$, $r = 0.75$, $K = 1.25$.
Veiem que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = K$.

Solució de l'equació logística

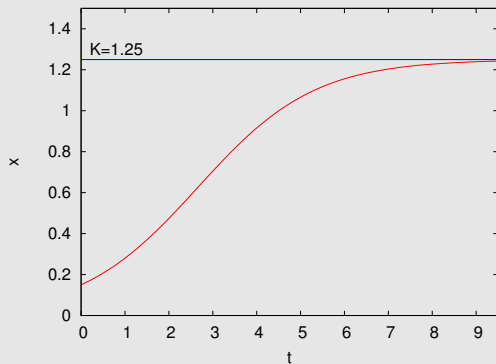
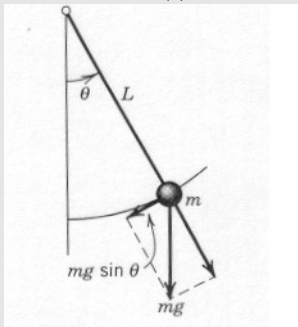


Figura 1: solució (3) de l'equació logística (2) per la condició inicial $x(0) = 0.15$, i les constants $r = 0.75$, $K = 1.25$.

3 $tx' - x = 0$ EDO de 1^{er} ordre. Aquí:

$$g(t, x, x') = tx' - x.$$

t és la variable independent i $x = x(t)$ és la funció incògnita (per exemple $x(t) = t$ és solució).



4 L'equació del **Pèndol matemàtic**:

$$\theta'' = -\frac{g}{L} \sin \theta.$$

És una EDO de 2^{on} ordre, on:

- $g(t, \theta, \theta', \theta'') = \theta'' + \frac{g}{L} \sin \theta$.
- t : és la variable independent.
- $\theta = \theta(t)$: funció incògnita.
- $' = d/dt$.

θ és l'angle que forma el fil del pèndol amb la vertical cap avall (veure figura), g és l'acceleració de la gravetat i L és la longitud del fill. Una solució és, per exemple: $\theta(t) = \pi$.

Interpretació geomètrica de les solucions d'una EDO

Considerem l'EDO:

$$x' = f(t, x) \quad (4)$$

on $' = \frac{d}{dt}$ i $(t, x) \mapsto f(t, x)$ és una funció donada. Sigui $x = x(t)$ una solució. Llavors $x(t)$ satisfà:

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

Aleshores és clar que $f(t, x)$ dona el pendent de la solució de l'EDO (4) que passa pel punt (t, x) .

En conseqüència $f(t, x)$ es pot interpretar com un **camp de pendents**; de manera que $x = x(t)$ és una solució de l'EDO (4) si i només si té, a cada punt $(t, x) = (t, x(t))$ per on passa, el pendent assignat per $f(t, x)$: $m = f(t, x(t))$.

Isoclines

Definició 2 (Isoclines)

Donada l'EDO (4), s'anomenen isoclines a les corbes obtingudes en imposar la condició $f(t, x) = c$, i. e.:

$$\mathcal{I}_c = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : f(t, x) = c\},$$

amb $c \in \mathbb{R}$ constant.

- Notem que les isoclines \mathcal{I}_c , $c \in \mathbb{R}$ són les corbes de nivell d'alçada c de la funció $f(t, x)$.
- Com que $f(t, x)$ assigna a cada punt $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ el pendent de la solució de l'EDO (4), $x = x(t)$, que passa per aquest punt; llavors és clar que totes les solucions que tallen una corba isoclina ho fan amb el mateix pendent.
- A la pàgina web del MIT: <http://math.mit.edu/daimp/Isoclines.html> Es poden trobar applets JAVA que permeten visualitzar **isoclines**, **camp de pendents** i **solucions** d'EDOs al pla.

Exemple 1

La figura 2, mostra les isoclines i el camp de direccions de l'EDO:

$$x' = x - t. \quad (5)$$

Com que, en aquest cas, $f(t, x) = x - t$, les isoclines vénen donades per la família de rectes:

$$x = t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mentre que es comprova que, donat un punt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$x(t) = (x_0 - t_0 - 1)e^{t-t_0} + t + 1$$

és la solució de (5) que passa per aquest punt. A la figura 2 es mostra també en camp de pendents (segments en blau) i, (en vermell) les corbes corresponents a quatre solucions.

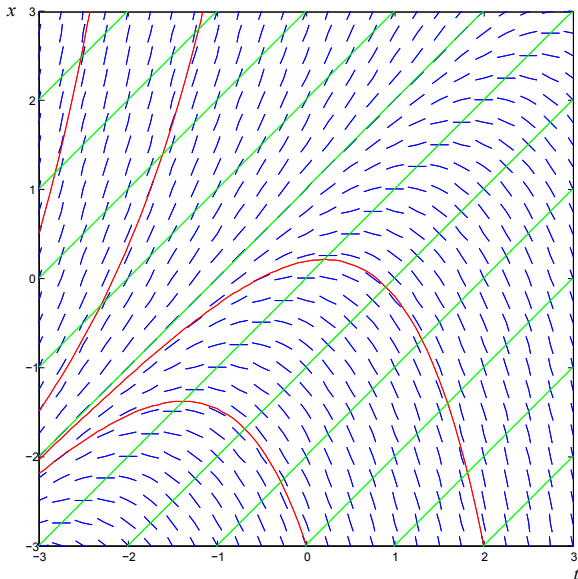


Figura 2: En verd es representen les isoclines de l'EDO $x' = x - t$; que en aquest cas vénen donades per rectes de la forma $x = t + c$, $c \in \mathbb{R}$ constant. Els petits segments (en blau) indiquen el camp de direccions; mentre que les corbes en vermell corresponen a quatre solucions diferents.

Observacions

- Tret d'alguns casos senzills (i ben coneguts) no és possible calcular analíticament la solució d'una EDO donada. A classe de problemes discutireu alguns exemples per EDOs de 1^{er} ordre. Tanmateix, els mètodes geomètrics que tot just hem vist (camp de direccions, isoclines,...) poden donar una idea qualitativa del comportament de les solucions.
- Aquí ens conformarem amb enunciar algun resultat teòric que ens garanteixi, d'una banda, que les equacions tenen solució i, per altra, ens doni alguna forma "d'etiquetar" aquestes solucions (mitjançant les anomenades "condicions inicials").
- Un dels problemes que presenta la definició 1 és que aquesta és "massa general" per ésser pràctica. Per exemple:
- Admet equacions sense cap solució, com és: $(x')^2 + 1 = 0$.
- Tanmateix inclou expressions que contenen més d'una equació en una única fórmula, com $(x' - 1)(x' - t) = 0$.
- Així, ens restringirem al cas en què de l'equació (1) es pot expressar en **forma normal**, és a dir, si podem expressar la derivada d'ordre màxim en termes de totes les altres variables (definició 3).

Definició 3

Una EDO d'ordre m de la forma:

$$x^{(m)} = f(t, x, x', \dots, x^{(m-1)}). \quad (6)$$

direm que està expressada en **forma normal**. En aquest cas, la derivada d'ordre màxim, $x^{(m)}$, ve donada en funció de totes les altres variables: $t, x, x', \dots, x^{(m-1)}$.

Observem que si $\frac{\partial g}{\partial x^{(m)}} \neq 0$ en (1), llavors, aplicant el **Teorema de la Funció Implícita**, sempre podrem aïllar $x^{(m)}$. Almenys localment!

Per exemple, l'equació: $tx' - x = 0$ (exemple 3), admet la forma normal:

$$x' = \frac{x}{t}$$

sii $t \neq 0$.

- Un altre punt important és adonar-se de què les solucions de les EDOs **no** són funcions aïllades, sinó que de manera natural formen famílies depenents de paràmetres.
- Si una d'aquestes famílies conté totes les solucions l'anomenarem **solució general de l'EDO**.
- Idea: Les solucions d'una EDO (1) d'ordre m depenen de m paràmetres.

- 5 Calcul de primitives. L'EDO: $y' = f(x)$ té com a solució general

$$y(x; C) = C + \int_a^x f(s) ds,$$

on a és un punt arbitrari de l'interval de definició de la funció f i $C \in \mathbb{R}$ és un paràmetre lliure (i. e., és la constant de la família de solucions).

- 6 L'equació:

$$x'' + x = 1,$$

té com solució general

$$x(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1,$$

amb $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ arbitraris.

Alternativament, podem també considerar **Sistemes d'Equacions Diferencials Ordinàries** (sistemes d'EDOS), on el nombre de funcions incògnites és > 1 . En aquest curs només considerarem sistemes de 1^{er} ordre en **Forma Normal** (o **Forma Estàndard**), la qual cosa vol dir:

- 1 Que tenim el mateix nombre d'equacions que de funcions incògnites.
- 2 Que a cada equació una de les derivades apareix aïllada en funció d'una expressió que no conté derivades.

Tot seguit formalitzem una definició:

Definició 4 (Sistemes d'Equacions Diferencials)

Un sistema de n Equacions Diferencials de 1^{er} Ordre en **Forma Normal** (o **Forma Estàndard**), són expressions del tipus:

$$X' = F(t, X) \iff \begin{cases} x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots & \vdots \\ x'_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (7)$$

On,

- t és el temps o variable independent.
- $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ és el vector amb les funcions incògnites (o variable dependent).
- $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una funció donada que depèn d'un argument escalar, t , i un argument vectorial, X .

7 Les equacions de Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned}x' &= ax - bxy, \\y' &= -cy + dxy,\end{aligned}\tag{8}$$

és un sistema d'EDOS de 1^{er} ordre i dimensió 2, on t és la variable independent, a, b, c i d són constant positives, mentre que les funcions incògnites $x = x(t)$, $y = y(t)$ representen:

- $x = x(t)$, la densitat de preses en l'instant t .
- $y = y(t)$, la densitat de predadors en l'instant t .

Aquí, en termes de la definició 4, identifiquem:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F(t, X) = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}.$$

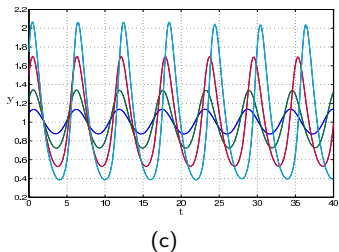
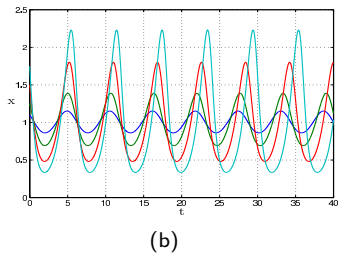
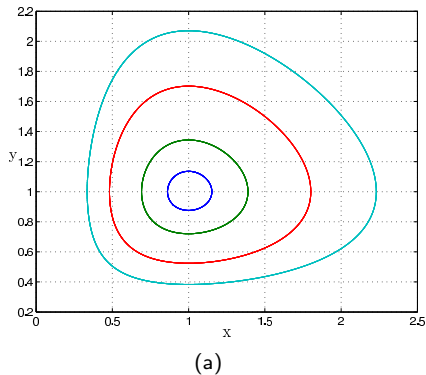


Figura 3: (a) Òrbites de les equacions de Lotka-Volterra (8). A les gràfiques (b) i (c) es representen en funció del temps i per a les mateixes òrbites, l'evolució de la població de preses, $x = x(t)$, i de depredadors, $y = y(t)$.

Relació entre EDOs d'ordre m i sistemes d'EDO de 1^{er} ordre

- És interessant observar que qualsevol EDO en forma normal d'ordre m com (6) es pot transformar en un sistema amb m equacions de 1^{er} ordre equivalent (en el sentit de què a partir de les solucions d'un podem trobar les de l'altre).
- Concretament, en introduir les noves funcions incògnites:

$$x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_m = x^{(m-1)},$$

veiem que l'EDO:

$$x^{(m)} = f(t, x, x', \dots, x^{(m-1)}),$$

es transforma en el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x'_{m-1} = x_m \\ x'_m = f(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \end{array} \right\} \iff X' = F(t, X), \quad (9)$$

amb,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix}, \quad F(t, X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ f(t, x_1, x_2, \dots, x_m) \end{pmatrix}.$$

- 8 Equació del paracaigudista: un cos de massa m en caiguda lliure està sotmès a la força de la gravetat (el seu pes) i a l'acció de la resistència de l'aire, que es suposa proporcional al quadrat de la velocitat. L'equació del moviment queda doncs:

$$mx'' = -mg + k(x')^2 \quad (10)$$

(2^a Llei de Newton). Si definim: $y = x'$ (velocitat), llavors de l'EDO de 2^{on} ordre (10) s'obté el sistema $X' = F(t, X)$, amb:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad F(t, X) = \begin{pmatrix} y \\ -g + \frac{k}{m}y^2 \end{pmatrix}.$$

Existència i Unicitat de Solucions

Tot seguit passem a discutir l'existència de solucions de les EDOs generals i la seva unicitat en termes d'un **Problema a Valors Inicials (o de Cauchy)**:

Definició 5 (Problema de Valors Inicials per una EDO d'ordre m)

Donada una EDO d'ordre m com (1), recordem:

$$g(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = 0 \quad (*)$$

i donats un **temps (o instant) inicial** $t_0 \in \mathbb{R}$ i unes **condicions inicials**, $(x_0, x'_0, \dots, x_0^{(m-1)}) \in \mathbb{R}^m$; resoldre el corresponent **Problema de Valors Inicials** consisteix en buscar una solució de l'EDO (*) $x = x(t)$ que verifiqui:

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, \dots, x^{(m-1)}(t_0) = x_0^{(m-1)}.$$

És a dir, busquem una solució, $x = x(t)$, de (*) t. q., en un instant donat, t_0 , la solució i les seves $m - 1$ primeres derivades en aquell instant: $x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(m-1)}(t_0)$, prenguin uns valors fixats a priori.

- 9 Considerem el PVI donat per l'EDO $x'' + x = 1$ i les condicions inicials:

$$x(\pi/2) = 0, \quad x'(\pi/2) = 2.$$

Si imposem aquestes condicions inicials a la solució general, que resulta,

$$x(t; c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 1$$

(veure exemple 6), obtenim:

$$\begin{aligned} x(\pi/2) &= c_1 \cos \frac{\pi}{2} + c_2 \sin \frac{\pi}{2} + 1 = c_2 + 1 = 0, \\ x'(\pi/2) &= -c_1 \sin \frac{\pi}{2} + c_2 \cos \frac{\pi}{2} = -c_1 = 2, \end{aligned}$$

d'on les constants c_1 i c_2 queden determinades (de manera única!) per: $c_1 = -2$ i $c_2 = -1$. El PVI considerat té doncs una (única) solució, que ve donada per:

$$x(t) = 1 - 2 \cos t - \sin t.$$

Definició 6 (Problema de Valors Inicials per sistemes)

Considerem un sistema de n EDOs de primer ordre en forma normal com a (7), recordem:

$$X' = F(t, X). \quad (**)$$

Donats un **temps (o instant) inicial** $t_0 \in \mathbb{R}$ i un vector de **condicions inicials**, $X_0 \in \mathbb{R}^n$, resoldre el **Problema de Valors Inicials** corresponent, consisteix en buscar una solució del sistema (**), $X = X(t)$, tal que: $X(t_0) = X_0$.

- 10 El sistema lineal de 1^{er} ordre: $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x, \end{cases}$ té com solució general:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y(t) &= c_1 \sin t - c_2 \cos t. \end{aligned} \quad (11)$$

(**Observació:** remarquem que les solucions d'un sistema de n equacions de 1^{er} ordre depenen de n constants arbitràries). Si busquem la solució t. q.:

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad (12)$$

Exemple 10 (continuació)

llavors cal imposar les condicions inicials (12) a la solució general (11).
Obtenim així:

$$x(0) = c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 1,$$

$$y(0) = -c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0.$$

Veiem que el PVI té una única solució, donada per: $X(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

A continuació enunciarem els resultats que garanteixen l'existència i unicitat de solucions per a un PVI donat. Ho farem en cadascun dels dos contextes considerats (i. e., EDOs i sistemes d'EDO).

Teorema 7 (Teorema d'existència i unicitat de solucions per una EDO d'ordre m en forma normal)

Si la funció:

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, x', \dots, x^{(m-1)}) &\longrightarrow f(t, x, x', \dots, x^{(m-1)}) \end{aligned}$$

és de classe C^1 , $f \in C^1(D)$ (això és, si f és contínua en D i totes les seves derivades parcials primeres també ho són en el mateix domini), llavors per tot $(t_0, x_0, x'_0, \dots, x_0^{(m-1)}) \in D$ existeix una única solució del PVI:

$$\begin{aligned} x^{(m)} &= f(t, x, x', \dots, x^{(m-1)}), \\ x(t_0) &= x_0, x'(t_0) = x'_0, \dots, x^{(m-1)}(t_0) = x_0^{(m-1)} \end{aligned}$$

definida per tot $t \in I$, interval de \mathbb{R} que conté t_0 , el qual depèn de les condicions inicials, és a dir, de $t_0, x_0, x'_0, \dots, x_0^{(m-1)}$ (veure remarca 1).

Remarca 1 (Sobre les condicions inicials)

Sovint (com és el cas a l'enunciat del teorema 7), quan parlem de **condicions inicials** incloem tant $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(m-1)}$ com el mateix instant (o temps) inicial, t_0 .

Observacions

- El teorema 7, **per se**, no ens permet dir res sobre les solucions d'una EDO general, excepte afirmar que existeixen i són úniques per un PVI donat. Tanmateix, no podem dir res sobre l'interval d'existència I , que en alguns casos pot ser finit i en d'altres infinit. Per exemple:

- l'EDO $x' = 1 + x^2$ té com a solució general: $x(t; C) = \tan(t + C)$, $C \in \mathbb{R}$ arbitrari. Llavors el PVI:

$$\left. \begin{array}{l} x' = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{array} \right\}$$

té una única solució, la que correspon a $C = 0$, és a dir: $x(t) = \tan t$, definida només per $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

- El fet de demanar que $f \in \mathcal{C}^1(D)$ és perquè si f només és contínua, llavors pot passar que un PVI tingui més d'una solució.

12 Per exemple, $x(t) = t^3$ i $x(t) = 0$ són dues solucions del PVI:

$$\begin{aligned}x' &= 3x^{2/3}, \\x(0) &= 0.\end{aligned}$$

Què passa en aquest exemple? Doncs que $f(t, x) = 3x^{2/3}$ és una funció contínua per tot $x \in \mathbb{R}$ però no és C^1 , ja que $\partial_x f(t, x) = 2x^{-1/3}$ no està definida per $x = 0$.

Finalment, formularem un Teorema d'Existència i Unicitat anàleg al teorema 7 per sistemes de n EDOs de primer ordre escrits en forma normal.

Teorema 8 (Teorema d'existència i unicitat de solucions de sistemes d'EDOs de 1^{er} ordre)

Sigui:

$$\begin{aligned} F : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, X) &\longrightarrow F(t, X) \end{aligned}$$

una funció de classe $C^1(\Omega)$. Llavors, per tot $(t_0, X_0) \in \Omega$, existeix una única solució $X = X(t)$ del PVI:

$$\begin{aligned} X' &= F(t, X), \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned}$$

definida per tot $t \in I$ (amb $t_0 \in I$), interval de \mathbb{R} que depèn de les condicions inicials, i. e., de t_0 i de X_0 (veure remarca 1).

Comentaris sobre el càlcul de les solucions

No sempre sempre és possible expressar les solucions d'una EDO de forma **explícita**, i. e., com $x = x(t, C)$ ó $y = y(x, C)$ sinó que hurem d'admetre altres formes d'escriure les solucions, com ara:

- **Solucions explícites:** de la forma $x = x(t)$ (ó $y = y(x)$ quan x és la variable independent i y la variable dependent). Per exemple:

$$y(x) = \frac{1}{x} \quad \text{és solució de:} \quad y' + y^2 = 0,$$

per $x \in I = (0, +\infty)$, i també per $x \in J = (-\infty, 0)$.

- **Solucions implícites:** aquí la solució $x(t)$ (ó $y(x)$) es defineix implícitament per una equació de la forma $G(t, x) = 0$ (ó $G(x, y) = 0$). Notem que aleshores, per verificar si $x(t)$ és solució de l'EDO, només cal derivar implícitament la relació:

$$G(t, x(t)) = 0,$$

i comparar la relació entre t , $x(t)$ i $x'(t)$ que s'obté amb l'EDO.

Per exemple, per comprovar que $t^2 + x^2 - 1 = 0$ és una solució (implícita) de $xx' + t = 0$, derivem implícitament:

$$\frac{d}{dt} (t^2 + x^2(t) - 1) = \frac{d}{dt} 0 \Leftrightarrow 2t + 2x(t)x'(t) = 0 \Leftrightarrow t + xx' = 0.$$

Per comprovar si una relació $G(t, x) = 0$ defineix una solució implícita d'una EDO d'ordre superior a 1 cal derivar implícitament més vegades la relació $G(t, x(t)) = 0$.

- **Resolució per quadratures:** quan a l'expressió (implícita o explícita) de la solució (o de la família de solucions) de l'EDO, apareixen primitives de funcions que no podem expressar com combinacions de funcions elementals. Per exemple:

$$x(t) = e^t \int_0^t e^{u^2} du + Ce^t,$$

és una solució per quadratures de $x' - x = e^{t+t^2}$, on $C \in \mathbb{R}$ és el paràmetre de la família. En efecte, per qualsevol $C \in \mathbb{R}$ fixada es té, derivant:

$$x'(t) - x(t) = e^t e^{t^2} + e^t \int_0^t e^{u^2} du + Ce^t - e^t \int_0^t e^{u^2} du - Ce^t = e^{t+t^2},$$

per tot $t \in \mathbb{R}$; i on hem fet servir el Teorema Fonamental del Càlcul per derivar la funció integral $F(t) = \int_0^t e^{u^2} du$.