3 Integració Numèrica

L'objectiu d'aquesta pràctica és calcular aproximacions per a una integral donada fent servir diferents mètodes d'integració numèrica. Així doncs, considereu

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx.$$

Exercici 3.1 *Obteniu una aproximació del valor d'I amb* 6 *xifres decimals correctes fent servir la Regla dels Trapezis composta. Justifiqueu analíticament el nombre N de subintervals que es necessiten per aconseguir-ho.*

Considereu ara l'aproximació d'I obtinguda utilitzant precisió simple i precisió doble amb $N =$ 800 *intervals. Compareu els resultats obtinguts i justifiqueu-los.*

Exercici 3.2 *Obteniu una aproximació d'I amb la mateixa precisió que a l'apartat anterior fent servir la Regla de Simpson composta. Amb quants intervals N caldrà treballar en aquest cas?*

Recordeu que, a partir de la Fórmula d'Euler-Mc Laurin i suposant $f \in \mathcal{C}^{2s+2}([a,b])$, és possible obtenir el següent desenvolupament asimptòtic de l'error per a la Regla dels Trapezis:

$$T(h) = \int_a^b f(x)\, dx + \sum_{r=1}^{s} h^{2r} \frac{B_{2r}}{(2r)!} \left[f^{(2r-1)}(b) - f^{(2r-1)}(a) \right] + \frac{B_{2s+2}}{(2s+2)!}(b-a) f^{(2s+2)}(\xi)\, h^{2s+2}, \tag{1}$$

a on $\xi \in (a,b)$ i els B_j són els anomenats *nombres (clàssics) de Bernoulli*. Aquests nombres es poden definir a partir del desenvolupament

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_3}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

i obtenir-se a gràcies a la recurrència

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \qquad \sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{j}{\ell} B_\ell = 0, \quad j \geq 3.$$

Per exemple, els primers nombres de Bernoulli són

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -1/2, \quad B_2 = 1/6, \quad B_4 = -1/30, \quad B_6 = 1/42, \quad B_8 = -1/30$$

[0]T. Lázaro, M. Ollé i J. R. Pacha. Departament Matemàtica Aplicada I

i es pot demostrar que $B_{2k+1} = 0$ per a $k \geq 1$.

A partir de l'expressió asimptòtica donada a (1), podem considerar les anomenades *fórmules* corregides de la Regla dels Trapezis, consistents en agafar alguns dels primers termes del desenvolupament d'Euler-Mc Laurin. Concretament, si prenem $s = 1$ a la fórmula (1) obtenim

$$\int_a^b f(x)\,dx = C_1T(h) + \frac{1}{30 \cdot 4!}(b-a)f^{(4)}(\xi)h^4, \qquad \xi \in (a,b),$$

a on

$$C_1T(h) = T(h) + \frac{h^2}{12}\left[f'(a) - f'(b)\right].$$

De manera anàloga, prenent $s = 2$ s'obté:

$$\int_a^b f(x)\,dx = C_2T(h) - \frac{1}{42 \cdot 6!}(b-a)f^{(6)}(\xi)h^6, \qquad \xi \in (a,b),$$

amb

$$C_2T(h) = T(h) + \frac{h^2}{12}\left[f'(a) - f'(b)\right] - \frac{h^4}{30 \cdot 4!}\left[f^{(3)}(a) - f^{(3)}(b)\right].$$

Exercici 3.3 *Obteniu aproximacions del valor d'I amb un error absolut inferior a $0.5 \cdot 10^{-6}$, fent servir les fórmules de Trapezis corregides $C_1T(h)$ i $C_2T(h)$. Quants subintervals N heu escollit en cada cas ? Justifiqueu la resposta.*

Exercici 3.4 *Apliqueu el mètode d'*extrapolació de Romberg *per calcular I amb un error relatiu inferior a $0.5 \cdot 10^{-7}$. Construïu l'esquema triangular*

$$\begin{array}{lllll}
T_{00} & & & & \\
T_{10} & T_{11} & & & \\
T_{20} & T_{21} & T_{22} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
T_{i0} & T_{i1} & T_{i2} & \cdots & T_{ij}
\end{array}$$

on T_{i0} correspon al valor obtingut per la Regla dels Trapezis amb 2^i subintervals. Useu com a condició d'aturada del procés que la següent estimació de l'error relatiu es satisfaci:

$$\left|\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{T_{i0}}\right| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}$$