1 Derivació i integració numèriques

1. a) Determineu la fórmula de derivació numèrica

$$g'(0) \simeq w_{-1}g(-1) + w_0 g(0) + w_1 g(1)$$

   de manera que sigui exacta per a tots els polinomis de grau menor o igual que 2.

   b) És exacta també per als polinomis de grau menor o igual que 3?

   c) Usant els apartats anteriors, deduïu una fórmula de derivació de la forma

$$f'(c) \simeq a_{-1}f(c-h) + a_0 f(c) + a_1 f(c+h)$$

   de manera que sigui exacta per a tots els polinomis de grau menor o igual que 2.

2. Calculeu $f'''(10)$, on $f(x) = (x^3+1)^{1/2}$, amb un error relatiu d'un 1%. (Indicació: $f(x) = x^{3/2}(1+x^{-3})^{1/2}$, desenvolupeu en potències negatives de x i deriveu).

3. a) Escriviu de manera explícita una fórmula de derivació per al càlcul de $f'(a)$, deduïda per derivació del polinomi d'interpolació en les abscisses a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h$ i $a+4h$.

   b) Doneu una expressió exacta per a l'error, si $f \in \mathcal{C}^6([a, a+4h])$.

   c) Trobeu una expressió asimptòtica per a l'error, quan f és suficientment diferenciable.

4. a) Calculeu els coeficients de la fórmula de quadratura interpolatòria

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x)\,\mathrm{d}x \;\simeq\; Af(0) + Bf(\frac{1}{2}) + Cf(1)$$

   substituint f pel seu polinomi interpolador en els punts $0, \frac{1}{2}, 1$.

   b) Trobeu una fita de l'error quan $f \in \mathcal{C}^3([0,1])$.

   c) Aplicació: Calculeu $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ usant la fórmula de l'apartat a). Serveix en aquest cas la fita trobada a l'apartat b)?

5. Determineu els pesos i les abscisses de la fórmula d'integració

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \simeq w_0 g(t_0) + w_1 g(t_1)$$

   per tal que sigui exacta per a tots els polinomis del grau més alt possible.

6. Considerem una funció f suficientment diferenciable.

[0]T. Lázaro, M. Ollé i J.R. Pacha. Departament Matemàtica Aplicada I

a) Doneu de forma explícita les *fórmules d'integració numèrica de Taylor*

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{n} C_j f^{(j)}(c),$$

trobades per integració numèrica del polinomi d'interpolació de Taylor de grau més petit o igual que n a f en una abscissa c de l'interval $[a, b]$.

b) Expliciteu la dita fórmula quan $c = a$ i quan $c = b$.

c) Doneu una expressió per a l'error en tots els casos.

7. Trobeu la integral

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$$

per desenvolupament de Taylor de l'integrant amb un error menor que 10^{-10}.

8. Calculeu amb 5 xifres decimals correctes

$$\int_{10}^{\infty} (x^3 + x)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

9. Sigui $f(x) = e^{-x^2} \cos x$. Sabent que $|f^{(4)}(x)| \leq 25$, $\forall\, x \in R$, calculeu $\int_0^\infty \cos x e^{-x^2}\, dx$ amb error més petit que 10^{-6}.

10. Sigui $f(x) = \sin x^2$.

    a) Calculeu la sèrie de Taylor de $f(x)$ al voltant de 0.

    b) Useu a) per calcular $\int_0^1 f$ amb error menor que 10^{-6}.

11. Volem calcular $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ amb un error menor que 10^{-4}. Per tal de comparar els resultats prenem com a valor exacte: 0.746824132818...

    a) Apliqueu la fórmula de trapezis composta.

    b) Apliqueu la fórmula de Simpson composta.

    c) Apliqueu la fórmula d'Euler-Maclaurin amb $T_N(f)$ més una correcció.

    d) Apliqueu una fórmula gaussiana amb 3 abscisses i doneu en aquest cas una fita de l'error comès. (Pesos: $W_2 = W_0 = 0.55555556$, $W_1 = 0.888888889$. Abscisses: $x_2 = -x_0 = 0.77459667$, $x_1 = 0$).

    e) Calculeu la integral expandint e^{-x^2} en sèrie de Taylor al voltant del 0.

    f) Calculeu la integral amb extrapolació (mètode de Romberg).

12. Explicar la ràpida convergència del mètode dels trapezis al calcular $\int_0^1 e^{x^2(1-x)^2} dx$

13. Calculeu $\int_0^1 \cos x dx$ segons la fórmula de Gauss-Legendre de 4 punts. Fiteu l'error.

14. Calculeu $\int_0^\infty \cos \frac{x}{2} e^{-x} dx$ amb un error menor que 10^{-5}.

15. Calculeu $f'(a)$ per a $f(x) = xe^x$ i $a = 2$, amb un error menor que 10^-6, extrapolant per Richardson la diferència finita centrada de primer ordre. Comenceu amb $h = 0.1$ i $q = 1/2$.

16. Demostreu que en extrapolar trapezis amb passos h i $h/2$ s'obté la fórmula de Simpson amb pas $h/2$.