

1 Mètodes iteratius per a sistemes lineals

1. Donada una matriu $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, es defineix *radi espectral* d' A com $\rho(A) := \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$ a on $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ són els vaps d' A .

(i) Demostreu que $\rho(A) < 1 \iff \lim_{j \rightarrow +\infty} A^j = 0$.

(ii) Considereu la matriu $S_m = \sum_{j=0}^m A^j$. Demostreu que $\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m$ existeix $\iff \rho(A) < 1$.

A més, en aquest cas, comproveu que $\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = (I - A)^{-1}$.

[Indicació: Useu l'apartat anterior i la identitat $(I - A)S_m = I - A^{m+1}$].

(iii) Demostreu que si per una determinada norma (subordinada a una norma vectorial donada) es té $\|A\| < 1$ aleshores $I - A$ és invertible i es compleix que

$$(I - A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j, \quad \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} = 1 + \|A\| + \|A\|^2 + \dots$$

2. Justifiqueu si el mètode de Jacobi per al sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 12 \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

partint de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^\top$ és convergent.

3. Volem resoldre pel mètode iteratiu de Jacobi el sistema $Ax = b$ partint de $x^{(0)} = 0$ i tenim la informació següent sobre les dades:

$$|a_{ii}| > \alpha \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n, \quad \alpha > 1,$$

$$0 < \gamma < |a_{ii}|, \quad i = 1, \dots, n, \quad \|b\|_\infty = \beta$$

- a) Quantes iteracions k del mètode calen per tal de garantir un error en la norma del màxim $\|x^{(k)} - x\|_\infty$ menor que ε ?
- b) Aplicació: Quant val k si $\alpha = 2$, $\beta = 10$, $\gamma = 1$ i $\varepsilon = 10^{-6}$?

4. Sigui B_n una matriu de la forma

⁰T. Lázaro, M. Ollé i J.R. Pacha. Departament Matemàtica Aplicada I

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & \dots & b_{n-1} & b_n \\ a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a & 0 \end{pmatrix}$$

amb $b_j = \frac{K}{2^j}$, $j = 1, \dots, n$. Considereu un mètode iteratiu general del tipus

$$x^{(k+1)} = B_n x^{(k)} + c$$

per c qualsevol. Estudieu la convergència per $|a| < 1$ i $|K| \leq 1$.

Indicació: Useu el Teorema de Gerschgorin: Els valors propis d'una matriu $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ es troben localitzats al pla complex a \mathcal{K} , on \mathcal{K} és la unió dels següents discs:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^n K_i, \quad K_i = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\},$$

A més, si la unió $M_1 = \bigcup_{j=1}^k K_{i_j}$ de k discs K_{i_j} , $j = 1, \dots, k$, i la unió M_2 dels discs restants són disjunts aleshores M_1 conté exactament k vaps i M_2 exactament $n - k$ vaps.

5. Donat el sistema lineal $Ax = b$ amb

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

justifiqueu si el mètode de Gauss-Seidel és convergent.

6. Considereu el sistema lineal amb matriu

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Analitzeu la convergència dels mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel per a la seva resolució.

7. Doneu condicions suficients sobre el paràmetre β per tal que els mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel convergeixin en aplicar-los per trobar la solució del sistema que té per matriu

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ \beta & 5 \end{pmatrix}.$$

8. Per a resoldre un sistema lineal $Ax = b$ amb $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ es considera el següent mètode de relaxació: donat $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^\top$ calculeu, per $k \geq 0$,

$$r_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \omega \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}},$$

per $i = 1, 2, \dots, n$ i amb $\omega \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Abusant de notació, si $i = 1$ prenem $\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} \equiv 0$ a la primera fórmula.

- (i) Trobeu la forma explícita de la matriu d'iteració corresponent.
- (ii) Demostreu que si aquest mètode convergeix aleshores $0 < \omega < 2$.
- (iii) Comproveu que si prenem $\omega = 1$ aquest mètode es redueix al mètode de Gauss-Seidel. En el cas que $1 < \omega < 2$ aquest mètode s'anomena *de successiva sobre-relaxació* (en anglès, *SOR*, de *successive over-relaxation*).

9. Es considera el següent sistema lineal (de joguina) $Ax = b$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Calculeu la primera iteració, a partir de $x^{(0)} = (1, 1/2)^\top$, usant

- (i) Jacobi.
 - (ii) Gauss-Seidel.
10. Considereu el sistema lineal $Ax = b$ amb $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,n}$ i $a_{ii} = 1$ per $i = 1, 2, \dots, n$. Descomposeu $A = L + I + U$ a on L és estrictament triangular inferior i U estrictament triangular superior. Definiu el següent mètode iteratiu:

$$x^{(k+1)} = M(\alpha, \Omega)x^{(k)} + (I + \alpha\Omega L)^{-1}\Omega b,$$

on

$$M(\alpha, \Omega) = (I + \alpha\Omega L)^{-1} [(I - \Omega) - (1 - \alpha)\Omega L - \Omega U]$$

és la matriu d'iteració, $\Omega = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ és la matriu diagonal de relaxació, $\omega_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ per $i = 1, 2, \dots, n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

- (i) Comproveu que, si el mètode convergeix, ho fa cap a la solució del sistema. Si suposem $\omega_i = \omega$ per $i = 1, 2, \dots, n$, quins mètodes s'obtenen quan $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$? I si $\omega = 1$?

(ii) Demostreu que el polinomi característic de $M(\alpha, \Omega)$ és

$$P(\lambda) = \det((1 - \lambda)I - \Omega - (1 - \alpha + \lambda\alpha)\Omega L - \Omega U) =: \det B(\lambda).$$

(iii) Siguin

$$\ell_i = \sum_{j \neq i} |\ell_{ij}|, \quad u_i = \sum_{j \neq i} |u_{ij}|$$

i suposeu que $|\omega_i \alpha| \ell_i < 1$ per $i = 1, 2, \dots, n$. Demostreu la següent fita del radi espectral de $M(\alpha, \Omega)$:

$$\rho(M(\alpha, \Omega)) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|1 - \omega_i| + |\omega_i|(|1 - \alpha| \ell_i + u_i)}{1 - |\omega_i \alpha| \ell_i} =: K(\alpha, \Omega).$$

[Indicació: Si $|\lambda| > K(\alpha, \Omega)$ llavors $B(\lambda)$ és estrictament diagonal dominant per files, és a dir, $|b_{ii}| > \sum_{j \neq i} |b_{ij}|$ per $i = 1, 2, \dots, n$.]

2 Aproximació

1. Ajusteu per mínims quadrats la taula de dades: $(0.25, 0.40)$, $(0.50, 0.50)$, $(0.75, 0.90)$, $(1.00, 1.28)$, $(1.25, 1.60)$, $(1.50, 1.66)$, $(1.75, 2.02)$, a una funció del tipus

a) $p_1^* = a_0 + a_1x$.

b) $p_2^* = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

c) Calculeu l'error de les aproximacions $\|f - p_j^*\|_2^2$, $j = 1, 2$.

2. Obtingueu $P(x) = A \exp(Mx)$ a partir de les dades $(1, 7)$, $(2, 11)$, $(3, 17)$, $(4, 27)$.

3. Considereu la taula corresponent a la funció $y = e^x$:

$$(-1, 0.36), (-0.5, 0.60), (0, 1), (0.5, 1.64), (1, 2.71).$$

a) Busqueu els polinomis ortogonals mòncics fins a grau 4.

b) Trobeu el polinomi interpolador en aquests punts usant el mètode de mínims quadrats. (No useu ni Lagrange ni Newton).

4. Trobeu la recta $p(x) = Mx + B$ per a la qual $S = \sum_{i=0}^N (y_i - Mx_i - B)^2$ és un mínim amb les dades (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, N$. Concretament

a) Trobeu el sistema d'equacions normals. Comproveu que és compatible determinat i resoleu-lo.

b) Comproveu que la solució B , M trobada correspon a un mínim de S .

5. Determineu la família de polinomis ortogonals mòncics $\psi_j(x)$, $j = 0, \dots, 4$ corresponent a la funció pes $w(x) = x^2 + 1$ a l'interval $[-1, 1]$.

6. Trobeu (resolent el sistema d'equacions normals) la millor aproximació per mínims quadrats als punts $(-\pi/2, 1)$, $(0, 0)$, $(\pi/2, 1/2)$, $(\pi, 1)$ i que sigui del tipus

$$t_1(\theta) = a + r \sin(\theta + \alpha)$$

amb a , b reals i $\alpha \in [0, 2\pi]$.

7. Useu els pesos moleculars dels sis òxids de nitrògen donats per calcular els pesos atòmics de l'hidrògen i oxigen: $NO : 30.006$, $N_2O : 40.013$, $NO_2 : 46.006$, $N_2O_3 : 76.012$, $N_2O_5 : 108.010$, $N_2O_4 : 92.011$.

8. Es defineix el polinomi de Txebyshhev de grau n com $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ a l'interval $[-1, 1]$.

⁰T. Lázaro, M. Ollé i J.R. Pacha. Departament Matemàtica Aplicada I

- a) Proveu que es compleix la següent recurrència: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.
- b) Calculeu $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$.
- c) Proveu que $T_n(x)$ té n zeros a $[-1, 1]$ de la forma $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\frac{\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ (anomenats nodes o abscisses de Txebyshév).
- d) Proveu que els polinomis de Txebyshév són ortogonals respecte la funció pes $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $[-1, 1]$, més concretament proveu que

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \pi/2 & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

9. Demostreu que la família de polinomis

$$Q_j(y) = T_j(2y - 1), \quad j \geq 0$$

és ortogonal a $[0, 1]$ respecte al pes $w(x) = (y(1-y))^{-1/2}$ a $[0, 1]$, on els polinomis $T_j(x)$ són els polinomis de Txebyshév.

10. El nivell de l'aigua al mar del Nord està determinat per la marea, el període de la qual és aproximadament 12 hores, i que ajustarem per

$$H^*(t) = h_0 + a_1 \sin \frac{2\pi t}{12} + a_2 \cos \frac{2\pi t}{12}$$

t en hores. S'han fet les següents mesures en $(t, H(t))$

$$(0, 1.0), (2, 1.6), (4, 1.4), (6, 0.6), (8, 0.2), (10, 0.8)$$

(t en hores, $H(t)$ en metres).

- a) Són ortogonals $1, \sin \frac{2\pi t}{12}, \cos \frac{2\pi t}{12}$?
- b) Ajusteu $H(t)$ a aquestes mesures utilitzant $H^*(t)$ per mínims quadrats.
- c) Trobeu la desviació quadràtica.
11. Trobeu la constant que millor aproxima $f(x) = e^x$ en $[0, 1]$ segons les normes $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$.
12. A teoria hem provat que les funcions $\{1/2, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \cos 2nx, \sin 2nx\}$ són ortogonals a $[0, 2\pi]$ en el cas continu. Proveu que també ho són en el cas discret. Més concretament prenem el conjunt de $m+1$ punts $\{\frac{2\pi k}{m+1}\}$, $k = 0, \dots, m$, amb $2n \leq m$. Proveu que:

$$(\psi_j, \psi_l) = \begin{cases} \frac{m+1}{4} & \text{si } j = l = 0 \\ \frac{m+1}{2} & \text{si } j = l = 1, \dots, 2n \\ 0 & \text{si } j \neq l, \quad j, l = 0, \dots, 2n \end{cases}$$

1 Derivació i integració numèriques

1. a) Determineu la fórmula de derivació numèrica

$$g'(0) \simeq w_{-1}g(-1) + w_0g(0) + w_1g(1)$$

de manera que sigui exacta per a tots els polinomis de grau menor o igual que 2.

- b) És exacta també per als polinomis de grau menor o igual que 3?
 c) Usant els apartats anteriors, deduiu una fórmula de derivació de la forma

$$f'(c) \simeq a_{-1}f(c-h) + a_0f(c) + a_1f(c+h)$$

de manera que sigui exacta per a tots els polinomis de grau menor o igual que 2.

2. Calculeu $f'''(10)$, on $f(x) = (x^3 + 1)^{1/2}$, amb un error relatiu d'un 1%. (Indicació: $f(x) = x^{3/2}(1+x^{-3})^{1/2}$, desenvolueu en potències negatives de x i deriveu).
3. a) Escriviu de manera explícita una fórmula de derivació per al càlcul de $f'(a)$, deduïda per derivació del polinomi d'interpolació en les abscisses a , $a+h$, $a+2h$, $a+3h$ i $a+4h$.
 b) Doneu una expressió exacta per a l'error, si $f \in \mathcal{C}^6([a, a+4h])$.
 c) Trobeu una expressió asimptòtica per a l'error, quan f és suficientment diferenciable.
4. a) Calculeu els coeficients de la fórmula de quadratura interpolatòria

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx \simeq Af(0) + Bf\left(\frac{1}{2}\right) + Cf(1)$$

substituint f pel seu polinomi interpolador en els punts $0, \frac{1}{2}, 1$.

- b) Trobeu una fita de l'error quan $f \in \mathcal{C}^3([0, 1])$.
 c) Aplicació: Calculeu $\int_0^1 x^2 dx$ usant la fórmula de l'apartat a). Serveix en aquest cas la fita trobada a l'apartat b)?

5. Determineu els pesos i les abscisses de la fórmula d'integració

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \simeq w_0g(t_0) + w_1g(t_1)$$

per tal que sigui exacta per a tots els polinomis del grau més alt possible.

6. Considerem una funció f suficientment diferenciable.

⁰T. Lázaro, M. Ollé i J.R. Pacha. Departament Matemàtica Aplicada I

- a) Doneu de forma explícita les fórmules d'integració numèrica de Taylor

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{j=0}^n C_j f^{(j)}(c),$$

trobades per integració numèrica del polinomi d'interpolació de Taylor de grau més petit o igual que n a f en una abscissa c de l'interval $[a, b]$.

- b) Expliciteu la dita fórmula quan $c = a$ i quan $c = b$.
c) Doneu una expressió per a l'error en tots els casos.

7. Trobeu la integral

$$\int_0^1 \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$$

per desenvolupament de Taylor de l'integrand amb un error menor que 10^{-10} .

8. Calculeu amb 5 xifres decimals correctes

$$\int_{10}^{\infty} (x^3 + x)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

9. Sigui $f(x) = e^{-x^2} \cos x$. Sabent que $|f^{(4)}(x)| \leq 25, \forall x \in R$, calculeu $\int_0^{\infty} \cos x e^{-x^2} dx$ amb error més petit que 10^{-6} .

10. Sigui $f(x) = \sin x^2$.

- a) Calculeu la sèrie de Taylor de $f(x)$ al voltant de 0.
b) Useu a) per calcular $\int_0^1 f$ amb error menor que 10^{-6} .

11. Volem calcular $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ amb un error menor que 10^{-4} . Per tal de comparar els resultats prenem com a valor exacte: 0.746824132818...

- a) Apliqueu la fórmula de trapezis composta.
b) Apliqueu la fórmula de Simpson composta.
c) Apliqueu la fórmula d'Euler-Maclaurin amb $T_N(f)$ més una correcció.
d) Apliqueu una fórmula gaussiana amb 3 abscisses i doneu en aquest cas una fita de l'error comès. (Pesos: $W_2 = W_0 = 0.55555556, W_1 = 0.88888889$. Abscisses: $x_2 = -x_0 = 0.77459667, x_1 = 0$).
e) Calculeu la integral expandint e^{-x^2} en sèrie de Taylor al voltant del 0.
f) Calculeu la integral amb extrapolació (mètode de Romberg).

12. Explicar la ràpida convergència del mètode dels trapezis al calcular $\int_0^1 e^{x^2(1-x)^2} dx$
13. Calculeu $\int_0^1 \cos x dx$ segons la fórmula de Gauss-Legendre de 4 punts. Fiteu l'error.
14. Calculeu $\int_0^\infty \cos \frac{x}{2} e^{-x} dx$ amb un error menor que 10^{-5} .
15. Calculeu $f'(a)$ per a $f(x) = xe^x$ i $a = 2$, amb un error menor que 10^{-6} , extrapolant per Richardson la diferència finita centrada de primer ordre. Comenceu amb $h = 0.1$ i $q = 1/2$.
16. Demostreu que en extrapolar trapezis amb passos h i $h/2$ s'obté la fórmula de Simpson amb pas $h/2$.

1 Zeros d'equacions i sistemes no lineals

1. Volem calcular les arrels de $x^3 + x - 1000$ amb un esquema iteratiu de la forma $x = g(x)$.
 - a) Demostreu que només té una arrel real.
 - b) Formeu esquemes iteratius que no convergeixin cap a la solució.
 - c) Formeu-ne que convergeixin. Quin serà el més ràpid? determineu per a aquest un interval on es compleixin les hipòtesis del lema de contracció. Determineu el mínim nombre d'iteracions per assegurar (teòricament) un error menor que 10^{-6} . Trobeu la solució.
 - d) Considereu ara $x = g(x) = \sqrt{\frac{1000}{x}} - 1$. Calculeu la solució. Accelereu per Aitken la successió anterior.
2. Usant els mètodes de bissecció, secant i Newton, trobeu els zeros de la funció
 - a) $f(x) = 4 \sin x + 1 - x$.
 - b) $f(x) = 1 - x - \exp(-2x)$.
 - c) $f(x) = (x + 1)e^{x-1} - 1$.
3. Sigui $f(x) = \frac{x^3 + bx}{3x^2 + d}$. Calculeu les constants b i d de manera que el mètode d'iteració tingui convergència quadràtica cap a \sqrt{a} . A partir d'això calculeu, treballant amb doble precisió, $\sqrt{10}$ amb 10 xifres decimals. Què s'observa?
4. Apliqueu Newton per calcular totes les arrels de $x \exp(\exp(x)) = 1$.
5. Calculeu l'arrel més petita de $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ per iteració de la funció $g(x) = (x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 1)/(-5)$. Quin ordre s'observa? Justifiqueu-lo.
6. Resoleu $x = \cos x$ per iteració simple, amb el mètode d'Aitken i el de Steffensen.
7. (Examen Gener 2012). Proveu que l'ordre de convergència del mètode de Steffensen

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(f(x_k))^2}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)}$$

en el càlcul de zeros simples de funcions dues vegades diferenciables amb continuïtat és 2. Quant val la constant asimptòtica de l'error?

8. a) Demostreu que el mètode de Newton modificat per a zeros múltiples

$$x_{k+1} = x_k - \frac{m f(x_k)}{f'(x_k)}$$

té ordre de convergència 2 en calcular un zero α de multiplicitat m de f .

^oT. Lázaro, M. Ollé i J.R. Pacha. Departament Matemàtica Aplicada I

b) Calculeu la constant asimptòtica de l'error (suposeu que $f^{(m+1)}(\alpha) \neq 0$).

9. Apliquem el mètode de Newton a un sistema de 2 equacions amb 2 variables

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

Donat un iterat (x_n, y_n) , trobeu l'expressió analítica de l'increment δ i ϵ (en funció de f i g) que determina el següent iterat (x_{n+1}, y_{n+1}) amb $x_{n+1} = x_n + \delta, y_{n+1} = y_n + \epsilon$.

10. Apliqueu el mètode de Newton amb dues variables per tal de calcular la solució del sistema no lineal:

$$x = \sin(x + y), \quad y = \cos(x - y)$$

prop de $x_1 = 1, x_2 = 1$. Acabeu el procés quan el vector residual, resultant de restar els dos membres de cada equació, sigui menor que 10^{-10} en $\|\cdot\|_\infty$.

11. Donat el polinomi $P(x) = 5x^4 - 8x^3 - x^2 + x - 6$, determineu dos intervals que continguin totes les arrels reals (positives i negatives respectivament)

a) aplicant la regla de Laguerre.

b) aplicant la regla de Newton.

12. Calculeu, pel mètode de Bairstow, els zeros del polinomi $P(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 9$