1 Zeros d'equacions i sistemes no lineals

1. Volem calcular les arrels de $x^3 + x - 1000$ amb un esquema iteratiu de la forma $x = g(x)$.

   a) Demostreu que només té una arrel real.

   b) Formeu esquemes iteratius que no convergeixin cap a la solució.

   c) Formeu-ne que convergeixin. Quin serà el més ràpid? determineu per a aquest un interval on es compleixin les hipòtesis del lema de contracció. Determineu el mínim nombre d'iteracions per assegurar (teòricament) un error menor que 10^{-6}. Trobeu la solució.

   d) Considereu ara $x = g(x) = \sqrt{\frac{1000}{x} - 1}$. Calculeu la solució. Accelereu per Aitken la successió anterior.

2. Usant els mètodes de bissecció, secant i Newton, trobeu els zeros de la funció

   a) $f(x) = 4\sin x + 1 - x$.

   b) $f(x) = 1 - x - \exp(-2x)$.

   c) $f(x) = (x+1)e^{x-1} - 1$.

3. Sigui $f(x) = \frac{x^3+bx}{3x^2+d}$. Calculeu les constants b i d de manera que el mètode d'iteració tingui convergència quadràtica cap a $\sqrt{a}$. A partir d'això calculeu, treballant amb doble precisió, $\sqrt{10}$ amb 10 xifres decimals. Què s'observa?

4. Apliqueu Newton per calcular totes les arrels de $x\exp(\exp(\exp x)) = 1$.

5. Calculeu l'arrel més petita de $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ per iteració de la funció $g(x) = (x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 1)/(-5)$. Quin ordre s'observa? Justifiqueu-lo.

6. Resoleu $x = \cos x$ per iteració simple, amb el mètode d'Aitken i el de Steffensen.

7. (Examen Gener 2012). Proveu que l'ordre de convergència del mètode de Steffensen

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(f(x_k))^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}$$

   en el càlcul de zeros simples de funcions dues vegades diferenciables amb continuïtat és 2. Quant val la constant asimptòtica de l'error?.

8. a) Demostreu que el mètode de Newton modificat per a zeros múltiples

$$x_{k+1} = x_k - \frac{mf(x_k)}{f'(x_k)}$$

   té ordre de convergència 2 en calcular un zero α de multiplicitat m de f.

[0]T. Lázaro, M. Ollé i J.R. Pacha. Departament Matemàtica Aplicada I

b) Calculeu la constant asimptòtica de l'error (suposeu que $f^{(m+1)}(\alpha) \neq 0$).

9. Apliquem el mètode de Newton a un sistema de 2 equacions amb 2 variables

$$f(x,y) = 0, \quad g(x,y) = 0.$$

Donat un iterat (x_n, y_n), trobeu l'expressio analítica de l'increment δ i ϵ (en funció de f i g) que determina el següent iterat (x_{n+1}, y_{n+1}) amb $x_{n+1} = x_n + \delta, y_{n+1} = y_n + \epsilon$.

10. Apliqueu el mètode de Newton amb dues variables per tal de calcular la solució del sistema no lineal:

$$x = \sin(x+y), \quad y = \cos(x-y)$$

prop de $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Acabeu el procés quan el vector residual, resultant de restar els dos membres de cada equació, sigui menor que 10^{-10} en $\|\cdot\|_\infty$.

11. Donat el polinomi $P(x) = 5x^4 - 8x^3 - x^2 + x - 6$, determineu dos intervals que continguin totes les arrels reals (positives i negatives respectivament)

a) aplicant la regla de Laguerre.

b) aplicant la regla de Newton.

12. Calculeu, pel mètode de Bairstow, els zeros del polinomi $P(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 9$

ZEROS

1.a) Bolzano: $f(1) = -998 < 0$, $f(10) = 1010 > 0$ $\Rightarrow \exists$ una arrel com a mínim

Si $\exists$ una altra arrel $\Rightarrow$ hauria d'haver un zero de la derivada (T. Rolle) però $f' = 3x^2+1$.

b) $x = 1000 - x^3 \equiv f_1(x)$ però $|f_1'(x)| = 3x^2 > 1$ a $I = [1,10]$

$x = \dfrac{1000}{x^2} - \dfrac{1}{x} \equiv f_2(x)$ $\qquad |f_2'(x)| = \dfrac{1}{x^2}\left|1 - \dfrac{2000}{x}\right| > 1$ a I

$x = \dfrac{1000}{1+x^2} \equiv f_3(x)$ $\qquad |f_3'(x)| = \dfrac{2000x}{1+x^2} > 1$ a I.

c) Considerem els inversos dels anteriors

$x = \sqrt[3]{1000 - x} \equiv g_1(x)$

$x = \dfrac{-1 + \sqrt{1+4000x}}{2x} \equiv g_2(x)$

$x = \sqrt{\dfrac{1000}{x} - 1} \equiv g_3(x)$

El millor el prendrem com el que té la derivada més petita (i.e. la derivada més gran a l'apartat a)); prendrem ara $[8,10]$

Serà $x = \sqrt[3]{1000 - x} \equiv g_1(x)$

$g_1'(x) = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(1000-x)^{2/3}} < 0 \Rightarrow g_1$ és decreixent

Provem. $I = [8,10] \xrightarrow{g_1} [8,10]$: $g_1(8) \le 10$, $g_1(10) \ge 8$ ✓

. $L = \sup\limits_{x \in [8,10]} |g_1'(x)| = \dfrac{(1000-10)^{-2/3}}{3} = 3{,}35 \times 10^{-3}$

Dins $|x_n - s| \le \dfrac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \le \dfrac{2L^n}{1-L} < 10^{-6} \Rightarrow L^n < \dfrac{(1-L)10^{-6}}{2}$
Imposem

$\Rightarrow n > \dfrac{\log\left(\frac{(1-L)10^{-6}}{2}\right)}{\log L} \simeq 2{,}13 \Rightarrow n = 3$

La solució és $\boxed{9{,}966618}$ (3ª iteració)

Amb tan poques iteracions no cal accelerar la convergència.

Però si prenem $x = g_3(x) = \sqrt{\frac{1000}{x} - 1}$

obtenim $x'_{10} = 9{,}966617$ amb Aitken mentre que necessitem

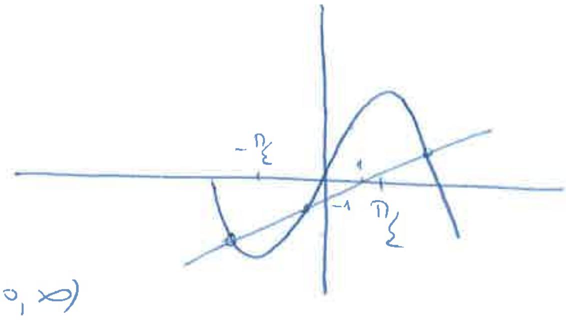
x_{23} per arribar a la solució (de fet $x_{10} = 9{,}964304$).

$$\left(\text{Aitken} : \quad x'_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}.\right.$$

2) a) $4\sin x + 1 - x = f(x)$

. 3 arrels (Bolzano)

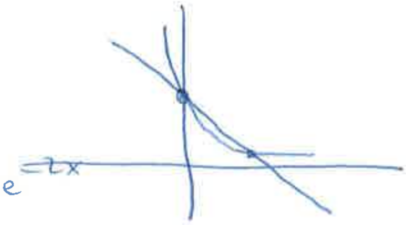
$(-\infty, -\pi/2)$, $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, \infty)$



Bisecció: Arrels: $-2{,}210095$, $-0{,}3421852$, $2{,}702061$

Newton:	4 iteracions	$x_0 = -2$	Secant	8 iter.	$x_0 = -2$, $x_1 = -1{,}7$
	4 .	$x_0 = 0$		7 iter	$x_0 = -1{,}7$, $x_1 = 0$
	5 .	$x_0 = 2$		9 iter	$x_0 = 0$, $x_1 = 2$.

b) $1 - x - e^{-2x}$



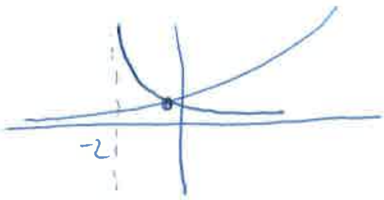
2 arrels ($f'(x) = -1 + 2e^{-2x}$ per només té 1 zero).

$x = 0$

$x = 0{,}7968121$

c) $(x+1)e^{x-1} - 1 = 0$

Fem el canvi $x - 1 = y$ $\longrightarrow$ $(y+2)e^y = 1 \rightarrow e^y = \frac{1}{y+2}$



$\exists!$ arrel $(f' = e^y(y+3) > 0$ a $y \geq -2.)$

$y = -0{,}4428545 \rightarrow x = 0{,}5571455$.

3. Cal que $\left.\begin{array}{l} f(\sqrt{a})=\sqrt{a} \\ f'(\sqrt{a})=0 \end{array}\right\} \overset{\text{operant}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} 2a - b + d = 0 \\ 3a^2 - 3ab + 3ad + bd = 0 \end{array}\right.$

$\rightarrow b = 2a + d$

A la 2ª eq: queda $d^2 + 2ad - 3a^2 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \boxed{d = a} > 0 \\ d = -3a \end{array}\right.$

$\Rightarrow \boxed{b = 3a}$

Fem ara $a = 10$, $x_0 = 3$, $f(x) = x$ ie $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + 30}{3x_n^2 + 10}$

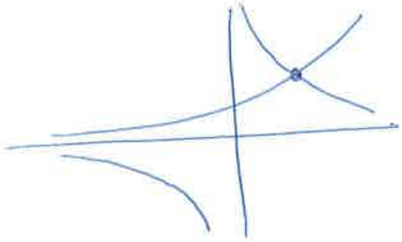
i $n=0$ $\quad x_0 = 3$ $\quad$ err $= 0{,}162$

$n=1$ $\quad x_1 = 3{,}162162$ $\quad e = 1{,}15 \times 10^{-4}$

$n=2$ $\quad x_2 = 3{,}1622776601683809$ $\quad e = 3{,}7 \cdot 10^{-14}$.

NOTA De fet és convergència cúbica (ja que es compleix també que $f''(\sqrt{a}) = 0$).

4. $xe^{e^{e^x}} = 1 \iff e^{e^{e^x}} = \frac{1}{x}$



Newton $f(x) = xe^{e^{e^x}} - 1$

$f' = e^{e^{e^x}}(xe^{e^x}e^x + 1)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{xe^{e^{e^x}} - 1}{e^{e^{e^x}}(xe^{e^x}e^x + 1)}$$

$x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}0659881\ldots$ $\quad s = 5{,}6141168 \times 10^{-2}$.

5. $x = f(x)$ iè $x = \dfrac{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 1}{-5}$

Prenem $x_0 = 0$

n	x_n	$x_n - s$	$\frac{\lvert x_{n+1} - s \rvert}{\lvert x_n - s \rvert}$
0	0		0,27870
1	$-0{,}2$	$-0{,}0385083$	0,29618
2	$-0{,}237726$	$0{,}01073237$	
⋮	⋮		⋮
18	$\boxed{s \approx 0{,}2385083275}$		0,297645

(ordre 1 lineal)

$(f'(s) = 0{,}297640625)$

6. FAL a teoria.

7. Veure solució examen

Problema 8.3 *Demostreu que el* mètode de Newton modificat per a zeros múltiples

$$x_{k+1} = x_k - \frac{m\, f(x_k)}{f'(x_k)} \ ,$$

té ordre de convergència 2 en calcular un zero α de multiplicitat m de f sempre que f sigui $m+1$ vegades diferenciable amb continuïtat i que $f^{(m+1)}(\alpha) \neq 0$.

SOLUCIÓ:

Si f és $m+1$ vegades diferenciable amb continuïtat, tenint en compte que $f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$ i $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$, resulten les expressions:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}(x-\alpha)^m + \frac{f^{(m+1)}(\xi_1)}{(m+1)!}(x-\alpha)^{m+1} \ , \\ f'(x) &= \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!}(x-\alpha)^{m-1} + \frac{f^{(m+1)}(\xi_2)}{m!}(x-\alpha)^m \ , \end{aligned}$$

amb $\xi_1, \xi_2 \in < x, \alpha >$.

Per tant,

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - \frac{m\left[\frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!}(x_k-\alpha)^m + \frac{f^{(m+1)}(\xi_1)}{(m+1)!}(x_k-\alpha)^{m+1}\right]}{\frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!}(x_k-\alpha)^{m-1} + \frac{f^{(m+1)}(\xi_2)}{m!}(x_k-\alpha)^m} \ ,$$

amb $\xi_1, \xi_2 \in < x_k, \alpha >$.

Operant en l'expressió anterior s'obté

$$\begin{aligned} \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2} &= \frac{\frac{f^{(m+1)}(\xi_2)}{m!} - \frac{m f^{(m+1)}(\xi_1)}{(m+1)!}}{\frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!} + \frac{f^{(m+1)}(\xi_2)}{m!}(x_k-\alpha)} \\ &= \frac{f^{(m+1)}(\xi_2) - \frac{m}{m+1} f^{(m+1)}(\xi_1)}{m f^{(m)}(\alpha) + f^{(m+1)}(\xi_2)(x_k-\alpha)} \ . \end{aligned}$$

Quan $k \to \infty$, $x_k \to \alpha$ i $\xi_i \to \alpha$ per a $i = 1, 2$ i, per tant,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2} = \frac{f^{(m+1)}(\alpha) - \frac{m}{m+1} f^{(m+1)}(\alpha)}{m f^{(m)}(\alpha)} = \frac{f^{(m+1)}(\alpha)}{m(m+1) f^{(m)}(\alpha)} \neq 0 \ .$$

Així doncs, l'ordre de convergència és 2 i la constant asimptòtica de l'error és

$$\frac{f^{(m+1)}(\alpha)}{m(m+1) f^{(m)}(\alpha)} \ .$$

9. Fet a teoria

10 Escrivim el sistema de la forma:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \sin(x_1+x_2) \\ x_2 - \cos(x_1 - x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El mètode de Newton amb dues variables es concreta en la fórmula iterativa:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} - \left[Df\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix}\right]^{-1} f\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix}.$$

En el nostre cas,

$$Df\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\cos(x_1+x_2) & -\cos(x_1+x_2) \\ \sin(x_1-x_2) & 1-\sin(x_1-x_2) \end{pmatrix}$$

i el càlcul de la inversa dóna

$$\left[Df\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \frac{1}{\Delta(x_1,x_2)} \begin{pmatrix} 1-\sin(x_1-x_2) & \cos(x_1+x_2) \\ -\sin(x_1-x_2) & 1-\cos(x_1+x_2) \end{pmatrix},$$

on

$$\Delta(x_1,x_2) = 1 - \sin(x_1-x_2) - \cos(x_1+x_2) + 2\sin(x_1-x_2)\cos(x_1+x_2).$$

Així doncs, la iteració s'escriurà:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} - \frac{(1-\sin(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}))(x_1^{(k)} - \sin(x_1^{(k)}+x_2^{(k)}))}{\Delta(x_1^{(k)},x_2^{(k)})} \\ &\quad - \frac{\cos(x_1^{(k)}+x_2^{(k)})(x_2^{(k)} - \cos(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}))}{\Delta(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}, \\ x_2^{(k+1)} &= x_2^{(k)} + \frac{\sin(x_1^{(k)}-x_2^{(k)})(x_1^{(k)} - \sin(x_1^{(k)}+x_2^{(k)}))}{\Delta(x_1^{(k)},x_2^{(k)})} \\ &\quad - \frac{(1-\cos(x_1^{(k)}+x_2^{(k)}))(x_2^{(k)} - \cos(x_1^{(k)}-x_2^{(k)}))}{\Delta(x_1^{(k)},x_2^{(k)})}. \end{aligned}$$

Fent els càlculs s'obté la taula de valors següent:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	1	1
1	0.9359511522	1
2	0.9350846651	0.9980207933
3	0.9350820642	0.9980200582
4	0.9350820641	0.9980200582

Es pot comprovar que

$$\left\| f\begin{pmatrix} x_1^{(4)} \\ x_2^{(4)} \end{pmatrix}\right\|_\infty \simeq 10^{-11}$$

i, per tant, la solució del sistema, amb la precisió desitjada, és

$$x_1^{(4)} = 0.9350820641\ , \quad x_2^{(4)}) = 0.9980200582\ .$$

11 A teoria

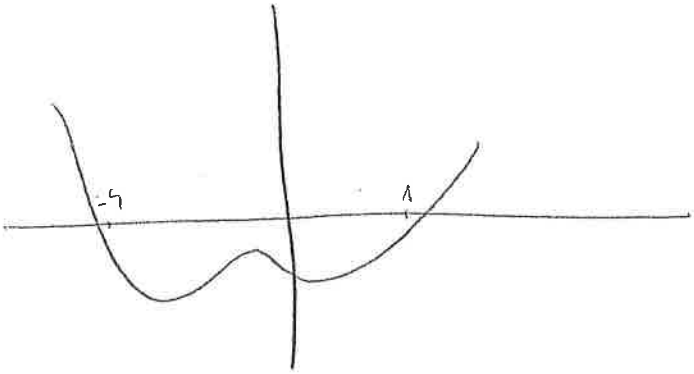
(12)

$x^4+5x^3+3x^2-5x-9=0$ prenent $r_0=3$, $q_0=-5$

Es té $rx+q \simeq r_4x+q_4 = 2,902954x + 4,917738$

Llavors $x^4+5x^3+3x^2-5x-9=(x^2+2,902954x+4,917738)\cdot$

$\cdot(x^2+2,097046x+1,830110)$



$x = \begin{cases} 1,198087 \\ 4,101858762 \end{cases}$

$x = 1,0485230 \pm i\,0,8538148$