CÀLCUL D'INTEGRALS MÚLTIPLES PER CANVIS DE COORDENADES: EXEMPLES

Exemple 1. Calculeu la integral

$$I = \iint_D y\cos(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

on D és el domini definit per:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le y \le 4, 1 \le xy \le 4\};$$

usant el canvi de variables $T : x = \dfrac{u}{v}, y = v$ ($\Leftrightarrow T^{-1} : u = xy, v = y$).

◁ **Solució.** Com que $1 \le y \le 4$, es segueix, de la segona condició: $1 \le xy \le 4$ que $\dfrac{1}{x} \le y \le \dfrac{4}{x}$. És a dir, D és el domini limitat per les rectes $y = 1, y = 4$ i les hipèrboles $y = \dfrac{1}{x}, y = \dfrac{4}{x}$, tallant-se en els punts: $(1,1), (1/4,4), (4,1)$ i $(1,4)$ —veure figura 1—. Tanmateix:

$$1 \le u = xy \le 4, \qquad\qquad 1 \le v = y \le 4$$

i llavors el domini d'integració, en les noves variables (u,v) ve donat pel rectangle:

$$\begin{aligned} D^* = T^{-1}(D) &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le u \le 4, 1 \le v \le 4\} \\ &= [1,4] \times [1,4]. \end{aligned}$$

D'altra banda, si calculem el jacobià de la transformació, obtenim:

$$J_T(u,v) = \det\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\right] = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v}.$$

(observem que el canvi està ben definit per $v \neq 0$). Així:

$$I = \iint_{D^*} v\cos u \underbrace{\left(\frac{1}{v}\right)}_{\text{Jacobià}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \left(\int_1^4 \cos u\,\mathrm{d}u\right) \times \left(\int_1^4 1\,\mathrm{d}v\right) = 3 \times [\sin u]_{u=1}^{u=4} = 3(\sin 4 - \sin 1). \qquad ▷$$

Exemple 2. Calculeu l'àrea del cercle de radi R: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R\}$

◁ **Solució.**

$$\text{Àrea}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D^*} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

on $D^* = T^{-1}(D) = [0,R] \times [2,\pi]$; de manera que, en coordenades polars, podem aplicar directament el teorema de Fubini sobre rectangles:

$$\text{Àrea}(D) = \left(\int_0^R r\mathrm{d}r\mathrm{d}\right) \times \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) = \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=R} \times [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \pi R^2. \qquad ▷$$

Date: 4 maig 2012.

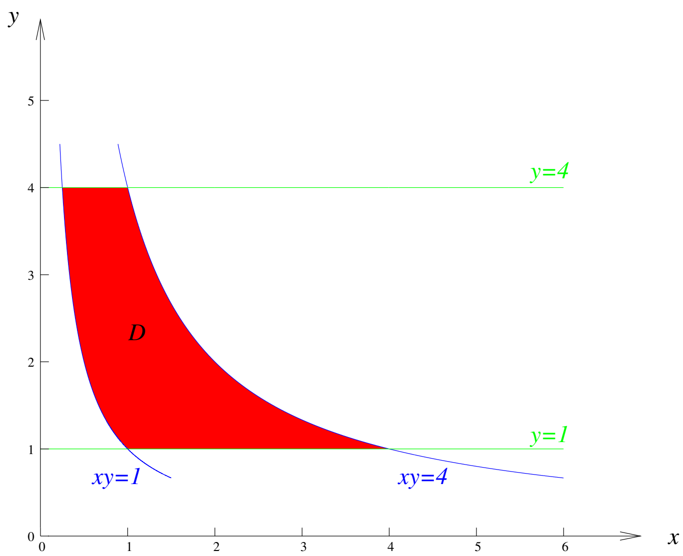


FIGURA 1. El domini D ve limitat per les rectes $y = 1, y = 4$ i les hipèrboles $xy = 1$ i $xy = 4$.

Exemple 3. Càlcul de la integral $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, on $f(x, y)$ és la funció:

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

i D el domini definit per:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

(veure figura 2(a)).

◁ **Solució.** En coordenades polar el domini D es transforma en un rectangle, i. e., $D^* = T^{-1}(D) = [a, b] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. Aleshores:

$$\begin{aligned}\iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D^*} \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\int_a^b \mathrm{e}^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\right) = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_{r=a}^{r=b} = \frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^{-a^2} - \mathrm{e}^{-b^2}\right). \quad ▷\end{aligned}$$

Remarca 1. Si uséssim integrals iterades en coordenades cartesianes, caldria calcular:

$$\iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a \left(\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_a^b \left(\int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Exemple 4 (rosa de tres pètals). Quan en domini on volem integrar està definit en coordenades polars, l'us d'aquestes esdevé imprescindible. A tall d'exemple, considerem el cas la rosa de tres pètals, que ve donada per l'equació:

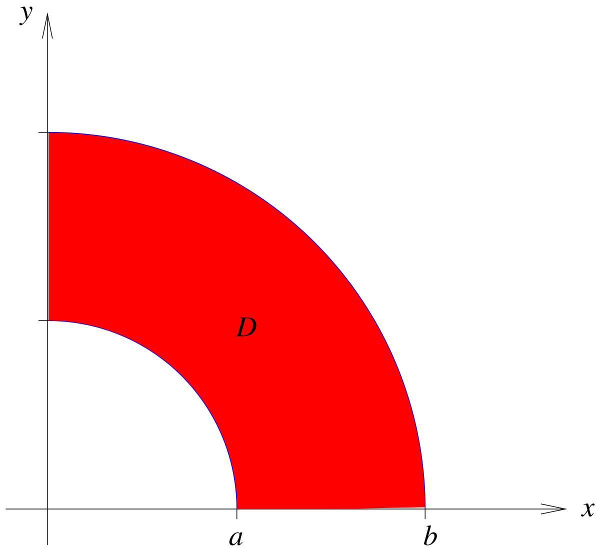
$$r = a\sin(3\theta),$$

amb $a > 0$ (veure, per ex., l'article sobre la "rosa polar" en la Wikipedia: http://es.wikipedia.org/wiki/Rosa_polar; també teniu un applet Java en http://www25.brinkster.com/denshade/ que us permet generar algunes corbes planes notables). Es vol calcular l'àrea d'un dels pètals* (veure figura 2(b)).

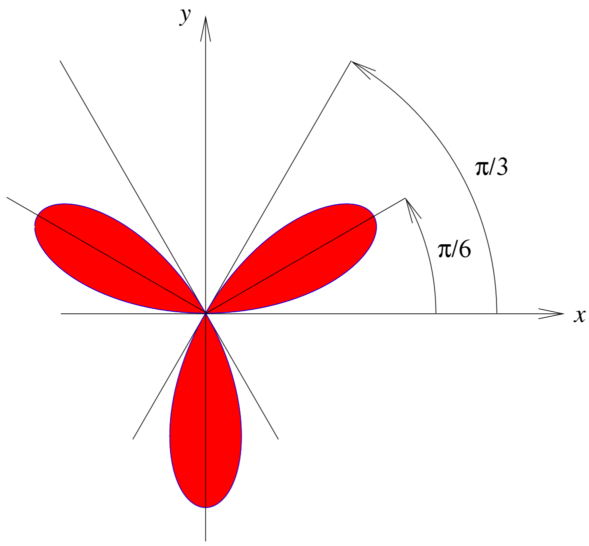
◁ **Solució.** Observem primer de tot que, si l'angle θ pren valors entre 0 i 2π, aleshores $r = a\sin(3\theta) \geq 0$ sii:

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right].$$

*En general es convé que $r = a\sin(n\theta)$ té $2n$ pètals si n és parell i n pètals si n és senar. Hi ha alguna contradicció?



(a) Anell



(b) Rosa de 3 pètals

FIGURA 2. Figures dels exemples 3 i 4.

En variar θ sobre cadascun d'aquests intervals, la corba recorre la vora del pètal corresponent (com es pot deduir de la figura 2(b)). Així, si prenem $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$, queda clar que l'àrea que busquem, A, s'obté mitjançant la integral:

$$A = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D^*} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

on D^* és el domini donat per:

$$D^* = \left\{(r,\theta) \in [0,+\infty) \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right] : 0 \le r \le a\sin(3\theta)\right\},$$

i finalment, fent els càlculs:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{a\sin(3\theta)} r\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=a\sin(3\theta)} \mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi a^2}{12}.$$ ▷

Exemple 5. Càlcul del volum del domini D de $\mathbb{R}^3$ comprés entre el con $z^2 = x^2 + y^2$ i el paraboloide $z = x^2 + y^2$, per $z \ge 0$.

◁ **Solució.** La intersecció de les superfícies $z^2 = x^2 + y^2$ i $z = x^2 + y^2$ amb el pla $z = \text{constant} \ge 0$ són dos cercles de radis z i $\sqrt{z}$ respectivament. Aquest dos cercles són el mateix si $z = 0$ (col·lapsen en un punt) i $z = 1$ (circumferència de radi 1).

La figura 3(a) mostra una secció amb el semiplà $x = 0$, $y \ge 0$. Aquesta secció és la mateixa si tallem per qualsevol pla que contingui l'eix z. Llavors el domini D és el volum de revolució entorn de l'eix z de la part ombrejada. Per tant D és un domini amb simetria cilíndrica, que en coordenades polars s'expressa, si $D = T(D^*)$:

$$D^* = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \theta \le 2\pi, z \le r \le \sqrt{z}, 0 \le z \le \theta\}.$$

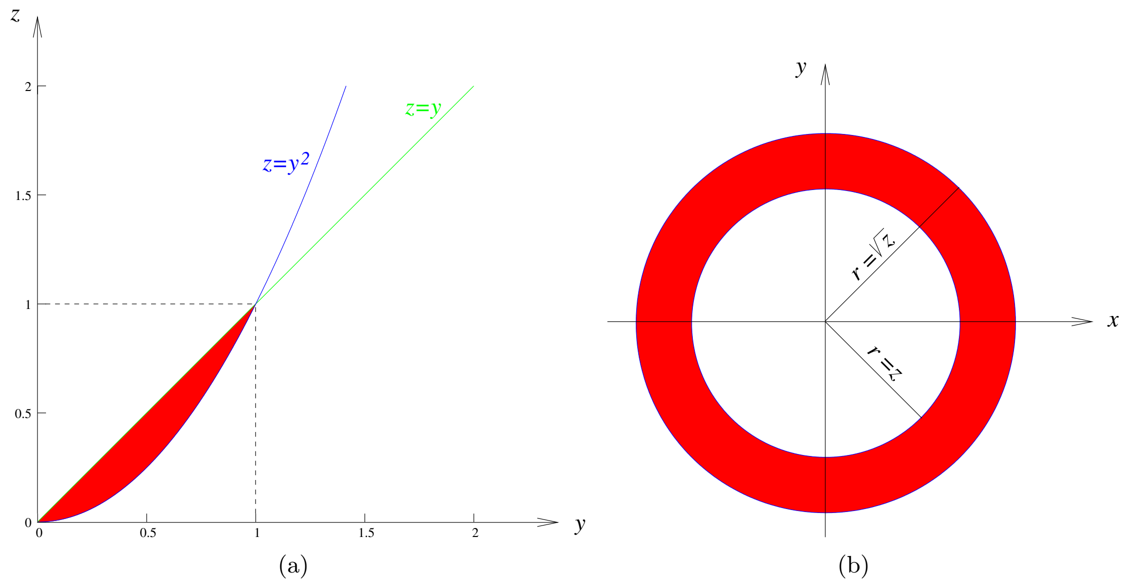


FIGURA 3. Figures de l'exemple 5.

Llavors avaluem el volum integrant en coordenades cilíndriques:

$$\begin{aligned}\text{Volum}(D) &= \iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{D^*} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_z^{\sqrt{z}} r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=z}^{r=\sqrt{z}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left[\frac{z}{2}-\frac{z^2}{2}\right]\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\times\left(\int_0^1\frac{1}{2}\left[z-z^2\right]\mathrm{d}z\right) = 2\pi\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right)\right]_{z=0}^{z=1} = 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Alternativament, usant el principi de Cavalieri: si fem seccions pel pla $z = \text{constant} \geq 0$, amb $z \in [0,1]$, obtenim que $D \cap \{z = \text{constant}\}$ és una corona circular (veure figura 3(b)), que té àrea:

$$A(z) = \pi\left(\sqrt{z}^2 - z^2\right) = \pi(z - z^2).$$

Llavors,

$$\text{Volum}(D) = \int_0^1 A(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \pi(z-z^2)\,\mathrm{d}z = \pi\left[\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{6}. \qquad \triangleright$$

Exemple 6. Calculeu la integral:

$$I = \iiint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

on D és el domini definit per:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}.$$

◁ **Solució.** D és el domini comprés entre dos cilindres de radis 1 i 2 i els plans $z = 0$ i $z = 2$. La secció vertical $z = \text{constant}$ és doncs l'anell de radis que es mostra a la figura 4. Aleshores, en coordenades cilíndriques, el domini D s'expressa com:

$$D^* = T^{-1}(D) = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3; 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\} = [1,2] \times [0,2\pi] \times [0,2],$$

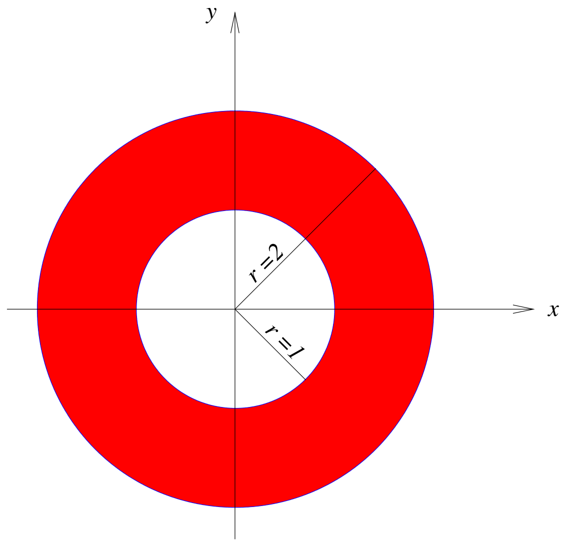


FIGURA 4. Secció del domini de l'exemple 6 pel pla $z =$ constant. Correspon a un anell de radis 1 i 2.

que és un paral·lepíped. Integrant en aquestes coordenades, obtenim:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{D^*} r^2 r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= \left(\int_1^2 r^3 \,\mathrm{d}r\right) \times \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) \times \left(\int_0^2 \mathrm{d}z\right) = \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^{r=2} \times 2\pi \times 2 = 4\pi\left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) = 15\pi. \end{aligned}$$ ▷

Exemple 7. Calculeu el volum de l'esfera D de radi R: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

◁ **Solució.** En coordenades esfèriques, el domini D és es transforma en el paral·lepíped:

$$D^* = T^{-1}(D) = \left\{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le r \le R, 0 \le \theta \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

I el volum s'obté fàcilment integrant en aquestes coordenades:

$$\begin{aligned} \mathrm{Volum}(D) &= \iiint_{D^*} r^2 \cos\varphi \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^R r^2\cos\varphi \,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\int_0^R r^2 \mathrm{d}r\right) \times \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi\right) \times \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) = 4\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=R} = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$ ▷

Exemple 8. Calculeu la integral:

$$I = \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

on D és el domini donat per les desigualtats:

$$z^2 \le x^2 + y^2 \le 3z^2, \qquad 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \tag{1}$$

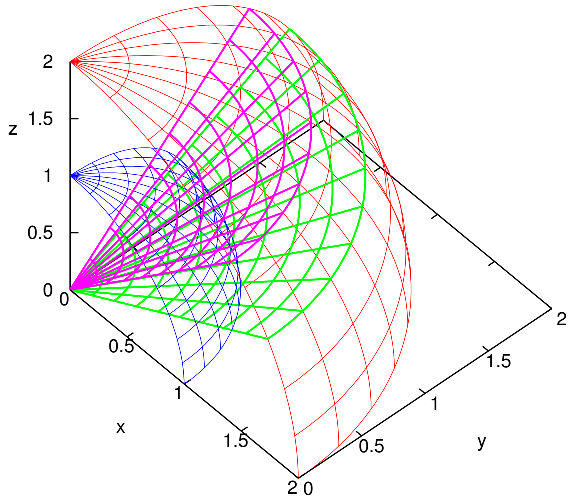
amb $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$.

◁ **Solució.** De (1) tenim que el domini D està limitat per dos cons i dues esferes (veure figura 5). En coordenades esfèriques:

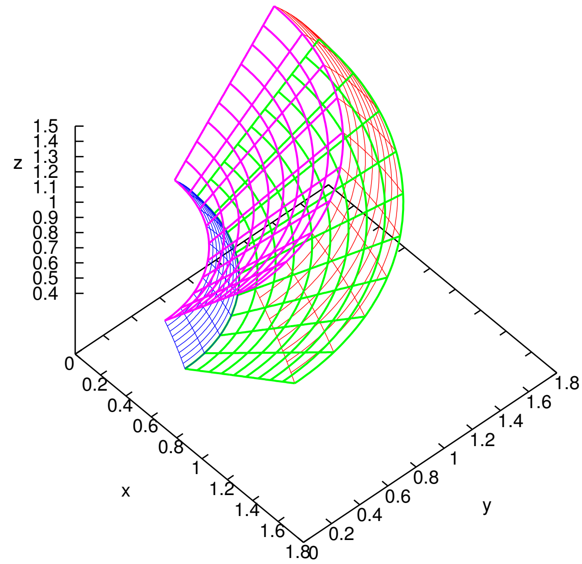
$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi,$$

les desigualtats de (1) s'escriuen com:

$$r^2\sin^2\varphi \le r^2\cos^2\varphi \le 3r^2\sin^2\varphi \Longleftrightarrow 2r^2\sin^2\varphi \le r^2 \le 4r^2\sin^2\varphi, \qquad 1 \le r \le 2. \tag{2}$$



(a)



(b)

FIGURA 5. Figures de l'exemple 8. La intersecció de les esferes i els cons es representa a la figura (a) El domini D està limitat pels cons: $3z^2 = x^2 + y^2$ (en verd a la figura), $z^2 = x^2+y^2$ (en rosa) i les esferes: $x^2+y^2+z^2 = 4$, de radi 2 (en vermell) i $x^2+y^2+z^2 = 1$, de radi 1 (en blau), amb $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ (1^{er} "octant"). Així, finalment, el domini D queda tal com es veu a la figura (b).

D'altra banda, com que $x \geq 0, y \geq 0$ i $z \geq 0$, llavors:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Amb això, (2) és equivalent a:

$$\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \qquad 1 \leq r \leq 2$$

i afegint la primera desigualtat en (3) queda, tot plegat:

$$(x, y, z) \in D \Longleftrightarrow 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

Amb la qual cosa tenim que D —el domini "complicat" de la figura 5(b)— correspon, en coordenades esfèriques, al paral·lepíped:

$$\begin{aligned} D^* = T^{-1}(D) &= \left\{(r, \theta, \varphi) \in [0, +\infty] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right\} \\ &= [1, 2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

Finalment, tenint en compte que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, la integral buscada ara es calcula com:

$$\begin{aligned} I = \iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint_{D^*} r r^2 \cos\varphi\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \left(\int_1^2 r^3 \mathrm{d}r\right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta\right) \times \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi\right) \\ &= \left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) \times \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{15\pi}{16}\left(\sqrt{2} - 1\right). \end{aligned}$$

▷