(3A) Matrius

3A·4 (*) La transformació que descompon en monofàsics un operador d'inductàncies és $F = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix}$, essent $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^3 = 1$, $\alpha \neq 1$. Calculeu F^4!

Solució. $$F^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1+\alpha+\alpha^2 & 1+\alpha+\alpha^2 \\ 1+\alpha+\alpha^2 & 1+\alpha^2+\alpha^4 & 1+\alpha^3+\alpha^3 \\ 1+\alpha+\alpha^2 & 1+\alpha^3+\alpha^3 & 1+\alpha^2+\alpha^4 \end{pmatrix}$$

$\alpha^3 = 1$, $\alpha^4 = \alpha\cdot\alpha^3 = \alpha$, i $(1+\alpha+\alpha^2)(1-\alpha) = \alpha^3 - 1 \overset{(*)}{\Longrightarrow} 1+\alpha+\alpha^2 = \frac{\alpha^3-1}{\alpha-1} = 0$, ja que $\alpha \neq 1$ i $\alpha^3 = 1$. Per tant:

$$F^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$ on hem fet servir que $1+\alpha^2+\alpha^4 = 1+\alpha+\alpha^2 = 0$,

i llavors:

$$F^4 = F^2F^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$
$$= I$$

3A·5 Demostreu que la matriu triangular per blocs $A = \begin{pmatrix} P & R \\ O & Q \end{pmatrix}$ és invertible si, i només si, ho són P i Q, i que aleshores

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}RQ^{-1} \\ O & Q \end{pmatrix}.$$

Solució. Si A és invertible $\exists\, B = \begin{pmatrix} U & V \\ Z & W \end{pmatrix}$ t.q. $AB = BA = I$, escrivim $B = A^{-1}$ ($\Leftrightarrow A = B^{-1}$). En particular

$$AB = \begin{pmatrix} P & R \\ O & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & V \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PU+RZ & PV+RW \\ QZ & QW \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow PU+RZ = I_r,\ PV+RW = 0,\ QZ = 0,\ QW = I_{n-r}$$

D'aquí tenim que Q té inversa "per la dreta": $QW = I_{n-r}$ i com que

(*) En general: $\alpha^n - 1 = (\alpha-1)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}+\dots+\alpha+1)$, per tot $n \in \mathbb{N}$

Q és una matriu quadrada, llavors Q és invertible i $QW = WQ = I_{n-r}$. Posem doncs $W = Q^{-1}$ (i $Q = W^{-1}$). Aleshores:

1) $QZ = 0 \Rightarrow WQZ = Q^{-1}QZ = Z = 0$,

2) $I_r = PU + RZ = PU$.

Llavors P té inversa per la dreta, $U \Longrightarrow PU = UP = I$, d'on $U = P^{-1}$ (i $P = U^{-1}$). Per últim de $PV + RW = 0 \Leftrightarrow PV = -RW \Leftrightarrow V = -P^{-1}RQ^{-1}$. D'aquesta manera veiem que P i Q són invertibles i:

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}RQ^{-1} \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \qquad (\&)$$

D'altra banda, si P i Q són invertibles, considerem la matriu (&) llavors:

$$AB = \begin{pmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}RQ^{-1} \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

i:

$$BA = \begin{pmatrix} P^{-1} & -P^{-1}RQ^{-1} \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & \\ & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

d'on $AB = BA = I$ i aleshores $B = A^{-1}$ i la matriu A és invertible.

3A·6 (*) El model probabilístic de Jukes-Cantor descriu el procés de transformació de cadenes d'ADN formades per quatre nucleòtids mitjançant una matriu del tipus.

$$M = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha/3 & \alpha/3 & \alpha/3 \\ \alpha/3 & 1-\alpha & \alpha/3 & \alpha/3 \\ \alpha/3 & \alpha/3 & 1-\alpha & \alpha/3 \\ \alpha/3 & \alpha/3 & \alpha/3 & 1-\alpha \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{4}{3}\alpha\right) I + \frac{\alpha}{3} U$$

on $0 < \alpha \leq \frac{3}{4}$ i on U és la matriu amb tots els coeficients 1.

(a) Demostreu que les seves potències també són del tipus Jukes-Cantor. Concretament:

$$M^k = \left(1-\frac{4}{3}\alpha_k\right)I + \frac{\alpha_k}{3}U, \quad \alpha_k = \frac{3}{4}\left(1-\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k\right).$$

(b) Discutiu per a quins valors de α és M invertible.

Solució.[(a)] Com que I, U conmuten, apliquem la fórmula del binomi:

$$M^k = \left(\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)I + \frac{\alpha}{3}U\right)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^{k-j}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^j U^j$$
$$= \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k I + \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^{k-j}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^j U^j.$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U^2 = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix} = nU \Rightarrow U^3 = UU^2 = nU^2 = n^2 U$$

$$\cdots \overset{\text{inducció}}{\Rightarrow} U^j = n^{j-1}U.$$

$$M^k = \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k I + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^{k-j}\left(\frac{4\alpha}{3}\right)^j U$$
$$= \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k I + \frac{1}{4}\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^{k-j}\left(\frac{4\alpha}{3}\right)^j - \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k\right]U$$
$$= \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k I + \frac{1}{4}\left[\left(1-\cancel{\frac{4}{3}\alpha}+\cancel{\frac{4}{3}\alpha}\right)^k - \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k\right]U$$
$$= \left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k I + \frac{1}{4}\left(1-\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k\right)U$$
$$= \left[1-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\left(1-\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k\right)\right]I + \frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{3}{4}\left(1-\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k\right)}_{=\alpha_k}U$$

$$= \left(1-\frac{4}{3}\alpha_k\right)I + \frac{\alpha_k}{3}U, \text{ amb } \alpha_k := \frac{3}{4}\left(1-\left(1-\frac{4}{3}\alpha\right)^k\right)$$

(b)
$$\det M = \begin{vmatrix} 1-\alpha & \alpha/3 & \alpha/3 & \alpha/3 \\ \alpha/3 & 1-\alpha & \alpha/3 & \alpha/3 \\ \alpha/3 & \alpha/3 & 1-\alpha & \alpha/3 \\ \alpha/3 & \alpha/3 & \alpha/3 & \alpha/3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-4\alpha/3 & 0 & 0 & \alpha/3 \\ 0 & 1-4\alpha/3 & 0 & \alpha/3 \\ 0 & 0 & 1-4\alpha/3 & \alpha/3 \\ 4\alpha/3-1 & 4\alpha/3-1 & 4\alpha/3-1 & 1-\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-4\alpha/3 & 0 & 0 & \alpha/3 \\ 0 & 1-4\alpha/3 & 0 & \alpha/3 \\ 0 & 0 & 1-4\alpha/3 & \alpha/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha+\alpha/3+\alpha/3+\alpha/3 \end{vmatrix} = \left(1-\frac{4\alpha}{3}\right)^3 \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha \neq \frac{3}{4}$$

Aleshores, la matriu M és invertible $\Leftrightarrow \alpha \neq \frac{3}{4}$

(3B) Determinants.

3B.1 Calculeu els següents determinants:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 8 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} \cos x & e^{ix} & e^{-ix} \\ \cos 2x & e^{2ix} & e^{-2ix} \\ \cos 3x & e^{3ix} & e^{-3ix} \end{vmatrix}$

Solució.

(a)
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -5/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -5/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/10 \end{vmatrix} = 1$$

(b)
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -8 \\ 0 & 7 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & -8 \\ 0 & 0 & 18 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -8 \\ 18 & -1 \end{vmatrix} = 144-13$$
$$= 131.$$

(c) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \\ 1-x & 1-x & 1-x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix}$

$= (x+3)(x-1)^3 = (x^3-3x^2+3x-1)(x+3) = x^4 - \cancel{3x^3} + 3x^2 - x +$
$+ \cancel{3x^3} - 9x^2 + 9x - 3 = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 8 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 8 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = 0$

$4^a f - \frac{1}{2}(3^a f + 5^a f)$

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$4^a f - \frac{1}{2}(3^a f + 5^a f)$

(f) $\begin{vmatrix} \cos x & e^{ix} & e^{-ix} \\ \cos 2x & e^{2ix} & e^{-2ix} \\ \cos 3x & e^{3ix} & e^{-3ix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \cos x + i\sin x & \cos x - i\sin x \\ \cos 2x & \cos 2x + i\sin 2x & \cos 2x - i\sin 2x \\ \cos 3x & \cos 3x + i\sin 3x & \cos 3x - i\sin 3x \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & e^{ix} & e^{-ix} \\ 0 & e^{2ix} & e^{-2ix} \\ 0 & e^{3ix} & e^{-3ix} \end{vmatrix} = 0$

$1^a c - \frac{1}{2}(2^a c + 3^a c)$

(3C) Rang d'una matriu.

1. (*) Un sistema de control

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ A \in M_n,\ B \in M_{n\times m}$$

resulta ser "controlable" (és a dir, tot canvi en els valors de x és factible mitjançant un control $u(t)$ adequat) si i només si, és màxim el rang de l'anomenada "matriu de controlabilitat".

$$K = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$$

(a) Discutiu per a quins valors de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és controlable el sistema definit per

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Discutiu per a quins valors de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és controlable amb només el segon control, és a dir, quan en lloc de la matriu B original es considera només la matriu columna $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) En general, els "índex de controlabilitat" vénen determinats pels rangs de les matrius

$$B,\ (B, AB),\ (B, AB, A^2B), \dots,\ K$$

Calculeu aquests rangs, en funció dels paràmetres $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ per al sistema definit per

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ \hline & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \gamma \\ 0 & \delta \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Solució.

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -2 & \beta \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, $A^2B = \begin{pmatrix} -2 & \beta \\ -2 & -\beta \\ \alpha & \alpha\beta+1 \end{pmatrix}$

$$K = (B, AB, A^2B) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & \beta & -2 & \beta \\ 0 & \beta & -2 & \beta & -2 & -\beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha\beta+1 \end{array}\right)$$

$$\operatorname{rang} K = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta & -2 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha\beta+1 \\ 0 & \beta & -2 & \beta & -2 & -\beta \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & \beta & -2 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha & \alpha\beta+1 \\ 0 & 0 & -2-\alpha\beta & 0 & -2-\alpha\beta & \beta(-2-\alpha\beta) \end{array}\right)$$

$$= 3 \iff \boxed{\alpha\beta \neq -2}$$

(b) Només amb el 2^{on} control, i.e. amb $B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$

$$K_2 = \left(B_2, AB_2, A^2B_2\right) = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \beta \\ \beta & \beta & -\beta \\ 1 & 1 & \alpha\beta+1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rang} K_2 = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha\beta+1 \\ \beta & \beta & -\beta \\ 0 & \beta & \beta \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha\beta+1 \\ 0 & 0 & \beta(-2-\alpha\beta) \\ 0 & \beta & \beta \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha\beta+1 \\ 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & -\beta(2+\alpha\beta) \end{pmatrix}$$

$$= 3 \iff \beta(2+\alpha\beta) \neq 0$$

(c) $\operatorname{rang} K_0 = \operatorname{rang} B = 2$ (obv.)

$2^a f - \gamma \cdot 6^a f$ | $4^a f - \delta \cdot 7^a f.$
$3^a f - \gamma \cdot 7^a f - \delta \cdot 6^a f$

$$\operatorname{rang} K_1 = \operatorname{rang}(B, AB) = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & 0 & \delta \\ 0 & \delta & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = 4 \ \forall \delta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{rang} K_2 = \operatorname{rang}(B, AB, A^2B) = \operatorname{rang}\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 & 0 \\ 0 & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} B & AB & A^2B \end{array} \end{array} = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \begin{cases} 6, \text{ si } \gamma \neq 0 \text{ ó } \delta \neq 0, \\ 5, \text{ si } \gamma = \delta = 0. \end{cases}$$

$$\operatorname{rang} K_3 = \operatorname{rang}(B, AB, A^2B, A^3B) = \operatorname{rang}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B & AB & A^2B & A^3B \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 7, \text{ si } \gamma \neq 0 \text{ ó } \delta \neq 0, \\ 6, \text{ si } \gamma = 0 = \delta. \end{cases}$$

$$K_4 = \text{rang}\,(B, AB, A^2B, A^3B, A^4B) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \delta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 7 \;\; \forall \gamma, \delta \in$$