2 Aproximació

1. Ajusteu per mínims quadrats la taula de dades: (0.25,0.40), (0.50,0.50), (0.75,0.90), (1.00,1.28), (1.25,1.60), (1.50,1.66), (1.75,2.02), a una funció del tipus

   a) $p_1^* = a_0 + a_1 x$.

   b) $p_2^* = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

   c) Calculeu l'error de les aproximacions $\|f - p_j^*\|_2^2$, $j = 1, 2$.

2. Obtingueu $P(x) = A\exp(Mx)$ a partir de les dades (1,7), (2,11), (3,17), (4,27).

3. Considereu la taula corresponent a la funció $y = e^x$:

$$(-1, 0.36),\ (-0.5, 0.60),\ (0, 1),\ (0.5, 1.64),\ (1, 2.71).$$

   a) Busqueu els polinomis ortogonals mònics fins a grau 4.

   b) Trobeu el polinomi interpolador en aquests punts usant el mètode de mínims quadrats. (No useu ni Lagrange ni Newton).

4. Trobeu la recta $p(x) = Mx + B$ per a la qual $S = \sum_{i=0}^{N}(y_i - Mx_i - B)^2$ és un mínim amb les dades (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, N$. Concretament

   a) Trobeu el sistema d'equacions normals. Comproveu que és compatible determinat i resoleu-lo.

   b) Comproveu que la solució B, M trobada correspon a un mínim de S.

5. Determineu la família de polinomis ortogonals mònics $\psi_j(x)$, $j = 0, \ldots, 4$ corresponent a la funció pes $w(x) = x^2 + 1$ a l'interval $[-1, 1]$.

6. Trobeu (resolent el sistema d'equacions normals) la millor aproximació per mínims quadrats als punts $(-\pi/2, 1)$, $(0, 0)$, $\pi/2, 1/2)$, $(\pi, 1)$ i que sigui del tipus

$$t_1(\theta) = a + r\sin(\theta + \alpha)$$

   amb a, b reals i $\alpha \in [0, 2\pi]$.

7. Useu els pesos moleculars dels sis òxids de nitrògen donats per calcular els pesos atòmics de l'hidrògen i oxigen: $NO : 30.006$, $N_2O : 40.013$, $NO_2 : 46.006$, $N_2O_3 : 76.012$, $N_2O_5 : 108.010$, $N_2O_4 : 92.011$.

8. Es defineix el polinomi de Txebyshev de grau n com $T_n(x) = \cos(n \text{ arccos } x)$ a l'interval $[-1, 1]$.

[0]T. Lázaro, M. Ollé i J.R. Pacha. Departament Matemàtica Aplicada I

a) Proveu que es compleix la següent recurrència: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.
b) Calculeu $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$.
c) Proveu que $T_n(x)$ té n zeros a $[-1,1]$ de la forma $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\frac{\pi}{2}\right)$, $k = 0,1,...,n-1$ (anomenats nodes o abscisses de Txebyshev).
d) Proveu que els polinomis de Txebyshev són ortogonals respecte la funció pes $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $[-1,1]$, més concretament proveu que

$$\int_1^1 T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi & \text{si } n=m=0 \\ \pi/2 & \text{si } n=m\neq 0 \\ 0 & \text{si } n\neq m \end{cases}$$

9. Demostreu que la família de polinomis

$$Q_j(y) = T_j(2y-1), \qquad j \geq 0$$

és ortogonal a $[0,1]$ respecte al pes $w(x) = (y(1-y))^{-1/2}$ a $[0,1]$, on els polinomis $T_j(x)$ són els polinomis de Txebyshev.

10. El nivell de l'aigua al mar del Nord està determinat per la marea, el període de la qual és aproximadament 12 hores, i que ajustarem per

$$H^*(t) = h_0 + a_1 \sin\frac{2\pi t}{12} + a_2\cos\frac{2\pi t}{12}$$

t en hores. S'han fet les següents mesures en $(t, H(t))$

$$(0,1.0), (2,1.6), (4,1.4), (6,0.6), (8,0.2), (10,0.8)$$

(t en hores, $H(t)$ en metres).

a) Són ortogonals 1, $\sin\frac{2\pi t}{12}$, $\cos\frac{2\pi t}{12}$?
b) Ajusteu $H(t)$ a aquestes mesures utilitzant $H^*(t)$ per mínims quadrats.
c) Trobeu la desviació quadràtica.

11. Trobeu la constant que millor aproxima $f(x) = e^x$ en $[0,1]$ segons les normes $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$.

12. A teoria hem provat que les funcions $\{1/2, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \cos 2nx, \sin 2nx\}$ són ortogonals a $[0,2\pi]$ en el cas continu. Proveu que també ho són en el cas discret. Més concretament prenem el conjunt de $m+1$ punts $\{\frac{2\pi k}{m+1}\}$, $k = 0,...,m$, amb $2n \leq m$. Proveu que:

$$(\psi_j, \psi_l) = \begin{cases} \frac{m+1}{4} & \text{si } j=l=0 \\ \frac{m+1}{2} & \text{si } j=l=1,...,2n \\ 0 & \text{si } j\neq l, \quad j,l=0,...,2n \end{cases}$$