Nom:

Àlgebra Lineal (Grup 53) **Avaluació Continuada – 17/12/2010**

(i) Trobeu la solució de l'equació en diferències amb valors inicials,

$$y(k+2) - 3y(k+1) + 2y(k) = 0, \qquad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \alpha + \beta \tag{1}$$

on els paràmetres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (7 punts)

(ii) Esent $y(k)$ la solució de (1) i suposant que $|\alpha| + |\beta| > 0$, doneu el valor del límit

$$\lim_k \frac{y(k+1)}{y(k)}$$

en funció de α i β. (2 punts)

(iii) Determineu el(s) punt(s) d'equilibri de l'equació en diferències de l'apartat (i) i discutiu la seva estabilitat. (1 punt)

temps: 15^{min}

Resolució: (i) Polinomi característic: $p(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$ i els valors característics són per tant, $\lambda_1 = 2$ (dominant), $\lambda_2 = 1$. Aleshores tota solució de l'EED és de la forma:

$$y(k) = c_1 + c_2 2^k, \tag{2}$$

amb $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Per determinar c_1, c_2 imposem les condicions inicials:

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = c_1 + c_2 \;\;\; = \alpha \\ y(1) = c_1 + 2c_2 = \alpha + \beta \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

d'on:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Aleshores, la solució de l'EED que satisfà les condicions inicials de (1) resulta:

$$y(k) = \alpha - \beta + \beta 2^k. \tag{3}$$

(ii) Si l'EED té un valor característic dominant, λ_1^k, i $y(k)$ és una solució que conté el corresponent mode associat, λ_1^k, i.e.: $y(k) = c_1 \lambda_1^k$ amb $c_1 \neq 0$, sabem llavors que el límit $\lim_k \frac{y(k+1)}{y(k)} = \lambda_1$. En el nostre cas, tenim que $\lambda_1 = 2$ és un valor característic dominant i per tant, de la solució (3) hom veu que:

$$\lim_k \frac{y(k+1)}{y(k)} = 2, \qquad \text{per tot } \alpha, \text{ sii } \beta \neq 0,$$

mentre que si $\beta = 0$ i $\alpha \neq 0$, aleshores és $y(k) = \alpha$ per tot $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i per aquest cas tenim, obviament:

$$\lim_k \frac{y(k+1)}{y(k)} = 1, \qquad\qquad \text{quan } \beta = 0 \text{ i } \alpha \in \mathbb{R} \text{ amb } \alpha \neq 0.$$

(iii) Busquem els punts d'equilibri i. e., solucions constants de la forma $y(k) = y_e$ per tot $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ amb y_e t. q.: $y_e - 3y_e + 2y_e = (1 - 3 + 2)y_e = 0$; és a dir, tot $y_e \in \mathbb{R}$ és un punt d'equilibri, que serà *inestable* donat que, d'acord amb la forma general per les solucions (2), tota solucuó amb $c_2 \neq 0$ és no acotada. $\square$