9B Sistemes dinàmics discrets

9B.1 Considereu el sistema lineal. Ull! Remarca important al final de l'exercici...

$$x_1(k+1) = \frac{1}{3}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) + 1$$
$$x_2(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) - 1$$
$$x_3(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{3}x_3(k) + \frac{1}{2}x_4(k) + 2$$
$$x_4(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{3}x_4(k) - 1$$

(a) Trobeu-me una solució particular

(b) Doneu la solució general del sistema

Solució.-

(a) Sigui A la matriu
$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2/3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}B$$

amb $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2/3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$. Sigui $b = (1,-1,2,-1)^T$. Amb aquestes definicions, el sistema s'escriu:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2/3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad X(k+1) = \frac{1}{2}BX(k) + b$$

Solució particular. Com solució particular, buscarem la solució constant: $X_p(k) = -\left(\frac{1}{2}B - I\right)^{-1}b \quad \forall k = 0,1,2,3,\ldots \Longleftrightarrow$

$$X_p(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2/3 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -2/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -2/3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{35}\begin{pmatrix} -12 & 18 & 18 & 18 \\ 18 & -12 & 18 & 18 \\ 18 & 18 & -12 & 18 \\ 18 & 18 & 18 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} -12 \\ 48 \\ -42 \\ 48 \end{pmatrix}, \quad \forall k = 0,1,2,3,\ldots$$

b) Solució general del sistema.

b.1) Solució general del sistema homogeni:

– Valors propis de la matriu B;

$$p(\lambda) = \det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2/3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2/3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2/3-\lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda-\frac{11}{3}\right)\left(\lambda+\frac{1}{3}\right)^3$$

Remarca: podem fer servir que el determinant d'ordre n:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^{n-1}(a+n-1)$$

exercici: comproveu-ho!; amb $a = 2/3-\lambda$ i $n=4$.

Per tant els VAPs són: $\lambda_1 = -1/3$ (triple), $\lambda_2 = +11/3$

– Vectors propis:

· Associats a $\lambda_1 = -1/3$: $Nuc\left(B+\frac{1}{3}I\right) = Nuc\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \langle (-1,1,0,0)^T, (-1,0,1,0)^T, (-1,0,0,1)^T \rangle$

· Associats a $\lambda_2 = 11/3$: $Nuc\left(B-\frac{11}{3}I\right) = Nuc\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$

$= \ldots = Nuc\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,1,1,1)^T \rangle$

Si definim la matriu $S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ del canvi de base, llavors; la forma diagonal de B, $\widehat{B}$, s'obté:

$$\widehat{B} = S^{-1} B S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2/3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2/3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & & & \\ & -1/3 & & \\ & & -1/3 & \\ & & & 11/3 \end{pmatrix}$$

La solució general del sistema homogeni $X_h(k)$ ve donada doncs per:

$$X_h(k) = \frac{1}{2^k} B^k X_0 = \frac{1}{2^k} S \tilde{B}^k S^{-1} X_0$$

$$= \frac{1}{2^k}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1/3)^k & & & \\ & (-1/3)^k & & \\ & & (-1/3)^k & \\ & & & (11/3)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} X_0$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 2^k \cdot 3^k}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1/3)^k & & & \\ & (-1/3)^k & & \\ & & (-1/3)^k & \\ & & & (11/3)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X_0$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 6^k}\begin{pmatrix} 11^k+3(-1)^k & 11^k-(-1)^k & 11^k-(-1)^k & 11^k-(-1)^k \\ 11^k-(-1)^k & 11^k+3(-1)^k & 11^k-(-1)^k & 11^k-(-1)^k \\ 11^k-(-1)^k & 11^k-(-1)^k & 11^k+3(-1)^k & 11^k-(-1)^k \\ 11^k-(-1)^k & 11^k-(-1)^k & 11^k-(-1)^k & 11^k+3(-1)^k \end{pmatrix} \cdot X_0$$

per $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ i amb $X_0 \in \mathbb{R}^4$ qualsevol. Per últim la solució general del sistema dinàmic lineal discret no homogeni és:

$$X_g(k) = X_h(k) + X_p(k) = X_h(k) + \begin{pmatrix} -12/35 \\ 48/35 \\ -6/5 \\ 48/35 \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

⇒ Remarca. Com que en aquest cas <u>la matriu A diagonalitza</u>, amb VAPs: $\lambda_1 = -\frac{1}{6}$ (mult 3) i $\lambda_2 = \frac{11}{6}$ (mult 1) amb els corresponents VEPs $V_1 = (-1,1,0,0)^T$, $V_2 = (-1,0,1,0)^T$, $V_3 = (-1,0,0,1)^T$, $V_4 = (1,1,1,1)^T$, podem escriure la solució general com:

$$X_g(k) = \left(-\frac{1}{6}\right)^k \left[c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + c_4\left(\frac{11}{6}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{35}\begin{pmatrix} -12 \\ 48 \\ -42 \\ 48 \end{pmatrix}$$

amb $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ constants arbitràries. □

Ull, remarca important al final de l'exercici!!

9.B2 Resoleu el sistema següent:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \frac{1}{3}x_2(k) + \frac{1}{4}x_3(k) \\ x_2(k+1) = \frac{2}{3}x_2(k) + \frac{1}{4}x_3(k) + 500 \\ x_3(k+1) = \frac{1}{2}x_3(k) + \frac{1}{4}x_4(k) \\ x_4(k+1) = \frac{3}{4}x_4(k) + 1000 \end{cases}$$

Solució.

1er calculem una solució particular, aprofitant que la 4a equació està desacoplada respecte de les tres primeres:

$$\left(1-\tfrac{3}{4}\right)x_4 = \tfrac{1}{4}x_4 = 1000 \Longrightarrow \underline{x_4 = 4000}$$

$$\left(1-\tfrac{1}{2}\right)x_3 = \tfrac{1}{4}x_4 \Longleftrightarrow \underline{x_3 = \tfrac{1}{2}x_4 = 2000}$$

$$\left(1-\tfrac{2}{3}\right)x_2 = \tfrac{1}{4}x_3 + 500 \Longleftrightarrow \tfrac{1}{3}x_2 = \tfrac{1}{4}2000 + 500 = 500+500 = 1000$$

$$\Longrightarrow \underline{x_2 = 3000}.$$

$$x_1(k+1) = x_1(k) + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 = x_1(k) + \tfrac{1}{3}3000 + \tfrac{1}{4}2000$$

$$= x_1(k) + 1000 + 500 \Longleftrightarrow x_1(k+1) = x_1(k) + 1500,$$

i una solució particular d'aquesta última EED és: $\underline{x_1(k) = 1500k}$.

A continuació calculem la solució del SDL homogeni associat:

$$X(k+1) = A\,X(k), \text{ essent } A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

- VAPs de A: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2/3,\ \lambda_3 = 1/2,\ \lambda_4 = 3/4$
- VEPs associats

$$\lambda_1 = 1: \ Nuc(A-I) = Nuc\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} = \langle (1,0,0,0)^T \rangle \Rightarrow \text{VEP ass.}: V_1 = (1,0,0,0)^T$$

$$\lambda_2 = 2/3: \ Nuc\left(A-\tfrac{2}{3}I\right) = Nuc\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix} = \ldots = Nuc\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,0,0)^T \rangle$$

$$\Longrightarrow \text{VEP associat}: V_2 = (1,-1,0,0)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} : Nuc\left(A - \frac{1}{2}I\right) = Nuc\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = Nuc\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= Nuc\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1/2, -3/2, 1, 0)^T \rangle$$

$$\Longrightarrow \text{VEP associat: } v_3 = (1, -3, 2, 0)^T$$

$$\lambda_4 = \frac{3}{4} : Nuc\left(A - \frac{3}{4}I\right) = Nuc\begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/12 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Nuc\begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/12 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= Nuc\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (-5, 3, 1, 1)^T \rangle \Longrightarrow \text{VEP ass.: } v_4 = (-5, 3, 1, 1)^T$$

Tenim així que la matriu amb la base de Jordan és:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ amb inversa: } S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i llavors, la forma diagonal de A, $\tilde{A}$ és:

$$\tilde{A} = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2/3 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & 3/4 \end{pmatrix}$$

Ara, la solució general del SDL homogeni sabem que ve donada per:

$$X_h(k) = A^k X_0 = S\tilde{A}^k S^{-1} X_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (2/3)^k & & \\ & & (1/2)^k & \\ & & & (3/4)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} X_0$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&1&-5\\0&-1&-3&3\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&(2/3)^k&&\\&&(1/2)^k&\\&&&(3/4)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-3/2&9/2\\0&0&1/2&-1/2\\0&0&0&1\end{pmatrix}X_0$$

$$=\begin{pmatrix}1&1-(2/3)^k&-3/2(2/3)^k+1/2(1/2)^k+1&-5(3/4)^k+9/2(2/3)^k-1/2(1/2)^k+1\\0&(2/3)^k&3/2(2/3)^k-3/2(1/2)^k&3(3/4)^k-9/2(2/3)^k+3/2(1/2)^k\\0&0&(1/2)^k&(3/4)^k-(1/2)^k\\0&0&0&(3/4)^k\end{pmatrix}X_0,$$

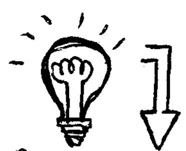
per $k=0,1,2,3,\dots$ i $X_0\in\mathbb{R}^4$ arbitrari.

D'altra banda, al principi hem vist que $X_p(k)=\begin{pmatrix}1500k\\3000\\2000\\4000\end{pmatrix}$, $k=0,1,2,3,\dots$ és una solució particular del SDL no homogeni; així doncs la solució general d'aquest ve donada per:

$$X_g(k)=A^kX_0+X_p(k)=S\tilde{A}^kS^{-1}X_0+X_p(k)$$

$$=\begin{pmatrix}1&1-(2/3)^k&-3/2(2/3)^k+1/2(1/2)^k+1&-5(3/4)^k+9/2(2/3)^k-1/2(1/2)^k+1\\0&(2/3)^k&3/2(2/3)^k-3/2(1/2)^k&3(3/4)^k-9/2(2/3)^k+3/2(1/2)^k\\0&0&(1/2)^k&(3/4)^k-(1/2)^k\\0&0&0&(3/4)^k\end{pmatrix}X_0$$

$$+\begin{pmatrix}1500k\\3000\\2000\\4000\end{pmatrix},$$ per $k=0,1,2$ i amb $X_0\in\mathbb{R}^4$ arbitrari.



Remarca. De fet, com que la matriu del sistema diagonalitza i tenim els seus VAPs i VEPs, no cal calcular A^k. Així la solució general es pot escriure també com:

$$X_g(k)=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\left(\frac{2}{3}\right)^k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+c_3\left(\frac{1}{2}\right)^k\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\0\end{pmatrix}+c_4\left(\frac{3}{4}\right)^k\begin{pmatrix}-5\\3\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1500k\\3000\\2000\\4000\end{pmatrix}$$

amb $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$ arbitraris.

9B.3 Trobeu el conjunt de solucions del sistema
$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k), \\ x_2(k+1) = x_2(k) + 1. \end{cases}$$

Solució:

Veiem que la segona equació està **desacoplada** respecte de la primera i que té per solució: $X_2(k) = k + C_2$, $C_2 \in \mathbb{R}$ arbitrari. Substituint a la primera arribem a l'EED no homogènia:
$$X_1(k+1) = X_1(k) + k + C_2. \qquad (*)$$
D'aquesta, busquem solucions particulars de la forma: $X_1^p(k) = \alpha k^2 + \beta k$. Substituint i comparant coeficients:
$$X_1^p(k+1) - X_1^p(k) - k - C_2 = \alpha(k+1)^2 + \beta(k+1) - \alpha k^2 - \beta k - k - C_2$$
$$= \cancel{\alpha k^2} + 2\alpha k + \alpha + \cancel{\beta k} + \beta - \cancel{\alpha k^2} - \cancel{\beta k} - k - C_2 = (2\alpha - 1)k + \alpha + \beta - C_2 = 0$$
d'on: $\alpha = 1/2$, $\beta = C_2 - 1/2$.

Remarca: alternativament, donant valors,
$$k=0: \; X_1^p(1) = X_1^p(0) + C_2 \Longleftrightarrow \alpha + \beta = C_2$$
$$k=1: \; X_1^p(2) = X_1^p(1) + 1 + C_2 \Longleftrightarrow 4\alpha + 2\beta = \alpha + \beta + 1 + C_2 \Longleftrightarrow 3\alpha + \beta = 1 + C_2$$
$$\Longleftrightarrow \begin{matrix} \alpha + \beta = C_2 \\ 3\alpha + \beta = 1 + C_2 \end{matrix} \Longleftrightarrow \alpha = 1/2, \; \beta = C_2 - 1/2$$

i tenim que la solució particular buscada de $(*)$ és: $X_1^p(k) = C_2 k + \frac{k}{2}(k-1)$, d'on podem escriure la solució general de la mateixa equació com:
$$X_1(k) = C_1 + C_2 k + \frac{k}{2}(k-1), \text{ amb } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ arbitraris}.$$

Finalment la solució general del SDL no homogeni resulta:
$$X(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_0 + \begin{pmatrix} \frac{k}{2}(k-1) \\ k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$
amb $X_0 = (C_1, C_2)^T \in \mathbb{R}^2$ arbitrari. $\square$

9B·4 Estudieu l'existència de punts d'equilibri i de solucions fitades per al sistema:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -3x_1(k) - 2x_2(k) \\ x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) \end{cases}$$

Solució.

$$X(k+1) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X(k), \text{ i.e.: } X(k+1) = AX(k) \text{ amb: } A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Polinomi característic: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-1)+4$
$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$: $\lambda_1 = -1$ (mult 2).

Calculem una base de Jordan: $v_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Nuc}(A+I)$, per ex. $v_1 = (1,0)^T$,
$v_2 = (A+I)v_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. La matriu corresponent és: $S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,
i la forma de Jordan; $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda el càlcul successiu de les potencies de $\tilde{A}$ produeix:

$$\tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\ldots, (\text{inducció})\ \tilde{A}^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ (-1)^{k+1}k & (-1)^k \end{pmatrix}, \ldots$$

Amb això podem trobar la solució general. En efecte:

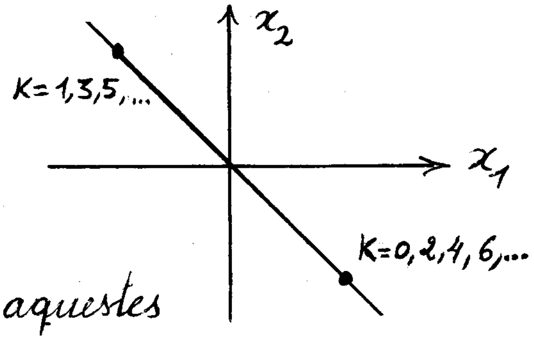
$$X(k) = S\tilde{A}^k S^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ (-1)^{k+1}k & (-1)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} X_0, \text{ amb } X_0 = (c_1, c_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ (-1)^{k+1}k & (-1)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} (-1)^k(1+2k) & -2(-1)^k \\ -2(-1)^k k & 2(-1)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} X_0$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^k(1+2k) & 2k(-1)^k \\ -2k(-1)^k & (-1)^k(1-2k) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(-1)^k + 2k(-1)^k(c_1+c_2) \\ -2k(-1)^k(c_1+c_2) + (-1)^k c_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

per $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ i amb $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitraris.

A la vista de la solució general $(*)$, es conclou que l'única solució constant és la corresponent a $c_1 = c_2 = 0$; la qual cosa es pot dir també d'entrada perquè la matriu del sistema, A, no té cap VAP igual a 1, i.e. $1 \notin \mathrm{Spec}(A)$. Tanmateix, de la solució general $(*)$ es veu que una solució serà acotada sii $c_2 = -c_1$, i.e., sii la seva c.i. es troba sobre la recta $y = -x$. Això dóna lloc a una família 1-paramètrica de solucions acotades:



$$X(k) = c(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

i amb $c \in \mathbb{R}$ arbitrari. De fet, si $c \neq 0$, aquestes solucions són 2-periòdiques. $\square$

9B·5 Considereu el sistema d'equacions en diferències:

$$x_1(k+1) = \frac{1}{2} x_1(k) + \frac{1}{4} x_2(k) + \frac{1}{4} x_3(k)$$
$$x_2(k+1) = \frac{1}{4} x_1(k) + \frac{1}{2} x_2(k) + \frac{1}{4} x_3(k)$$
$$x_3(k+1) = \frac{1}{4} x_1(k) + \frac{1}{4} x_2(k) + \frac{1}{2} x_3(k)$$

Indiqueu quines són les solucions del sistema que són:

(a) Convergents (a un punt d'equilibri).

(b) Fitades, però no convergents.

(c) Divergents.

Solució: $X(k+1) = A X(k) = \frac{1}{4} B X(k)$,

amb: $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$;

VAPs i VEPs d'A:

$\lambda_1 = 1/4$ (doble). $\lambda_2 = 1$

- Per $\lambda_1 = 1/4$: $\mathrm{Nuc}(A - \frac{1}{4} I) = \mathrm{Nuc} \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \langle (-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T \rangle$

• Per $\lambda_2 = 1$: $Nuc(A+I) = Nuc\begin{pmatrix} -1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} = \langle (1,1,1)^T \rangle$.

Tenim doncs una base de VEPs $v_1 = (1,-1,0)^T$, $v_2 = (1,0,-1)^T$ associats al VAP doble $\lambda_1 = 1/4$ i $v_3 = (1,1,1)^T$ associat al VAP simple $\lambda_2 = 1$.
Per tant (veure les remarques al final dels problemes 9B1 i 9B2) podem escriure la solució general del sistema d'equacions en diferències com:

$$X(k) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^k \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = 0,1,2,3,\dots$$

Veiem doncs que totes les solucions són fitades: tots els VAPs són reals i cap d'ells té mòdul més gran que 1. Donada una c.i, $X_0 \in \mathbb{R}^3$, si la 3ª component de $S^{-1}X_0$, essent $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriu amb la base de VEPs, és igual a zero, llavors la solució corresponent convergeix a l'origen; en altre cas, la solució convergeix cap al punt $X_* = (0,0,1) \cdot S^{-1} X_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □

9B6 Determineu els modes propis i els modes dominants per al sistema d'equació en diferències:

$$x_1(k+1) = \frac{1}{4} x_1(k) + \frac{1}{3} x_2(k) + \frac{1}{3} x_3(k)$$

$$x_2(k+1) = \frac{1}{3} x_1(k) + \frac{1}{4} x_2(k) + \frac{1}{3} x_3(k)$$

$$x_3(k+1) = \frac{1}{3} x_1(k) + \frac{1}{3} x_2(k) + \frac{1}{4} x_3(k)$$

Solució:
Sigui A la matriu: $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/4 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$

NOTE BOOK

Alestores, el sistema d'equacions en diferencies s'escriu, en forma matricial com:

$$X(k+1) = A X(k)$$

A continuació calculem els VAPs i els VEPs d'A i resulten:

$\lambda_1 = \frac{11}{12}$ (mult 1), amb VEP associat $V_1 = (1,1,1)^T$

$\lambda_2 = -\frac{1}{12}$ (mult 2), amb VEPs associats $V_2 = (-1,1,0)^T, V_3 = (-1,0,1)^T$

Remarca: es comprova que $\dim Nuc\left(A + \frac{1}{12} I\right) = 2$ i que $Nuc\left(A + \frac{1}{12} I\right) = \langle (-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T \rangle$.

Així doncs tenim els modes propis:

$$X_1(k) = \left(\frac{11}{12}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2(k) = \left(-\frac{1}{12}\right)^k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3(k) = \left(-\frac{1}{12}\right)^k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

d'aquest $X_1(k)$ és el que correspon al valor propi dominant: $\lambda_1 = \frac{11}{12}$ (ja que $|\lambda_1| = \frac{11}{12} > |\lambda_2| = \frac{1}{12}$), per tant és el mode dominant. La solució general la obtindrem com combinació lineal dels modes propis amb coeficients arbitraris (*), i.e.:

$$X(k) = c_1 X_1(k) + c_2 X_2(k) + c_3 X_3(k)$$
$$= c_1 \left(\frac{11}{12}\right)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{12}\right)^k \left[c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

(*) Recordem que en aquest cas, la matriu diagonalitza. □