

## 1 Mètodes iteratius per a sistemes lineals. Precondicionadors

Els mètodes iteratius que tractarem en aquesta pràctica provenen de l'utilització de l'anomenat *precondicionador*, una matriu procedent de la descomposició de la matriu del sistema,  $A$ , que proporciona a l'esquema recurrent final una estructura de càlcul triangular. Com a recordatori, si volem resoldre el sistema  $Ax = b$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ , podem descomposar  $A = P + (A - P)$  i escriure

$$Ax = b \Leftrightarrow Px = (P - A)x + b \Leftrightarrow x = (I - P^{-1}A)x + P^{-1}b,$$

que deriva en l'esquema recurrent:

$$x^{(k+1)} = Bx^k + \tilde{b}, \quad (1)$$

on  $B = (I - P^{-1}A)$  és la matriu d'iteració i  $\tilde{b} = P^{-1}b$ . Si escrivim  $A = L + D + U$ , amb  $D$  la part diagonal de la matriu,  $L$  la part triangular estricta inferior i  $U$  la triangular estricta superior, aleshores els casos  $P = D$  i  $P = L + D$  corresponen als coneguts mètodes de Jacobi i Gauss-Seidel, respectivament.

L'esquema (1) és convergent si i només si el radi spectral de la matriu  $B$ ,  $\rho(B) = \max_{\lambda \text{ vap}} |\lambda|$ , és estrictament menor que 1. Del fet que  $\rho(B) \leq \|B\|$  per a qualsevol norma matricial es dedueix que  $\|B\| < 1$  és una condició suficient per a la convergència del mètode iteratiu (1).

**Exercici 1.1** *Considerem una matriu  $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_{m,n}$ . Aleshores, escriu programes - que puguin ser cridats des de qualsevol altre - que calculin:*

$$\|A\|_1 = \max_{j=1\dots n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_\infty = \max_{i=1\dots m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \left(\rho(A^\top A)\right)^{1/2}.$$

Per calcular la norma sub-2 d'una matriu necessitareu programar el càlcul del radi spectral  $\rho(A)$  d'una matriu quadrada  $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ . Per fer-ho implementeu el *mètode de la potència* (vegeu, per exemple, [1, 2, 3, 4]), que proporciona el vap de mòdul màxim. La idea d'aquest mètode és la següent: ordenem els vaps de la matriu  $A$  segons la seva multiplicitat i mòdul

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots |\lambda_n|.$$

Suposem, per simplicitat, que  $A$  diagonalitza en una certa base de veps  $u_1, u_2, \dots, u_n$  i que existeix un únic vap de mòdul màxim:  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots$ . Si prenem un vector inicial

$$x^{(0)} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n, \quad \alpha_1 \neq 0,$$

aleshores, en aplicar-li  $A$  obtindrem

$$Ax^{(0)} = \lambda_1 \alpha_1 u_1 + \lambda_2 \alpha_2 u_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n u_n.$$

---

<sup>0</sup>T. Lázaro, M. Ollé i J.R. Pacha. Departament Matemàtica Aplicada I

Si ho fem de manera iterada i anomenem  $x^{(k)} = Ax^{(k-1)}$ , aleshores

$$x^{(k)} = \lambda_1^k \alpha_1 u_1 + \lambda_2^k \alpha_2 u_2 + \dots + \lambda_n^k \alpha_n u_n = \lambda_1^k \left( \alpha_1 u_1 + \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \alpha_2 u_2 + \dots + \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \alpha_n u_n \right)$$

Observeu que si fem  $k$  gran, el vector  $x^{(k)}$  tendeix cap a la direcció del vep de valor propi  $\lambda_1$ . Si denotem  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  llavors, sempre que tinguin sentit els quocients, tindrem

$$\frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}} = \lambda_1 \left( 1 + \mathcal{O} \left( \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \right) \right)$$

$$\frac{x^{(k)}}{\lambda_1^k} = \alpha_1 u_1 \left( 1 + \mathcal{O} \left( \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \right) \right).$$

Noteu que la velocitat de convergència cap a  $\lambda_1$  depèn fortament del quocient  $|\lambda_1/\lambda_2|$ , de forma que si aquests dos primers vaps són similars aquesta pot ser molt lenta.

La successió  $(\lambda_1^k)_k$  generalment tendeix cap a 0 o esdevé no afitada. Per evitar els problemes numèrics que això implica convé normalitzar a cada pas el vector  $x^{(k)}$ . Així, un possible algorisme per fer-ho seria: un cop tenim  $x^{(k)}$ , el normalitzem

$$y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|}$$

i calculem el següent iterat  $x^{(k+1)} = Ay^{(k)}$ . Aleshores,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}} = \lambda_1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y^{(k)} = \pm \frac{u_1}{\|u_1\|}.$$

**Exercici 1.2 (Opcional)** *Com ordena un cercador com Google les pàgines web que fan referència a una pregunta que hàgiu introduït? Quin criteri segueix?*

*La resposta està basada en un problema d'Àlgebra lineal, matrius de Markov i, òbviament, mètodes numèrics eficients que permetin calcular el valor propi dominant i un seu vector propi de matrius de mida realment gegant (de l'ordre de  $10^9$ ).*

*Si us interessa el problema i altres relacionats i us tempta programar-ho (a una escala més petita, és clar) descarregueu-vos l'article "El secreto de Google y el Álgebra Lineal" de Pablo Fernández ([www.uam.es/personal\\_pdi/ciencias/gallardo/fernandez1.pdf](http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/gallardo/fernandez1.pdf)), de la Universidad Autónoma de Madrid. Aquest article es publicà al Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada - SEMA - (volum 30 (2004), 115-141) i va guanyar el "V Premio SEMA a la Divulgación en Matemática Aplicada" l'any 2004.*

**Exercici 1.3** Programeu la resolució numèrica d'un sistema  $Ax = b$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ , fent servir els mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel. A cada programa caldria que féssiu:

1. Lectura de la matriu  $A$  d'un fitxer.
2. Cada un d'aquests programes hauria de rebre la matriu  $A$ , el seu nombre  $n$  de fileres (o columnes, doncs és quadrada) i els vectors  $x$  i  $b$ .
3. Calculeu les normes  $\|\cdot\|_1$  i del suprem de la matriu d'iteració  $B$  corresponent i indiqueu, en el cas de que alguna d'elles sigui menor estricta que 1, la convergència del mètode. En el cas que ambdues siguin més grans o iguals a 1, calculeu el radi espectral de  $B$ ,  $\rho(B)$ .
4. Si el mètode convergeix, obteniu un valor aproximat  $\tilde{x}$  de la solució amb una precisió determinada TOL (per exemple,  $10^{-12}$ ) i en un nombre màxim d'iteracions NUM\_MAX\_ITER que també fixareu a priori. Un cop tingueu calculada aquesta aproximació haurieu d'escriure per pantalla informació sobre una estimació de l'error en l'aproximació  $\|x^{(K)} - x^{(K-1)}\|_\infty$ , on  $x^{(K)} = \tilde{x}$ .
5. Calculeu la norma del suprem del residu:  $\|A\tilde{x} - b\|_\infty$ .

**Exercici 1.4 (Extra)** Fer el mateix amb un mètode de sobre-relaxació (SOR).

**Exercici 1.5** Resoleu numèricament (usant Jacobi i Gauss-Seidel) els següents sistemes  $Ax = b$ . Compareu la velocitat de convergència en ambdós casos.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.07 & 0. & 0. & 0.05 & 0.01 \\ 0.07 & 0.95 & 0.07 & 0. & 0. & 0.04 \\ 0. & 0.07 & 0.95 & 0.06 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.06 & 0.95 & 0.06 & 0. \\ 0.05 & 0. & 0. & 0.06 & 0.95 & 0.06 \\ 0.01 & 0.04 & 0. & 0. & 0.06 & 0.95 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

A molts problemes d'elements finits o diferències finites és necessària la resolució de (grans) sistemes lineals  $Ax = b$  on la matriu  $A$  és una matriu per blocs. Per exemple, si  $T \in \mathcal{M}_{m,m}$  és la matriu tridiagonal simètrica:

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 4 & \end{pmatrix}$$

i I la matriu identitat  $m$ -dimensional, aleshores considerem

$$A = \begin{pmatrix} T & -I & & & \\ -I & T & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -I & \\ & & & -I & T \end{pmatrix}, \quad (2)$$

matriu tridiagonal simètrica per blocs. Emprar un mètode de resolució directa a  $A$  (per exemple, Choleski) seria poc eficient ja que  $A$  és *escasa* i moltes de les operacions que faríem involucrarien coeficients nuls.

El que es fa sovint és aprofitar aquesta estructura per blocs i transformar el sistema  $Ax = b$  en un grapat de sistemes més petits, molts d'ells amb la mateixa matriu (en el nostre cas serien del tipus  $T\bar{x} = \bar{b}$  doncs  $-I\bar{x} = \bar{b}$  és de resolució immediata).

**Exercici 1.6** *Apliqueu els mètodes de Jacobi i de Gauss-Seidel per a la resolució d'un sistema  $Ax = b$ , amb  $A$  del tipus (2) amb  $N \times N$  blocs. Feu-ho sense descomposar-lo en subsistemes petits, és a dir, treballant amb tota la matriu  $A$ . (Nota: no feu ara la lectura dels coeficients de la matriu  $A$  des d'un fitxer sino definiu-los vosaltres directament en funció dels valors d' $m$  i  $N$ , que podeu llegir per pantalla.)*

## Bibliografia

- [1] A. Aubanell, A. Benseny, A. Delshams. *Eines bàsiques de càlcul numèric*. Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1991.
- [2] C. Bonet, À. Jorba, T.M-Seara, J. Masdemont, M. Ollé, A. Susin, M. Valencia. *Càlcul numèric*. Aula Teòrica 23, Edicions UPC, Barcelona, 1994.
- [3] G. Dahlquist, A. Björck. *Numerical methods*. Prentice Hall Inc., New Jersey, 1974.
- [4] J. Stoer, R. Bulirsch. *Introduction to numerical analysis* (third edition). Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 2002.