1 Zeros d'equacions i sistemes no lineals

1. Volem calcular les arrels de $x^3 + x - 1000$ amb un esquema iteratiu de la forma $x = g(x)$.
   a) Demostreu que només té una arrel real.
   b) Formeu esquemes iteratius que no convergeixin cap a la solució.
   c) Formeu-ne que convergeixin. Quin serà el més ràpid? determineu per a aquest un interval on es compleixin les hipòtesis del lema de contracció. Determineu el mínim nombre d'iteracions per assegurar (teòricament) un error menor que 10^{-6}. Trobeu la solució.
   d) Considereu ara $x = g(x) = \sqrt{\frac{1000}{x} - 1}$. Calculeu la solució. Accelereu per Aitken la successió anterior.

2. Usant els mètodes de bissecció, secant i Newton, trobeu els zeros de la funció
   a) $f(x) = 4\sin x + 1 - x$.
   b) $f(x) = 1 - x - \exp(-2x)$.
   c) $f(x) = (x+1)e^{x-1} - 1$.

3. Sigui $f(x) = \frac{x^3+bx}{3x^2+d}$. Calculeu les constants b i d de manera que el mètode d'iteració tingui convergència quadràtica cap a $\sqrt{a}$. A partir d'això calculeu, treballant amb doble precisió, $\sqrt{10}$ amb 10 xifres decimals. Què s'observa?

4. Apliqueu Newton per calcular totes les arrels de $x\exp(\exp(\exp x)) = 1$.

5. Calculeu l'arrel més petita de $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ per iteració de la funció $g(x) = (x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 1)/(-5)$. Quin ordre s'observa? Justifiqueu-lo.

6. Resoleu $x = \cos x$ per iteració simple, amb el mètode d'Aitken i el de Steffensen.

7. (Examen Gener 2012). Proveu que l'ordre de convergència del mètode de Steffensen

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(f(x_k))^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}$$

   en el càlcul de zeros simples de funcions dues vegades diferenciables amb continuïtat és 2. Quant val la constant asimptòtica de l'error?.

8. a) Demostreu que el mètode de Newton modificat per a zeros múltiples

$$x_{k+1} = x_k - \frac{mf(x_k)}{f'(x_k)}$$

   té ordre de convergència 2 en calcular un zero α de multiplicitat m de f.

[0]T. Lázaro, M. Ollé i J.R. Pacha. Departament Matemàtica Aplicada I

b) Calculeu la constant asimptòtica de l'error (suposeu que $f^{(m+1)}(\alpha) \neq 0$).

9. Apliquem el mètode de Newton a un sistema de 2 equacions amb 2 variables

$$f(x,y) = 0, \quad g(x,y) = 0.$$

Donat un iterat (x_n, y_n), trobeu l'expressio analítica de l'increment δ i ϵ (en funció de f i g) que determina el següent iterat (x_{n+1}, y_{n+1}) amb $x_{n+1} = x_n + \delta, y_{n+1} = y_n + \epsilon$.

10. Apliqueu el mètode de Newton amb dues variables per tal de calcular la solució del sistema no lineal:

$$x = \sin(x+y), \quad y = \cos(x-y)$$

prop de $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Acabeu el procés quan el vector residual, resultant de restar els dos membres de cada equació, sigui menor que 10^{-10} en $\|\cdot\|_\infty$.

11. Donat el polinomi $P(x) = 5x^4 - 8x^3 - x^2 + x - 6$, determineu dos intervals que continguin totes les arrels reals (positives i negatives respectivament)

a) aplicant la regla de Laguerre.

b) aplicant la regla de Newton.

12. Calculeu, pel mètode de Bairstow, els zeros del polinomi $P(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 9$