SOLUCIONS

Només s'inclouen les solucions dels problemes plantejats. Les respostes relacionades amb la precisió, nombre de passos emprats, normes vectorials i matricials, etc depenen dels vostres algorismes.

1. Considereu la matriu $A \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ que trobareu a l'arxiu `matriu.dat`. Els elements de la matriu s'han introduït per fileres.

   (a) Calculeu el seu radi espectral:
   Resposta: $\rho(A) = 43.1216465432398$

   (b) Calculeu A^{-1}. Quant val $\left\|A \cdot A^{-1} - \mathrm{Id}\right\|_\infty$?
   Resposta: $\left\|A \cdot A^{-1} - \mathrm{Id}\right\|_\infty = 2.42623816971663 \cdot 10^{-16}$

   (c) Calculeu $\mu_2(A)$, número de condició d'A en norma sub-2.
   Resposta: $\mu_2(A) = 1.55632645686435$.

2. Considereu una matriu $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{12}$ definida de la següent manera:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{2.275(j+\sin(i))}{1+j} - \frac{3.22i}{7+j^2} \qquad \text{si } i \neq j \\ a_{ii} &= 7.3463 + \sum_{k\neq i} |a_{ik}|. \end{aligned}$$

   Sigui $b = (1, 2, \ldots, 12)^\top$. Busquem $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{12})^\top$ solució d'$Ax = b$. Aleshores, una solució aproximada i el corresponent residu són:

$$x_* = \begin{pmatrix} -0.0973134563704558 \\ -0.0652319837709607 \\ -0.0262102912599012 \\ 0.0289283965616238 \\ 0.0802484252988677 \\ 0.1200180035737668 \\ 0.1541985534559902 \\ 0.1968109787458076 \\ 0.2572447868285710 \\ 0.3116827908815806 \\ 0.3519827863394862 \\ 0.3928150860591544 \end{pmatrix}, \qquad Ax_* - b = \begin{pmatrix} 4.44089209850063 \cdot 10^{-16} \\ 0.00000000000000 \cdot 10^{+00} \\ 0.00000000000000 \cdot 10^{+00} \\ 8.88178419700125 \cdot 10^{-16} \\ 0.00000000000000 \cdot 10^{+00} \\ -8.88178419700125 \cdot 10^{-16} \\ 0.00000000000000 \cdot 10^{+00} \\ 1.77635683940025 \cdot 10^{-15} \\ -1.77635683940025 \cdot 10^{-15} \\ 0.00000000000000 \cdot 10^{+00} \\ 0.00000000000000 \cdot 10^{+00} \\ 0.00000000000000 \cdot 10^{+00} \end{pmatrix}.$$

Observeu que $x_3 = -0.0262102912599012$ i $\|Ax_* - b\|_\infty = 5.32907051820075e{-}15{\cdot}10^{-15}$.

3. Es vol calcular de manera aproximada la següent integral

$$\int_0^{10} \mathrm{e}^{-x} \cosh \sqrt{x}\, dx$$

usant Romberg. Una aproximació amb 20 xifres siginificatives correctes és

$$1.59166468040970051\,1525988.$$

4. Considereu el pèndol amb fricció

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& y \\ \dot{y} &=& -\dfrac{1}{2}\sin x - 2y. \end{array} \right. \tag{1}$$

i la corba al pla de fase (x, y):

$$x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0.$$

Si dibuixem, al mateix pla, aquesta corba i la seva transformada pel flux de (1) a temps $T = 1.5$ s'obtenen les corbes de la Figura 1.

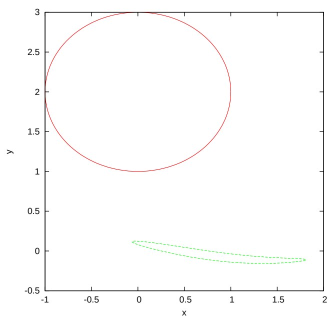

Figure 1: Corba inicial i la seva transformada per l'aplicació flux unitat

5. Considerem el següent sistema no lineal d'equacions al pla:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x,y,\mu) &=& 0 \\ g(x,y,\mu) &=& 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

amb

$$\begin{aligned} f(x,y,\mu) &= \frac{1}{2}x^2 - xy^3 + 5\mu\sin(y)\cos(x) - 2 \\ g(x,y,\mu) &= 3xy^2 - x^2y + \mathrm{e}^{\mu x} - 7. \end{aligned} \tag{3}$$

essent (x, y) variables i $\mu \in \mathbb{R}$ un paràmetre. Volem continuar numèricament la corba $(f, g) = (0, 0)$ segons el paràmetre μ, és a dir, determinar com varien al pla (x, y) aquests zeros quan movem $\mu \in [\mu_{ini}, \mu_{fi}]$. Un dels mètodes usuals per fer-ho es basa en el mètode de Newton. L'algorisme proposat és el següent: suposem que coneixem (x_0, y_0, μ_0) de forma que

$$f(x_0, y_0, \mu_0) = g(x_0, y_0, \mu_0) = 0.$$

Aleshores prenem $\mu_1 = \mu_0 + \Delta_\mu$ on Δ_μ és un increment, per simplicitat, fix. Apliquem Newton per trobar un zero (x_1, y_1) de

$$\begin{cases} f(x, y, \mu_1) & = & 0 \\ g(x, y, \mu_1) & = & 0 \end{cases}$$

considerant com a condició inicial (x_0, y_0), el zero trobat per a μ_0. I així sucessivament.

En el nostre cas, per a $\mu = \mu_{ini} = 0$ tenim un zero del sistema (2)-(3) a

$$x_0 = -4.761643300, \quad y_0 = -1.251634893.$$

Prenem $\mu_{fi} = 100$, $\Delta_\mu = 10^{-2}$ i apliquem el mètode de continuació explicat a dalt. Usem Newton per trobar els zeros amb una precisió de 10^{-12} i obtenim la corba (al pla (x, y)) de la Figura 2.

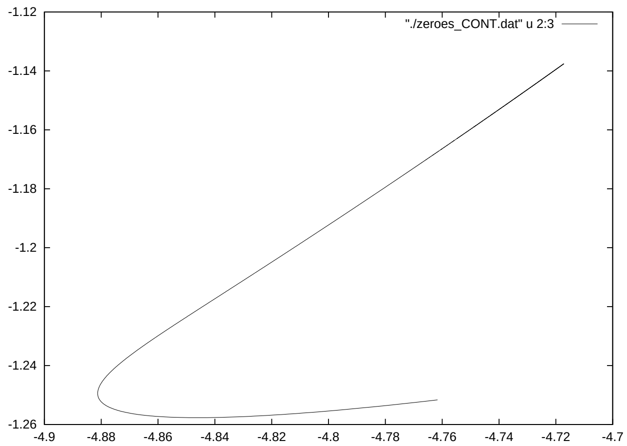

Figure 2: Corba de zeros del sistema (2) per a $\mu \in [0, 100]$