

# PROBLEMES D'AVALUACIÓ CONTINUADA DE CÀLCUL I

## §. Problema 1

Es considera una funció  $f(x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , on  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  són les variables i  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$  són els paràmetres de configuració.

Es pretén determinar les variacions de  $\alpha$  que minimitzen la funció i les variacions que s'indueixen en el punt  $x^*(\alpha)$  on s'assoleix el mínim.

En un context d'optimització de producció,  $f$  representa una funció de cost. En aquest cas el problema tracta d'obtenir per a cada valor dels paràmetres de configuració el valor de les variables de funcionament (que depenen del procés de producció)  $x^*(\alpha)$ , que donen un òptim funcionament minimitzant el cost.

En un context dinàmic,  $f$  pot representar una funció d'energia potencial dependent de les posicions  $x$  i uns paràmetres  $\alpha$  de configuració del sistema. Les posicions d'equilibri estables d'aquest sistema vénen donades per els valors  $x^*(\alpha)$  que minimitzen el potencial. (Exemple: si tenim un mocador subjectat pels seus extrems i posem una bola a sobre, la bola tendirà a la posició d'equilibri, que és el mínim del potencial. Aquest mínim pot variar si modifiquem lleugerament la posició dels extrems del mocador).

**P.1** Estudiar si per a cada  $\alpha \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$  hi ha un únic punt òptim  $x^*(\alpha)$ , és a dir, un únic mínim absolut de  $f$  en  $\mathcal{A}$ . Raonem que, aleshores:

1. El valor mínim de  $f$  per a la configuració  $\alpha$  és  $z^*(\alpha) = f(x^*(\alpha); \alpha)$ .
2. La direcció de variació de  $\alpha$  òptima per a minimitzar  $f$  és:  $v = -\text{grad } z^*(\alpha) \in \mathbb{R}^m$ .
3. La variació induïda en cada  $x_i^*(\alpha)$  en aquesta direcció és:

$$D_v x_i^*(\alpha) = \langle -\text{grad } z^*(\alpha), \text{grad } x_i^*(\alpha) \rangle .$$

4. La variació direccional induïda en  $x^*(\alpha)$  és:

$$Dx^*(\alpha)(-\text{grad } z^*(\alpha))^t$$

**P.2** Es tracta, doncs, de trobar expressions el més sencilles possibles de

$$\text{grad } z^*(\alpha), \quad \text{grad } x_i^*(\alpha), \quad Dx^*(\alpha)(-\text{grad } z^*(\alpha))^t$$

**I** Estudiem **P.1** començant per un exemple que permet trobar les solucions explícites:

1. Verifiqueu que per a la funció

$$f(x, y, \alpha, \beta) = \alpha(y^2 - x) + \beta(x^2 - y)^2$$

és cert **P.1** per a tot  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , i per a tot  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

2. En general, sigui  $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{A} \times \Omega)$  i  $x_0 = x^*(\alpha_0)$  un punt òptim de funcionament. Proveu que si  $H_x f(x_0, \alpha_0)$  és definit positiu, aleshores **P.1** és cert en un entorn de  $(x_0, \alpha_0)$ , i que la funció  $x^*(\alpha)$  ve definida implícitament per:

$$D_1 f(x, \alpha) = \dots = D_n f(x, \alpha) = 0.$$

(Nota: es pot demostrar que globalitza si  $H_x f(x, \alpha)$  és definit positiu per a tot  $x \in \mathcal{A}$ ,  $\alpha \in \Omega$ ).

3. Apliqueu el resultat anterior a la funció

$$f(x, y, \alpha, \beta) = \alpha e^x + \beta(x^2 + y^2)^2 - 3x - 3y$$

en el punt  $(\alpha_0, \beta_0) = (3, 2)$  i  $(x_0, y_0) = (0, 1)$ .

## **II** Estudi de **P.2**

1. En el cas 3 calculeu les derivades de  $x^*(\alpha, \beta)$ ,  $y^*(\alpha, \beta)$ , en  $(3, 2)$  com a funcions implícites. Calculeu, igualment, les derivades de  $z^*(\alpha, \beta)$ , en  $(3, 2)$ . Dedueu **P.2** en el punt  $(\alpha_0, \beta_0) = (3, 2)$ .
2. En el cas general 2, demostreu que

$$\text{grad } z^*(\alpha) = D_\alpha f(x^*(\alpha); \alpha), \quad (1.1)$$

$$Dx^*(\alpha) = -((H_x f)^{-1} D_\alpha(D_x f))(x^*(\alpha); \alpha), \quad (1.2)$$

3. Apliqueu les fórmules (1.1), (1.2) per a recalculer II.1.

## Solució al problema 1

I.1 Considerem la funció

$$f(x, y, \alpha, \beta) = \alpha(y^2 - x) + \beta(x^2 - y)^2,$$

amb  $\alpha, \beta > 0$  i  $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Estudiarem els seus extrems. Així trobem primer els zeros de les seves derivades. Plantegem doncs el sistema d'equacions  $D_x f(x, y, \alpha, \beta) = 0, D_y f(x, y, \alpha, \beta) = 0$ . Un cop calculades les derivades queda, explícitament:

$$\begin{aligned} D_x f(x, y, \alpha, \beta) &= -\alpha + 4\beta x^3 - 4\beta xy = 0, \\ D_y f(x, y, \alpha, \beta) &= 2(\alpha + \beta)y - 2\beta x^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

De la segona d'aquestes equacions, aïllant  $y$  en funció de  $x$  es té  $y = \frac{\beta}{\alpha + \beta}x^2$ . Substituint a la primera, podem aïllar  $x$  i després  $y$  com a funció dels paràmetres  $\alpha$  i  $\beta$ . Denotarem aquestes funcions per  $x^*$  i  $y^*$ ; les quals vénen donades per

$$x^* = \sqrt[3]{\frac{\alpha + \beta}{4\beta}}, \quad y^* = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\beta}{2(\alpha + \beta)}} \quad (1.4)$$

A continuació estudiem la matriu Hessiana de  $f$ ,  $H_f(x, y)$ , que es pot comprovar que és,

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12\beta x^2 - 4\beta y & -4\beta x \\ -4\beta x & 2(\alpha + \beta) \end{pmatrix}.$$

Definim  $\mathfrak{T} := \text{traça } H_f, \mathfrak{d} := \det H_f$ . Siguin a més:

$$\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}(x^*(\alpha, \beta), y^*(\alpha, \beta)), \quad \text{i} \quad \mathfrak{d}^* = \mathfrak{d}(x^*(\alpha, \beta), y^*(\alpha, \beta)).$$

Fent càlculs resulta,

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}^* &= (3\alpha + 2\beta) \sqrt[3]{\frac{4\beta}{\alpha + \beta}} + 2(\alpha + \beta) \\ \mathfrak{d}^* &= 6\alpha \sqrt[3]{4\beta(\alpha + \beta)^2}. \end{aligned}$$

Com que  $\alpha, \beta > 0$ , és  $\mathfrak{T}^* > 0$  i  $\mathfrak{d}^* > 0$ . Llavors la matriu hessiana  $H_f$  és definida positiva i  $f$  té un punt de mínim relatiu a  $(x^*(\alpha, \beta), y^*(\alpha, \beta))$ .

Calculem a continuació quant val aquest mínim. D'acord amb l'enunciat, definim  $z^*(\alpha, \beta) := f(x^*(\alpha, \beta), y^*(\alpha, \beta), \alpha, \beta)$ . Es comprova que

$$\begin{aligned} z^*(\alpha, \beta) &= \alpha \left( \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{\beta^2}{4(\alpha + \beta)^2}} - \sqrt[3]{\frac{\alpha + \beta}{4\beta}} \right) + \\ &\quad + \beta \left( \sqrt[3]{\frac{(\alpha + \beta)^2}{16\beta^2}} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\beta}{2(\alpha + \beta)}} \right)^2 = -\frac{3}{4} \alpha \sqrt[3]{\frac{\alpha + \beta}{4\beta}}. \end{aligned}$$

**I.2** Sigui  $x_0$  un mínim de la funció  $f(\cdot; \alpha_0)$ . Això vol dir que:

$$D_1 f(x_0; \alpha_0) = \cdots = D_n f(x_0; \alpha_0) = 0$$

i a més, que la matriu hessiana de  $f$  a  $(x_0, \alpha_0)$ ,  $H_f(x_0, \alpha_0)$ , és definida positiva. Sigui  $M : \mathcal{A} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donada per:  $(x; \alpha) \mapsto (\text{grad } f(x; \alpha))^t$ . És a dir:

$$M(x; \alpha) := (D_1 f(x; \alpha), \dots, D_n f(x; \alpha)).$$

Aleshores plantegem el sistema:

$$M(x, \alpha) = 0, \tag{1.5}$$

que té solució per a  $(x; \alpha) = (x_0; \alpha_0)$ . Com que  $M$  és de classe  $\mathcal{C}^2$  i a més es satisfà:

$$\det(d_x M_{(x_0; \alpha_0)}) = \det H_f(x_0; \alpha_0) > 0$$

( $H_f(x_0; \alpha_0)$  definida positiva); pel teorema de la funció implícita sabem que, localment en un entorn de  $(x_0; \alpha_0)$ ,  $x = x(\alpha)$ ,  $x(\alpha)$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , i amb  $x_0 = x(\alpha_0)$ . A més,  $x(\alpha)$  és el punt tal que:

$$D_1 f(x(\alpha); \alpha) = \cdots = D_n f(x(\alpha); \alpha) = 0.$$

Com que  $x(\alpha)$  és de classe  $\mathcal{C}^2$  en  $\alpha$ , en particular és contínua i  $H_f(x(\alpha), \alpha)$  també serà contínua en  $\alpha$ . Per tant, donat que per  $\alpha = \alpha_0$ ,  $H_f(x(\alpha_0); \alpha_0) = H_f(x_0; \alpha_0)$  és definida positiva, per continuïtat,  $H_f(x(\alpha), \alpha)$  també serà definida positiva per  $\alpha$  suficientment propera a  $\alpha_0$ .

Finalment, la continuïtat de  $f$  i de  $x(\alpha)$  garanteix que el mínim en  $(x(\alpha); \alpha)$  és també un mínim absolut.

**I.3** Sigui ara  $f$  la funció:

$$f(x, y, \alpha, \beta) = \alpha e^x + \beta(x^2 + y^2)^2 - 3x - 8y.$$

Les seves derivades parcials són:

$$\begin{aligned} D_x f(x, y; \alpha, \beta) &= \alpha e^x + 4\beta x(x^2 + y^2) - 3 \\ D_y f(x, y; \alpha, \beta) &= 4\beta y(x^2 + y^2) - 8. \end{aligned}$$

Veiem que  $(x_0, y_0; \alpha_0, \beta_0) = (0, 1; 3, 2)$ , es un *punt crític* de  $f$ , i. e., les dues derivades parcials de  $f$  s'anul·len simultàniament en aquest punt:

$$D_x f(0, 1; 3, 2) = 3 - 3 = 0, \quad D_y f(0, 1; 2, 3) = 8 - 8 = 0.$$

D'altra banda, la matriu Hessiana de  $f$  és, al mateix punt:

$$\begin{aligned} H_f(0, 1; 3, 2) &= \begin{pmatrix} \alpha e^x + 12\beta x^2 + 4\beta y^2 & 8\beta xy \\ 8\beta xy & 4\beta x^2 + 12\beta y^2 \end{pmatrix}_{(0,1;3,2)} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

i ja es veu que és definida positiva. (**Nota 1:** de fet, si calculem la traça i el determinant de  $H_f$  en un punt qualsevol,

$$\begin{aligned} \text{traça } H_f(x, y; \alpha, \beta) &= \alpha e^x + 16\beta x^2 + 16\beta y^2, \\ \det H_f(x, y; \alpha, \beta) &= 4\alpha\beta e^x (x^2 + 3y^2) + 48\beta^2 (x^2 + y^2)^2, \end{aligned}$$

per tant,  $H_f$  és definida positiva  $\forall \alpha, \beta > 0$  i  $(x, y) \neq 0$ ).

**II.1** Havíem trobat les derivades parcials de la funció al cas **I.3**. Les equacions que definien  $x^*, y^*$  eren:

$$\alpha e^x + 4\beta x^3 + 4\beta xy^2 - 3 = 0, \quad (1.6)$$

$$4\beta x^2 y + 4\beta y^3 - 8 = 0, \quad (1.7)$$

derivem respecte de  $\alpha$  i tenim el sistema,

$$D_\alpha : \begin{cases} e^x + \alpha e^x D_\alpha x + 12\beta x^2 D_\alpha x + 4\beta y^2 D_\alpha x + 8\beta xy D_\alpha y = 0, \\ 4\beta x^2 D_\alpha y + 8\beta xy D_\alpha x + 12\beta y^2 D_\alpha y = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Si ara avaluem aquest sistema, (1.8), a  $x = 0, y = 1, \alpha = 3, \beta = 2$ , s'arriba a un sistema lineal del qual s'obtenen  $D_\alpha x(3, 2)$  i  $D_\alpha y(3, 2)$ . En efecte:

$$\left. \begin{aligned} 1 + 3D_\alpha x(3, 2) + 8D_\alpha y(3, 2) &= 0, \\ 24D_\alpha y(3, 2) &= 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_\alpha x(3, 2) = -\frac{1}{11}, \quad D_\alpha y(3, 2) = 0.$$

A continuació, derivarem les equacions (1.6) i (1.7) respecte de  $\beta$ ,

$$D_\beta : \begin{cases} \alpha e^x D_\beta x + 4x^3 + 12\beta x^2 D_\beta x + 4xy^2 + 4\beta y^2 D_\beta x + 8\beta xy D_\beta y = 0, \\ 4x^2 y + 8\beta xy D_\beta x + 4\beta x^2 D_\beta y + 4y^3 + 12\beta y^2 D_\beta y = 0. \end{cases}$$

Al punt  $x = 0, y = 1, \alpha = 3, \beta = 2$  queda el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 11D_\beta x(3, 2) &= 0, \\ 4 + 24D_\beta y(3, 2) &= 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_\beta x(3, 2) = 0, \quad D_\beta y(3, 2) = -\frac{1}{6}.$$

Càlcul de les derivades de  $z^*$ . Si  $z^*(\alpha, \beta)$  és el valor de la funció  $f$  al punt  $(x^*(\alpha, \beta), y^*(\alpha, \beta))$ , és a dir,  $z^*(\alpha, \beta) = f(x^*(\alpha, \beta), y^*(\alpha, \beta), \alpha, \beta)$ ; llavors:

$$\begin{aligned} z^*(\alpha, \beta) &= \alpha e^{x^*(\alpha, \beta)} + \beta (x^*(\alpha, \beta)^2 + y^*(\alpha, \beta)^2)^2 - \\ &\quad - 3x^*(\alpha, \beta) - 8y^*(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Derivem respecte de  $\alpha$  i  $\beta$  i tenim:

$$\begin{aligned} D_\alpha z^* &= e^{x^*} + \alpha e^{x^*} D_\alpha x^* + 2\beta(x^{*2} + y^{*2})(2x^* D_\alpha x^* + 2y^* D_\alpha y^*) - \\ &\quad - 3D_\alpha x^* - 8D_\alpha y^*, \\ D_\beta z^* &= \alpha e^{x^*} D_\beta x^* + (x^{*2} + y^{*2})^2 + 2\beta(x^{*2} + y^{*2})(2x^* D_\beta x^* + 2y^* D_\beta y^*) - \\ &\quad - 3D_\beta x^* - 8D_\beta y^*. \end{aligned}$$

A continuació, avaluem les expressions d'adalt al punt  $(\alpha, \beta) = (3, 2)$  per obtenir:

$$Dz^*(3, 2) = (D_\alpha z^*(3, 2), D_\beta z^*(3, 2)) = (1, 1) \quad (1.10)$$

Finalment, podem calcular les variacions induïdes en la direcció  $-\text{grad } z^*$  de  $x^*, y^*$  a  $(\alpha, \beta) = (3, 2)$ :

$$\begin{aligned} \langle -\text{grad } z^*(3, 2), \text{grad } x^*(3, 2) \rangle &= \left\langle -(1, 1), \left(-\frac{1}{11}, 0\right) \right\rangle = \frac{1}{11}, \\ \langle -\text{grad } z^*(3, 2), \text{grad } y^*(3, 2) \rangle &= \left\langle -(1, 1), \left(0, -\frac{1}{6}\right) \right\rangle = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

d'on es dedueix que la variació direccional induïda en  $(x^*(3, 2), y^*(3, 2))$  és

$$D(x^*, y^*)_{(3,2)} (-\text{grad } z^*(3, 2))^t = \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{6}\right).$$

**II.2** Recordem que hem definit:  $z^*(\alpha) = f(x^*(\alpha), \alpha)$ . Notem que  $x^*(\alpha)$  és solució del sistema:  $D_x f(x^*(\alpha); \alpha) = 0$ . Derivant aquesta última equació respecte d' $\alpha$ , s'obté:

$$H_f(x^*(\alpha); \alpha) \cdot Dx^*(\alpha) + D_\alpha D_x f(x^*(\alpha); \alpha) = 0,$$

d'on:

$$Dx^*(\alpha) = -(H_f(x^*(\alpha); \alpha))^{-1} D_\alpha D_x f(x^*(\alpha); \alpha). \quad (1.11)$$

Derivem ara  $z^*(\alpha)$

$$Dz^*(\alpha) = Df(x^*(\alpha); \alpha) \cdot Dx^*(\alpha) + d_\alpha f(x^*(\alpha); \alpha) = d_\alpha f(x^*(\alpha); \alpha), \quad (1.12)$$

(ja que  $Df(x^*(\alpha); \alpha) = 0$ ). La variació induïda de cadascuna de les  $x_i^*(\alpha)$  vindrà donada per:

$$\langle -\text{grad } z^*(\alpha), \text{grad } x_i^*(\alpha) \rangle;$$

i la variació direccional induïda de  $x^*(\alpha)$  serà la proposada:

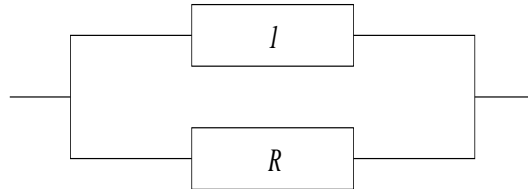
$$Dx^*(\alpha) (-\text{grad } z^*(\alpha))^t = -((H_f)^{-1} D_\alpha (D_x f))_{(x^*(\alpha); \alpha)} D_\alpha f(x^*(\alpha); \alpha)^t \quad (1.13)$$

Finalment, fem ús d'aquesta fórmula, (1.13), per calcular la variació direccional induïda en  $(x^*(3, 2), y^*(3, 2))$ :

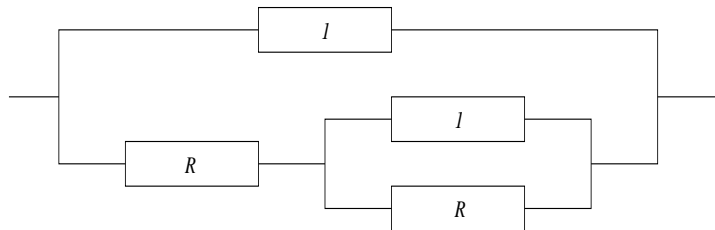
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^x & 4(x^3 + xy^2) \\ 0 & 4x^2y + 4y^3 \end{pmatrix}_{(0,1)} \begin{pmatrix} e^x \\ (x^2 + y^2)^2 \end{pmatrix}_{(0,1)} \\ = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## §. Problema 2

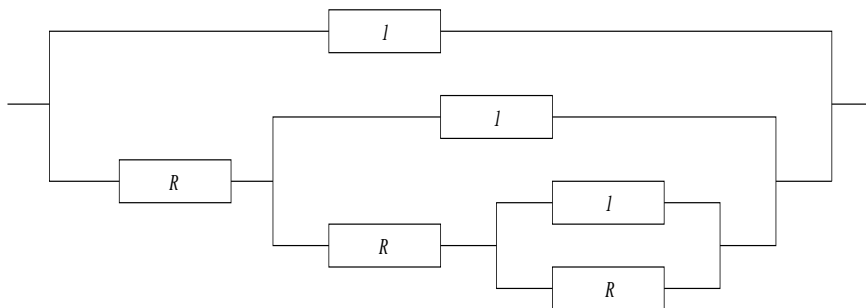
Sigui  $R$  una resistència elèctrica. Sigui  $x_0$  la resistència equivalent del circuit



Igualment, sigui  $x_1$  la resistència equivalent del circuit



$x_2$  la del circuit



etc, definint així  $x_n$  com una successió de nombres reals positius que denoten les resistències equivalents.

1. Partint de que  $x_0 = \frac{R}{1+R}$ , construïu la fórmula recurrent de  $x_n$ .
2. Demostreu que la successió és creixent i acotada superiorment.
3. Demostreu que el límit de la successió està entre 0 i 1, i trobeu-lo. Raoneu a què tendeix la resistència equivalent si  $R \rightarrow \infty$ .

## Solució al problema 2

De les figures de l'enunciat, que indiquen com es va construir la successió de circuits, se'n dedueix que cadascun d'ells s'obté de l'anterior afegint-li una resistència  $R$  en sèrie, per després, al conjunt resultant, connectar-li en paral·lel una altra d' $1\Omega$ . Sigui doncs  $x_n$  la resistència equivalent del circuit  $n$ -èsim.

1) Segons aquesta descripció, la resistència equivalent del circuit següent,  $x_{n+1}$ , vindrà donada per la fórmula:

$$x_{n+1} = \frac{R + x_n}{1 + R + x_n} \quad (2.1)$$

Si ara, de manera natural, definim la funció  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  per

$$f(x) = \frac{R + x}{1 + R + x},$$

la successió de resistències equivalents  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ve donada per la recurrència

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{amb } x_0 = \frac{R}{1 + R}. \quad (2.2)$$

2) La funció  $f$  és creixent. En efecte  $\forall x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{(1 + R + x)^2} > 0.$$

Així doncs, suposant  $x_{n+1} > x_n$ , per a un cert  $n \in \mathbb{N}$ , es té:

$$x_{n+1} > x_n \Rightarrow x_{n+2} = f(x_{n+1}) > x_{n+1} = f(x_n),$$

car  $f$  és monòtona creixent. Això es satisfà també per a  $n = 0$ . En efecte:

$$x_1 = \frac{R + x_0}{1 + R + x_0} + x_0 - x_0 = x_0 + \frac{R}{(1 + R)(1 + 3R + R^2)} > x_0,$$

(on s'ha tingut en compte que  $x_0 = R/(1 + R)$ ). Per tant, el principi d'inducció ens permet assegurar que la successió  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  és monòtona creixent.

Per veure que és acotada superiorment només cal considerar que  $\forall n \in \mathbb{N}$  és

$$x_n = \frac{R + x_{n-1} + 1 - 1}{1 + R + x_{n-1}} = 1 - \frac{1}{1 + R + x_{n-1}} < 1, \quad (2.3)$$

donat que  $1 + R + x_{n-1} > 1$ . (**Nota 2:** es pot provar, per exemple per inducció, que tots els termes de la successió són positius).

3) La successió és convergent puix és monòtona creixent i acotada superiorment. De (2.3) i del fet de que tots els termes siguin positius (veure nota 2), es dedueix que  $0 < x_n < 1$ , per tot  $n$ ; d'on resulta que el límit,  $\ell_R$ , estarà

entre 0 i 1, i. e.:  $0 < \ell_R \leq 1$ . Fent servir les propietats algebraiques dels límits i aplicant-les a la relació de recurrència (2.2) que defineix la successió es té

$$\lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) \Rightarrow \ell_R = \frac{R + \ell_R}{1 + R + \ell_R}.$$

(Essent, com ja hem dit,  $\ell_R = \lim_n x_n$ ). Per tant  $\ell_R$  serà solució de l'equació de segon grau

$$\ell_R^2 + R\ell_R - R = 0,$$

que té dues solucions, una d'elles negativa; mentre que l'altra val

$$\ell_R = \frac{2R}{R + \sqrt{R^2 + 4R}}, \quad (2.4)$$

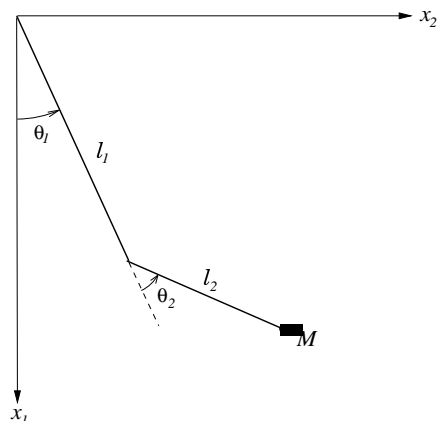
que clarament és més petita que 1. Així que serà aquest el valor del límit.

Finalment, quan la resistència  $R$  tendeix cap a infinit,  $R \rightarrow \infty$ , de (2.4) passant al límit s'obté:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \ell_R = 1.$$

## §. Problema 3

Un braç articulat està format per sengles motors de torsió a les dues articulacions, de forma que la seva posició queda determinada pels angles  $\theta_1, \theta_2$  (vegeu la figura). Se suposa que  $l_1 > l_2$ ,  $0 < \theta_1 < 2\pi$ ,  $0 < \theta_2 < \pi$ .



### 1. Anàlisi de posicions

#### (a) Cinètica directa

i. Determineu la funció

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] \times [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta_1, \theta_2) &\mapsto (x_1, x_2) \end{aligned}$$

que al valor dels angles a les articulacions fa correspondre les coordenades cartesianes de la “mà”  $M$  (vegeu figura).

ii. Determineu la forma  $A$  del pla abastada pel braç, és a dir,  $A = \varphi(W)$ , on  $W = \{(\theta_1, \theta_2) : 0 < \theta_1 < 2\pi, 0 < \theta_2 < \pi\}$ .

(b) **Cinètica inversa.** Demostreu que per a cada posició de la “mà”  $M = (x_1, x_2) \in A$ , hi ha només un possible valor de  $(\theta_1, \theta_2) \in W$  tal que  $(x_1, x_2) = \varphi(\theta_1, \theta_2)$ .

### 2. Anàlisi de velocitats

#### (a) Diferenciabilitat

i. Demostreu que  $\varphi \in C^\infty(W)$ .

ii. Demostreu que  $\varphi^{-1} \in C^\infty(A)$ .

#### (b) Anàlisi de velocitats

i. Demostreu que la velocitat de  $M$ ,  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ , es pot governar per les dels motors  $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ .

ii. En particular, per a  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ , calculeu les velocitats  $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$  necessàries per a obtenir les  $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$  desitjades.

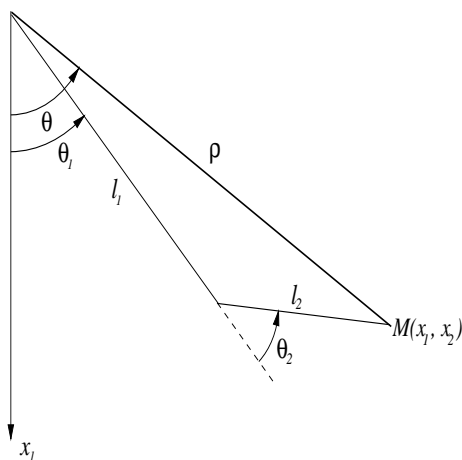


Figura 1: Coordenades polars  $\rho$ ,  $\theta$ .

### Solució al problema 3

**1(a)i:** projectant el punt  $M$  sobre els eixos  $x_1$ ,  $x_2$  s'obtenen les components  $\varphi_1, \varphi_2$  de l'aplicació  $\varphi$ ,

$$x_1 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad (3.1)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2), \quad (3.2)$$

on  $x_1 = \varphi_1(\theta_1, \theta_2)$  i  $x_2 = \varphi_2(\theta_1, \theta_2)$ .

**1(a)ii:** Elevant al quadrat (3.1) i (3.2) i sumant s'obté,

$$x_1^2 + x_2^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \theta_2. \quad (3.3)$$

De la mateixa manera, en (3.1) i (3.2), Passant  $l_1 \cos \theta_1$  i  $l_1 \sin \theta_1$  respectivament al terme de l'esquerra; elevant al quadrat les dues equacions i sumant-les obtenim:

$$x_1^2 + x_2^2 - 2l_1(x_1 \cos \theta_1 + x_2 \sin \theta_1) + l_1^2 = l_2^2 \quad (3.4)$$

Ara, introduïm coordenades polars (veure figura 1), com coordenades auxiliars:

$$x_1 = \rho \cos \theta, \quad x_2 = \rho \sin \theta,$$

( $\rho \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ), i passem (3.3), (3.4) a aquestes coordenades. Així arribarem a les equacions:

$$\rho^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos \theta_2, \quad (3.5)$$

$$\rho^2 = l_2^2 - l_1^2 + 2l_1\rho \cos(\theta - \theta_1), \quad (3.6)$$

d'on aïllant  $\cos \theta_2$  de la primera i  $\cos(\theta - \theta_1)$  de la segona,

$$\cos \theta_2 = \frac{\rho^2 - \ell_1^2 - \ell_2^2}{2\ell_1\ell_2}, \quad (3.7)$$

$$\cos(\theta - \theta_1) = \frac{\rho^2 + \ell_1^2 - \ell_2^2}{2\ell_1\rho}. \quad (3.8)$$

De (3.7), tenint en compte que  $0 < \theta_2 < \pi$ , s'obté la condició:

$$\ell_1 - \ell_2 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \ell_1 + \ell_2, \quad (3.9)$$

Així doncs, per tal de que un punt del pla sigui abastable pel braç cal que hi pertanyi a l'interior d'una *corona circular*,  $\mathcal{C}$ , de radi  $\ell_1 - \ell_2$  i  $\ell_1 + \ell_2$  i per tant  $\varphi(W) \subseteq \mathcal{C}$ . Aquesta és una restricció geomètrica donada per les longituds màxima i mínima que pot assolir el braç.

A més, si multipliquem (3.1) per  $\sin \theta_1$ , (3.2) per  $\cos \theta_1$  i restem la primera equació de la segona s'arriba a

$$\sin(\theta - \theta_1) = \frac{\ell_2}{\rho} \sin \theta_2. \quad (3.10)$$

D'aquesta manera, donat un punt de l'interior de  $\mathcal{C}$  amb coordenades polars  $(\rho, \theta)$ ; l'equació (3.7) determina unívocament l'angle  $\theta_2$  entre  $0$  i  $\pi$ . Un cop calculat  $\theta_2$ , (3.8) i (3.10) ens permeten trobar el corresponent  $\theta_1$ , que serà únic si el busquem entre  $0$  i  $2\pi$ .<sup>1</sup>

Hem vist així que, donat un punt  $(x_1, x_2) \in A$ , existeix un únic parell d'angles  $(\theta_1, \theta_2)$  amb  $0 \leq \theta_1 < 2\pi$  i  $0 < \theta_2 < \pi$  de manera que  $\varphi(\theta_1, \theta_2) = (x_1, x_2)$ .

Per finalitzar l'apartat, imposarem la restricció  $\theta_1 \neq 0$ . Cal esbrinar quins  $(x_1, x_2)$  són imatge de punts de la forma  $(0, \theta_2)$  per a algun  $\theta_2$  entre  $0$  i  $\pi$ . Fixant  $\theta_1 = 0$  a les equacions (3.1), (3.2) es té:

$$\begin{aligned} x_1 &= \ell_1 + \ell_2 \cos \theta_2, \\ x_2 &= \ell_2 \sin \theta_2. \end{aligned}$$

que són –amb  $0 < \theta_2 < \pi$ –, les equacions paramètriques d'una semicircumferència centrada al punt  $(x_1, x_2) = (\ell_1, 0)$ , radi  $\ell_2$  i amb  $x_2 > 0$ . Els punts d'aquesta semicircumferència s'han de treure dels de la corona per donar el conjunt imatge  $A$ , el qual podrem escriure com

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x_1, x_2) : \ell_1 - \ell_2 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \ell_1 + \ell_2 \right\} \\ &\quad - \left\{ (x_1, x_2) : (x_1 - \ell_1)^2 + x_2^2 = \ell_2^2, \text{ amb } x_2 > 0 \right\}, \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>En efecte, (3.8) i (3.10) donen els valors de  $\sin(\theta - \theta_1)$  i  $\cos(\theta - \theta_1)$ . Dels termes de la dreta es veu que tots dos són positius. Aleshores  $\theta_1 = \theta - \xi$  amb  $0 < \xi < \pi/2$ , quan aquesta diferència sigui positiva o bé  $\theta_1 = 2\pi + \theta - \xi$ , quan sigui negativa.

**Observació.** Notem però que els punts de la circumferència:

$$(x_1 - \ell_1)^2 + x_2^2 = \ell_2^2,$$

amb  $x_2 < 0$ , sí que són abastables pel braç (veure figura 2).

**1b:** Com que estem considerant punts  $M = (x_1, x_2) \in A$ , es clar, per la definició de conjunt imatge, que hi haurà almenys un punt  $(\theta_1, \theta_2) \in W$  tal que  $(x_1, x_2) = \varphi(\theta_1, \theta_2)$ , car  $A$  és la imatge de l'espai de configuracions del braç,  $W$ .

A l'apartat anterior hem provat que, donat un punt de  $\mathcal{C}$ , existeix una única antiimatge per  $\varphi$ : les equacions (3.7), (3.8) i (3.10) en les incògnites  $\theta_1, \theta_2$  tenien solució amb  $(\theta_1, \theta_2) \in W$  i a més, aquesta era única. D'aquí es segueix que l'aplicació  $\varphi$ , definida al conjunt  $W$ , és injectiva.

Geomètricament, el problema de, donat un punt  $M = (x_1, x_2)$ , trobar el corresponent parell d'angles  $(\theta_1, \theta_2)$  es redueix a un problema de determinació de triangles que consisteix en construir el triangle  $\widehat{OCM}$  (figura 3); amb els vèrtexs  $O, M$  i els costats  $\overline{OC} = \ell_1$  i  $\overline{CM} = \ell_2$  fixats. Si agafem el punt  $M = (x_1, x_2)$  a  $A$ , dibuixant una circumferència amb centre en  $O$  i radi  $\ell_1$ , i una altra circumferència amb centre en  $M$  i radi  $\ell_2$ ; els vèrtexs  $C$  i  $C'$  corresponents a les dues configuracions possibles del braç que abasten el punt  $M$ , són els punts intersecció de les circumferències. Una d'aquestes configuracions però, no és admissible, ja que porta a un angle  $\theta_2 < 0$  ó  $\theta_2 > \pi$ . D'aquí es dedueix la injectivitat de  $\varphi$ .

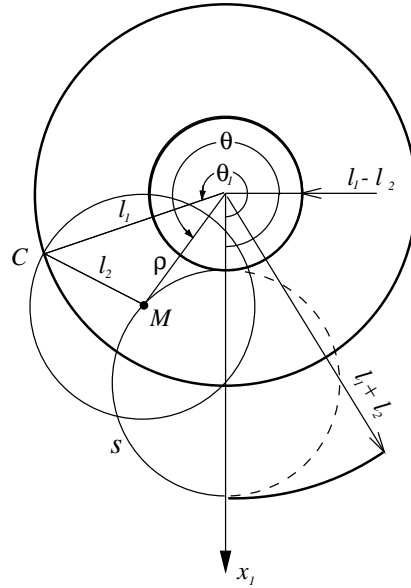
Podem provar directament la injectivitat. Així suposem que hi ha angles  $(\theta_1, \theta_2), (\theta'_1, \theta'_2) \in W$  tal que  $\varphi(\theta_1, \theta_2) = \varphi(\theta'_1, \theta'_2)$ . Es tracta de veure que llavors, necessàriament  $(\theta_1, \theta_2) = (\theta'_1, \theta'_2)$

De la condició  $\varphi(\theta_1, \theta_2) = \varphi(\theta'_1, \theta'_2)$ , resulten les equacions:

$$\ell_1 (\cos \theta_1 - \cos \theta'_1) = \ell_2 (\cos(\theta'_1 + \theta'_2) - \cos(\theta_1 + \theta_2)), \quad (3.11)$$

$$\ell_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta'_1) = \ell_2 (\sin(\theta'_1 + \theta'_2) - \sin(\theta_1 + \theta_2)), \quad (3.12)$$

que a la seva vegada, fent ús de les transformacions de diferències de cosinus



**Figura 2:** Els punts de la circumferència  $\mathcal{S}$  amb  $x_2 \geq 0$  (amb traç discontinu), no són accessibles al braç. En canvi, sí que ho són els punts  $M$  sobre la semicircumferència de l'esquerra.

i sinus, en productes de sinus, i de sinus per cosinus respectivament<sup>2</sup>, es poden escriure com:

$$\ell_1 \sin \frac{\theta_1 + \theta'_1}{2} \sin \frac{\theta_1 - \theta'_1}{2} = \ell_2 \sin \frac{\theta'_{1,2} + \theta_{1,2}}{2} \sin \frac{\theta'_{1,2} - \theta_{1,2}}{2}, \quad (3.13)$$

$$\ell_1 \cos \frac{\theta_1 + \theta'_1}{2} \sin \frac{\theta_1 - \theta'_1}{2} = \ell_2 \cos \frac{\theta'_{1,2} + \theta_{1,2}}{2} \sin \frac{\theta'_{1,2} - \theta_{1,2}}{2}, \quad (3.14)$$

on hem posat  $\theta_{1,2} = \theta_1 + \theta_2$  i  $\theta'_{1,2} = \theta'_1 + \theta'_2$ . Ara cal distingir dos casos.

– **Cas A.** La segona de les equacions, (3.14), no és idènticament zero o, el que és equivalent,  $\sin \theta_1 \neq \sin \theta'_1$ . Llavors podem dividir membre a membre i tindrem la igualtat:

$$\tan \frac{\theta_1 + \theta'_1}{2} = \tan \frac{\theta_1 + \theta'_1 + \theta_2 + \theta'_2}{2}.$$

la qual cosa implica  $\theta_2 + \theta'_2 = 2k\pi$ , amb  $k \in \mathbb{Z}$ . Però com que els angles  $0 < \theta_2, \theta'_2 < \pi$ , això és impossible, per tant s'ha de satisfer el

– **Cas B.**  $\sin \theta_1 = \sin \theta'_1$ . Això, a la seva vegada, dóna altres dues possibilitats:

1.  $\theta_1 = \theta'_1$ . Aleshores, de (3.11) i (3.12), es dedueix<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos(\theta'_1 + \theta'_2), \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \sin(\theta'_1 + \theta'_2), \end{aligned}$$

i d'aquí  $\theta_1 + \theta_2 = \theta'_1 + \theta'_2 + 2k\pi$  amb  $k \in \mathbb{Z}$ , la qual cosa implica:  $\theta_2 = \theta'_2$ , donat que,  $0 < \theta_2, \theta'_2 < \pi$  i només és possible  $k = 0$ .

2.  $\theta_1 = \pi - \theta'_1 + 2k\pi$ , amb  $k = 0, 1$ . De l'equació (3.14) deduem que cal  $\sin(\theta'_1 + \theta'_2 - \theta_1 - \theta_2)/2 = 0$ . En efecte, puix  $\cos(\theta'_1 + \theta'_2 + \theta_1 + \theta_2)/2$  no s'anul·la perquè és  $\theta'_1 + \theta_1 = \pi + 2k\pi$  amb  $k = 0, 1$ <sup>4</sup> i llavors:

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{\pi + 2k\pi + \theta'_2 + \theta_2}{2} < (k+1)\pi + \frac{\pi}{2},$$

( $k = 0, 1$ ). Però, per (3.13) resulta que s'ha de satisfer:

$$\sin \frac{\theta_1 - \theta'_1}{2} = 0 \Rightarrow \theta_1 - \theta'_1 = 2j\pi \Rightarrow \theta'_1 = \theta_1,$$

(amb  $j \in \mathbb{Z}$ ). Llavors, necessàriament  $\theta_1 = \pi/2 + k\pi$ ,  $k = 0, 1$ ; i també:

$$\sin \frac{\theta'_2 - \theta_2}{2} = 0 \Rightarrow \theta'_2 - \theta_2 = 2j'\pi \Rightarrow \theta'_2 = \theta_2,$$

(essent  $j'$  enter). I això acaba aquesta demostració de la injectivitat.

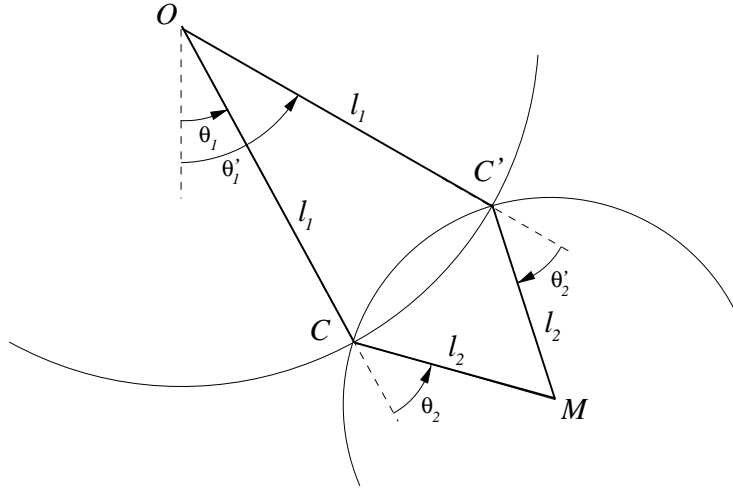


Figura 3: L'angle  $\theta_2$  determinat pel triangle  $\widehat{OC'M}$  és negatiu o més gran que  $\pi$ ; per tant aquesta configuració no és admissible en  $W$ . Aleshores els angles  $(\theta_1, \theta_2)$  corresponents al punt  $M$  de coordenades  $(x_1, x_2) \in W$ , poden ser només els determinats pel punt d'intersecció  $C$ .

**2(a)i:** Aplicant els criteris de generació a les funcions components (3.1) i (3.2), resulta que  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(W)$ .

**2(a)ii:** Si calculem la diferencial de  $\varphi$ , veiem que la seva matriu és:

$$d\varphi_{(\theta_1, \theta_2)} = \begin{pmatrix} -\ell_1 \sin \theta_1 - \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -\ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & \ell_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

que és no singular per  $(\theta_1, \theta_2) \in W$ , donat que  $\det d\varphi_{(\theta_1, \theta_2)} = \ell_1 \ell_2 \sin \theta_2 > 0$ . Aleshores, pel teorema de la inversa, tenim que  $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(A)$ .

**2(b)i:** Per la regla de la cadena

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1\varphi_1 & D_2\varphi_1 \\ D_1\varphi_2 & D_2\varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix},$$

i ja hem vist que la matriu  $(d\varphi)$  és invertible.

**2(b)ii:** En  $(\theta_1, \theta_2) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  es té:

$$d\varphi_{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} -\ell_1 & 0 \\ -\ell_2 & -\ell_2 \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup>Estem parlant de les identitats trigonomètriques:  $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$  i  $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$ .

<sup>3</sup>De fet, hauriem d'haver posat:  $\theta_1 = \theta_1' + 2k\pi$ , amb  $k \in \mathbb{Z}$ , però com que  $0 < \theta_1 < 2\pi$ ,  $0 < \theta_1' < 2\pi$ , només pot ser  $k = 0$ .

<sup>4</sup>Aquesta restricció sobre  $k$  és debuda, de nou, al fet de que  $0 < \theta_1' < 2\pi$ ,  $0 < \theta_1 < 2\pi$ .

Per tant:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell_1 & 0 \\ -\ell_2 & -\ell_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\ell_1} \dot{x}_1 \\ \frac{1}{\ell_1} \dot{x}_1 - \frac{1}{\ell_2} \dot{x}_2 \end{pmatrix}.$$