Nom:

Àlgebra Lineal (Grup 53) **Avaluació Continuada – 10/11/2010**

---

1. Calculeu el rang de les següents matrius, i trobeu la inversa en cas de ser invertibles:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

temps: 25^{min}

Resolució:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{rang} A = 3.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprovació:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Si agafem el determinant de la matriu B i sumen, a la primera col·lumna, la diferència de la quarta i la segona s'obté:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \operatorname{rang} B < 4.$$

De fet, el rang de B és 3 perquè, per exemple, el menor d'ordre 3×3 de la matriu B és

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{rang} B = 3. \qquad \square$$