1 Mètodes iteratius per a sistemes lineals

1. Donada una matriu $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, es defineix *radi espectral d'A* com $\rho(A) := \max\limits_{1\le k\le n} |\lambda_k|$ a on $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ són els vaps d'A.

   (i) Demostreu que $\rho(A) < 1 \iff \lim\limits_{j\to+\infty} A^j = 0$.

   (ii) Considereu la matriu $S_m = \sum_{j=0}^{m} A^j$. Demostreu que $\lim\limits_{m\to+\infty} S_m$ existeix $\iff \rho(A) < 1$. A més, en aquest cas, comproveu que $\lim\limits_{m\to+\infty} S_m = (I-A)^{-1}$.
   [*Indicació: Useu l'apartat anterior i la identitat* $(I-A)S_m = I - A^{m+1}$].

   (iii) Demostreu que si per una determinada norma (subordinada a una norma vectorial donada) es té $\|A\| < 1$ aleshores $I - A$ és inversible i es compleix que

$$(I-A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j, \qquad \left\|(I-A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1-\|A\|} = 1 + \|A\| + \|A\|^2 + \cdots$$

2. Justifiqueu si el mètode de Jacobi per al sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 5x_2 + x_3 & = & 12 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & 12 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = & 12 \end{array}\right.$$

   partint de $x^{(0)} = (0,0,0)^\top$ és convergent.

3. Volem resoldre pel mètode iteratiu de Jacobi el sistema $Ax = b$ partint de $x^{(0)} = 0$ i tenim la informació següent sobre les dades:

$$|a_{ii}| > \alpha \sum_{j\ne i} |a_{ij}|, \quad i = 1, ..., n, \quad \alpha > 1,$$

$$0 < \gamma < |a_{ii}|, \quad i = 1, ..., n, \quad \|b\|_\infty = \beta$$

   a) Quantes iteracions k del mètode calen per tal de garantir un error en la norma del màxim $\|x^{(k)} - x\|_\infty$ menor que ε?

   b) Aplicació: Quant val k si $\alpha = 2$, $\beta = 10$, $\gamma = 1$ i $\varepsilon = 10^{-6}$?

4. Sigui B_n una matriu de la forma

[0]T. Lázaro, M. Ollé i J.R. Pacha. Departament Matemàtica Aplicada I

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & \dots & b_{n-1} & b_n \\ a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a & 0 \end{pmatrix}$$

amb $b_j = \frac{K}{2^j}$, $j = 1, ..., n$. Considereu un mètode iteratiu general del tipus

$$x^{(k+1)} = B_n x^{(k)} + c$$

per c qualsevol. Estudieu la convergència per $|a| < 1$ i $|K| \leq 1$.

Indicació: Useu el Teorema de Gerschgorin: Els valors propis d'una matriu $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ es troben localitzats al pla complex a $\mathcal{K}$, on $\mathcal{K}$ és la unió dels següents discs:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{n} K_i, \qquad K_i = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\},$$

A més, si la unió $M_1 = \bigcup_{j=1}^{k} K_{i_j}$ de k discs K_{i_j}, $j = 1, \dots, k$, i la unió M_2 dels discs restants són disjuntes aleshores M_1 conté exactament k vaps i M_2 exactament $n - k$ vaps.

5. Donat el sistema lineal $Ax = b$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

justifiqueu si el mètode de Gauss-Seidel és convergent.

6. Considereu el sistema lineal amb matriu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Analitzeu la convergència dels mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel per a la seva resolució.

7. Doneu condicions suficients sobre el paràmetre β per tal que els mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel convergeixin en aplicar-los per trobar la solució del sistema que té per matriu

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ \beta & 5 \end{pmatrix}.$$

8. Per a resoldre un sistema lineal $Ax = b$ amb $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ es considera el següent mètode de relaxació: donat $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)^\top$ calculeu, per $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} r_i^{(k)} &= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \\ x_i^{(k+1)} &= (1-\omega) x_i^{(k)} + \omega \, \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}, \end{aligned}$$

per $i = 1, 2, \ldots, n$ i amb $\omega \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Abusant de notació, si $i = 1$ prenem $\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} \equiv 0$ a la primera fórmula.

(i) Trobeu la forma explícita de la matriu d'iteració corresponent.

(ii) Demostreu que si aquest mètode convergeix aleshores $0 < \omega < 2$.

(iii) Comproveu que si prenem $\omega = 1$ aquest mètode es redueix al mètode de Gauss-Seidel. En el cas que $1 < \omega < 2$ aquest mètode s'anomena *de successiva sobre-relaxació* (en anglès, SOR, de *successive over-relaxation*).

9. Es considera el següent sistema lineal (de joguina) $Ax = b$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 + 3x_2 &= 0. \end{cases}$$

Calculeu la primera iteració, a partir de $x^{(0)} = (1, 1/2)^\top$, usant

(i) Jacobi.

(ii) Gauss-Seidel.

10. Considereu el sistema lineal $Ax = b$ amb $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,n}$ i $a_{ii} = 1$ per $i = 1, 2, \ldots, n$. Descomposeu $A = L + I + U$ a on L és estrictament triangular inferior i U estrictament triangular superior. Definiu el següent mètode iteratiu:

$$x^{(k+1)} = M(\alpha, \Omega) x^{(k)} + (I + \alpha \Omega L)^{-1} \Omega b,$$

on

$$M(\alpha, \Omega) = (I + \alpha \Omega L)^{-1} \left[(I - \Omega) - (1-\alpha) \Omega L - \Omega U \right]$$

és la matriu d'iteració, $\Omega = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ és la matriu diagonal de relaxació, $\omega_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ per $i = 1, 2, \ldots, n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

(i) Comproveu que, si el mètode convergeix, ho fa cap a la solució del sistema. Si suposem $\omega_i = \omega$ per $i = 1, 2, \ldots, n$, quins mètodes s'obtenen quan $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$? I si $\omega = 1$?

(*ii*) Demostreu que el polinomi característic de $M(\alpha,\Omega)$ és

$$P(\lambda)=\det\big((1-\lambda)I-\Omega-(1-\alpha+\lambda\alpha)\Omega L-\Omega U\big)=:\det B(\lambda).$$

(*iii*) Siguin

$$\ell_i=\sum_{j\neq i}|\ell_{ij}|\,,\qquad u_i=\sum_{j\neq i}|u_{ij}|$$

i suposeu que $|\omega_i\alpha|\ell_i<1$ per $i=1,2,\ldots,n$. Demostreu la següent fita del radi espectral de $M(\alpha,\Omega)$:

$$\rho(M(\alpha,\Omega))\leq\max_{1\leq i\leq n}\frac{|1-\omega_i|+|\omega_i|(|1-\alpha|\ell_i+u_i)}{1-|\omega_i\alpha|\ell_i}=:K(\alpha,\Omega).$$

[*Indicació: Si* $|\lambda|>K(\alpha,\Omega)$ *llavors* $B(\lambda)$ *és estrictament diagonal dominant per files, és a dir,* $|b_{ii}|>\sum_{j\neq i}|b_{ij}|$ *per* $i=1,2,\ldots,n$.]